دانشگاه تبریز

دانشکده علوم ریاضی

گروه ریاضی کاربردی

پایان‌نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته‌ی

ریاضی کاربردی، گرایش آنالیز عددی

عنوان

انتگرال‌گیری سریع برای انتگرال‌های مقدار اصلی کوشی از نوع نوسانی

استاد راهنما

دکتر صداقت شهمراد

استاد مشاور

دکتر غلامرضا حجتی

پژوهشگر

اباذر هادی کمارسفلی

شهریور ۱۳۹۳

بسم الله الرّحمن الرّحیم

سپاس خدایی را که سخنوران در ستودن او بمانند و شمارگران شمردن نعمتهای او ندانند، و کوشندگان، حقّ او را گزاردن نتوانند. خدایی که پای اندیشهٔ تیزگام در راه شناسایی او لنگ است، و سر فکرت ژرف رو به دریای معرفتش بر سنگ. صفتهای او تعریف ناشدنی است و به وصف درنیامدنی، و در وقت ناگنجیدنی، و به زمانی مخصوص نابودنی. به قدرتش خلایق را بیافرید، و به رحمتش بادها را بپراکنید، و با خرسنگها لرزهٔ زمین را در مهار کشید.

گواهی می دهم که خدا یکتاست، انبازی ندارد و بی همتاست. گواهی از روی اعتقاد و ایمان، بی آمیغ برآمده از امتحان؛ و گواهی می دهم که **محمّد (ص)** بندهٔ او و پیامبر او ست. او را بفرستاد با دینی آشکار، و با نشانه هایی پدیدار، و قرآنی نبشته در علم پروردگار. که نوری است رخشان، و چراغی است فروزان، و دستورهایش روشن و عیان. تا گرد دودلی از دلها بزداید، و با حجّت و دلیل ملزم فرماید.

پاک خدایا! چه بزرگ است آنچه می بینم از خلقت تو؛ و چه خرد است، بزرگی آن در کنار قدرت تو؛ و چه با عظمت است آنچه می بینم از ملکوت تو، و چه ناچیز است برابر آنچه بر ما نهان است از سلطنت تو، و چه فراگیر است نعمت تو در این جهان؛ و چه اندک است در کنار نعمتهای آن جهان.

خدایا! اگر در پرسش خود درمانم یا راه پرسیدن را ندانم، صلاح کارم را به من نما و دلم را بدانچه رستگاری من در آن است متوجه فرما! که چنین کار از راهنماییهای تو ناشناخته نیست و از کفایتهای تو نه.

از فرمایشات حضرت **علی** (ع)

الهی! تو بر رحمت خود و من بر حاجت خویش. . .

تو توانگری و من درویش!

تقدیم به:

خانواده‌ی عزیزم

بنام خدا

و من لَمْ يَشْكُر الْمَخلوق لَمْ يَشْكُر الْخالِقْ.

سپاس و ستایش پروردگار متعال را که به اینجانب توفیق تلاش در راه کسب علم و دانش را عطا فرمود. امیدوارم بتوانم آموخته‌هایم را در راه پیشرفت علمی وطن خویش مورد استفاده قرار دهم.

وظیفه خود می‌دانم از زحمات بی‌دریغ استاد راهنمای خود، جناب آقای دکتر **صداقت شهمراد**، صمیمانه تشکر و قدردانی کنم که قطعاً بدون راهنمایی‌های ارزنده ایشان، این مجموعه به انجام نمی‌رسید.

از جناب آقای **دکتر غلامرضا حجتی** که زحمات مشاوره‌ی این پایان‌نامه را تقبل فرمودند و در آماده سازی این پایان‌نامه، به نحو احسن اینجانب را مورد راهنمایی قرار دادند، کمال امتنان را دارم.

در پایان از کلیه‌ی اعضای خانواده‌ام که در تمامی مراحل همواره یار و مشوق من بوده‌اند، و از دوستانم که در نوشتن این پایان‌نامه اینجانب را مورد راهنمایی قرار دادند، کمال سپاسگزاری را دارم.

اباذر هادی کمارسفلی

شهریور ۱۳۹۳

نام خانوادگی دانشجو: هادی کمارسفلی نام: اباذر

عنوان: انتگرال‌گیری سریع برای انتگرال‌های مقدار اصلی کوشی از نوع نوسانی

استاد راهنما : دکتر صداقت شهمراد

استاد مشاور : دکتر غلامرضا حجتی

مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد رشته: ریاضی کاربردی گرایش: آنالیز عددی دانشگاه تبریز
دانشکده علوم ریاضی تاریخ فارغ التحصیلی: شهریور ۱۳۹۳ تعداد صفحات: ۷۰

کلید واژه‌ها: مقدار اصلی کوشی، درونیابی هرمیت، انتگرال‌گیری عددی، همگرایی، نوسانی

چکیده

در این پایان‌نامه یک روش ساده اما با مرتبه‌ی بالا و همگرایی سریع برای محاسبه‌ی انتگرال‌های مقدار اصلی کوشی به شکل $\int_{-1}^{1} e^{i\omega x}\frac{f(x)}{x-\tau}\,dx$ و کران خطای آن ارائه می‌دهیم که در آن $f(x)$ یک تابع هموار است و $\omega \in R^+$ که ممکن است بزرگ باشد، و $-1 < \tau < 1$. روش ارائه شده با تقریب $(\frac{f(x)-f(\tau)}{x-\tau})^{(s)}$ با استفاده از درونیابی چندجمله‌ای هرمیت خاص که یک سری تیلور است، ساخته شده است که در آن s مرتبه‌ی مشتق می‌باشد. درستی و اعتبار روش ارائه شده توسط نتایج چندین مثال عددی و مقایسه با سایر روش‌ها نشان داده شده است.

فهرست مطالب

مقدمه

در طیف وسیعی از کاربردها از جمله، مهندسی، فیزیک کوانتوم، آنالیز تصاویر و دینامیک سیالات ما معمولا با ارزیابی عددی انتگرال‌های مقدار اصلی کوشی شامل توابع نوسانی به شکل

$$I_\omega(f,\tau)=\int_{-1}^{1} e^{i\omega x}\frac{f(x)}{x-\tau}\,dx=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{|x-\tau|\geq\varepsilon} e^{i\omega x}\frac{f(x)}{x-\tau}dx,$$
$$-1<\tau<1,\quad i^2=-1$$

در ارتباط هستیم که $f(x)$ یک تابع هموار است و $\omega\in R^+$ که ممکن است بزرگ باشد. با توجه به [۸] این انتگرال موجود است اگر تابع $f(x)$ در شرط هولدر روی بازه‌ی $[-1,1]$ صدق کند. در انتگرال ذکر شده عملاً با دو مشکل مواجه هستیم که یکی نوسانی بودن و دیگری داشتن تکینگی از نوع کوشی است [۱۵] و [۴] .

اوکچا [1] [۱۵] و [۱۶] بر این اساس که انتگرال فوق شامل نقاط τ در میان گره‌های انتگرال‌گیری گردد یا خیر، قواعدی را براساس درونیابی برای محاسبه‌ی عددی این انتگرال پیشنهاد کرده است که می‌توان با جایگزینی $f(x)$ با چندجمله‌ای درونیاب لاگرانژ در صفرهای چندجمله‌ای لژاندر و نقطه‌ی τ، این انتگرال را محاسبه کرد.

اخیراً وانگ [2] و ژیانگ [3] [۱۹] یک الگوریتم عددی پایدار بر اساس درونیابی در نقاط چبیشف و از بین بردن نقاط منفرد برای محاسبه‌ی انتگرال‌های مقدار اصلی کوشی از نوع نوسانی را پیشنهاد

[1] Okecha

[2] Wang

[3] Xiang

کرده‌اند. کاپوبیانکو [۴] و کریسکولو [۵][۴] به روش انتگرال‌گیری عددی دست یافته‌اند که آن روش براساس یک فرآیند درونیابی در صفرهای چندجمله‌ای‌های متعامد نسبت به وزن ژاکوبی می‌باشد.

مزیت روش‌های قبلی این است که وقتی تعداد نقاط گرهی n، به سمت بینهایت میل می‌کند ($n \to \infty$) ، همگرا می‌شوند. و عیب این روش‌ها این است که مرتبه‌ی خطا برحسب ω پائین است، یعنی در $O(\omega^{-1})$ صدق می‌کند.

اما ایده‌ی روش حاضر در این پایان‌نامه این است که مرتبه‌ی خطا برحسب ω بالاست، یعنی در $O(\omega^{-1-s})$ صدق می‌کند و همگرایی سریع‌تر است.

در فصل اول این پایان‌نامه که براساس مرجع [۵] تنظیم شده است، به مفاهیم اولیه، تعاریف و قضایا در مورد معادلات انتگرال پرداخته شده است.

در فصل دوم، برخی از روش‌های محاسبه‌ی انتگرال‌های مقدار اصلی کوشی بررسی شده است.

در فصل سوم، به قضیه‌های برای کران خطای روش اوکچا، روش مجانبی و ایده‌ی جدید براساس ترکیب دو روش پرداخته شده است.

در فصل چهارم تجزیه و تحلیل چند مثال عددی و خطای آن‌ها مورد بررسی قرار گرفته است.

---

[۴] Capobianco

[۵] Criscuolo

فصل ۱

مفاهیم مقدماتی و پیشینه

۱.۱ تعاریف و قضایای مقدماتی

تعریف ۱.۱.۱. تابعی که مشتق آن در بازه‌ی $[a,b]$ پیوسته و مخالف صفر باشد، **تابع هموار**[۱] نام دارد.

تعریف ۲.۱.۱. **تابع تحلیلی** [۲] تابعی است که به طور موضعی به وسیله‌ی یک سری توانی همگرا مشخص می‌شود. به عبارتی دیگر تابع تحلیلی یک تابع بینهایت‌بار مشتق‌پذیر است که سری تیلور آن در هر نقطه‌ای مانند $x_\circ$ در دامنه‌اش برای x به اندازه‌ی کافی نزدیک به $x_\circ$ همگراست و مقدارش برابر با $f(x)$ است. تابع f در $x_\circ$ تحلیلی است هرگاه در یک همسایگی از $x_\circ$ دارای بسط تیلور باشد.

تعریف ۳.۱.۱. اگر تابعی در یک نقطه تعریف نشده باشد آنگاه در آن نقطه ناپیوسته است. این تابع در آن نقطه **تکین**[۳] است یا در آن نقطه **تکینگی**[۴] دارد.

تعریف ۴.۱.۱. مجموعه‌ی تمام توابعی که روی $[a,b]$، $n-$ بار مشتق پیوسته دارد را با $C^n[a,b]$ و مجموعه‌ی تمام توابع پیوسته در $[a,b]$ را با $C[a,b]$ نمایش می‌دهیم.

قضیه ۵.۱.۱. *اگر f تابعی پیوسته بر $[a,b]$ باشد و برای هر $x \in [a,b]$، $F'(x) = f(x)$، آنگاه*

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

*که به **قضیه‌ی اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال** معروف است.*

برهان. به مرجع [۱۷] مراجعه شود. $\square$

قضیه ۶.۱.۱. *فرض کنید تابع $f(x)$ در بازه‌ی $[a,b]$ پیوسته و در بازه‌ی (a,b)، $n-$بار مشتق‌پذیر باشد. اگر $f(x)$ در $n+1$ نقطه‌ی متمایز $x_\circ$، $x_\circ$، ...، x_n از $[a,b]$ صفر شود، آنگاه نقطه‌ای مانند*

[۱] Smooth function

[۲] Analytic function

[۳] Singular

[۴] Singularity

ξ در بازه‌ی (a,b) وجود دارد به طوری که

$$f^{(n)}(\xi) = 0.$$

*این قضیه به **قضیه‌ی تعمیم یافته‌ی رول**[5] معروف است.*

برهان. به مرجع [۱۷] مراجعه شود. □

تعریف ۷.۱.۱. گوییم $f(h)$ به وسیله‌ی $\overline{f}(h)$ با خطای برشی از مرتبه‌ی n تقریب زده می‌شود اگر برای مقادیر کوچک $h > 0$، ثابت $M > 0$ وجود داشته باشد به طوری که

$$|f(h) - \overline{f}(h)| \leq Mh^n.$$

و با $O(h^n)$ نشان داده می‌شود، یعنی

$$f(h) = \overline{f}(h) + O(h^n).$$

ملاحظه می‌کنید که چون h خیلی کوچک است پس هرقدر n بزرگ‌تر باشد جمله‌ی خطا سریعتر به صفر میل می‌کند.

قضیه ۸.۱.۱. *هرگاه توابع $f(x)$ و $g(x)$ در بازه‌ی $[a,b]$ پیوسته باشند و $g(x) \geq 0$، آنگاه عددی مانند ξ که $a < \xi < b$ وجود دارد به طوری*

$$\int_a^b f(x)\, g(x)\, dx = f(\xi) \int_a^b g(x)\, dx\,.$$

*این قضیه به **قضیه‌ی مقدار میانگین وزن‌دار برای انتگرال‌ها** معروف است.*

برهان. به مرجع [۱۷] مراجعه شود. □

تعریف ۹.۱.۱. حاصل‌ضرب داخلی دو تابع f و g نسبت به تابع وزن $w(x) \geq 0$ در بازه‌ی $[a,b]$ به صورت زیر تعریف می‌شود (با این فرض که انتگرال وجود داشته باشد).

$$(f,g)_w = \int_a^b f(x)\, g(x)\, w(x)\, dx.$$

[5] Generalized Rolle's Theorem

تعریف ۱.۱.۱۰. هرگاه حاصل‌ضرب داخلی دو تابع نسبت به تابع وزن $w(x)$ برابر صفر باشد در این صورت دو تابع را عمود بر هم یا **متعامد**[۶] گویند. اگر $w(x) = ۱$ باشد، f و g را **متعامد ساده**[۷] گویند.

تذکر ۱.۱.۱۱. تابع وزن نامنفی $w(x)$ بر بازه‌ی (a,b) باید دارای ویژگی‌های زیر باشد

$$\int_a^b |x|^n w(x)\,dx < \infty, \quad \forall n \geq ۰ \qquad (۱$$

$$\int_a^b v(x)w(x)\,dx = ۰ \iff v(x) = ۰, \quad \forall x \in (a,b) \qquad (۲$$

که v تابعی نامنفی و پیوسته است.

قضیه ۱.۱.۱۲. *اگر تابع f بر بازه‌ی $[a,b]$ پیوسته باشد، آنگاه دنباله‌ای از چندجمله‌ای‌ها مانند $\{P_k(x)\}_{k=۰}^{\infty}$ موجود است به طوری که به‌طور یکنواخت روی بازه‌ی $[a,b]$ به تابع f همگراست، به عبارتی دیگر*

$$\forall x \in [a,b] \ \ , \ \ \exists N \in \mathbb{N} \ \ , \ \ \forall n \geq N,$$

$$s.t \quad \forall n \in [a,b] \quad , \quad |P_n(x) - f(x)| < \epsilon.$$

قضیه‌ی فوق را **قضیه‌ی وایرشتراس** [۸] گویند.

برهان. به مرجع [۱۸] رجوع شود. □

تعریف ۱.۱.۱۳. فرض کنید l خم هموار و $\phi(t)$ تابع تعریف شده روی l باشد. دراین‌صورت $\phi(t)$ در **شرط هولدر**[۹] صدق می‌کند هرگاه به ازای هر دو نقطه‌ی دلخواه $t_۱$ و $t_۲$، داشته باشیم

$$|\phi(t_۲) - \phi(t_۱)| \leq k|t_۲ - t_۱|^{\lambda}.$$

---

[۶] Orthognal

[۷] Simple orthognal

[۸] Weierstrass theorem

[۹] Holder's condition

به طوری که k و λ اعداد مثبت هستند و به ترتیب ثابت هولدر و شاخص هولدر نامیده می‌شود. حالت خاص شرط هولدر که به ازای $\lambda = ۱$ حاصل می‌شود، به شرط لیپ‌شیتس معروف است[۱۴].

۲.۱ پیدایش معادلات انتگرال

مدل‌سازی پدیده‌ها در علوم طبیعی، اقتصادی و اجتماعی با استفاده از قوانین حاکم بر آنها منجر به معادلات ریاضی می‌شود. معادلات انتگرال یکی از ابزارهای مهم در ریاضیات کاربردی و محض است. این نوع معادلات، در مدل‌سازی بسیاری از پدیده‌های غیرخطی، فیزیکی، علوم مهندسی و ... ظاهر می‌شوند. مدل‌سازی و تجزیه و تحلیل برخی از مسائل فیزیکی و مکانیکی برگرفته از طبیعت و محیط آزمایشگاهی به طور ذاتی منجر به یک معادله‌ی انتگرالی می‌شود. به عنوان مثال مسائل وراثت مسئله‌ای از این نوع است زیرا بیان سیستم $u(t)$ در لحظه‌ی t به طور پیوسته وابسته به تمام حالت‌های قبلی $u(t-\tau)$ در زمان‌های $t-\tau$ است. لذا نمایش ریاضی آن به طور ذاتی به شکل یک معادله است. مسئله‌ی رشد جمعیت، محاسبه‌ی جریان در یک مدار الکتریکی شامل یک منبع ولتاژ خازن، مقاومت الکتریکی و ... مسائلی از این قبیل هستند.

۳.۱ تاریخچه‌ی معادلات انتگرال

اولین فردی که عنوان معادلات انتگرال را برای معادلاتی که تابع مجهول زیر علامت انتگرال ظاهر می‌شد مطرح کرد، بویس ریموند بود. در سال ۱۷۸۲ لاپلاس معادله‌ی انتگرال برای تابع f به صورت $f(t) = \int_0^\infty e^{-ts} f(s)\, ds$ ارائه کرد. پس از وی در سال ۱۸۱۱ فوریه در معادلات خود بر روی نظریه‌ی حرارت به نوعی از این معادلات برخورد کرد. لذا معمولاً بیان می‌شود که مبداء معادلات انتگرال به انتگرال فوریه بر می‌گردد. سپس در سال ۱۸۲۳ آبل نیز در حل مسائل مکانیکی با این نوع معادلات روبرو شد. البته افراد دیگری از جمله پواسون، لیوویل، پوانکاره و فردهلم نیز در این زمینه تلاش‌های مهمی انجام دادند.

سرانجام ولترا اولین کسی بود که در قرن نوزدهم نظریه‌ی معادلات انتگرال را ارائه کرد. در

اوایل نیمه‌ی دوم قرن بیستم تحقیقات بسیاری برای شرایط وجود جواب معادله‌ی انتگرال توسط هرمن ویل صورت گرفت.

۴.۱ معادله‌ی انتگرال

معادله‌ی انتگرال، معادله‌ای است که در آن تابع مجهول $u(x)$ زیر علامت انتگرال قرار دارد. شکل کلی یک معادله‌ی انتگرال خطی که در آن $u(x)$ تابع مجهولی است که باید معلوم شود، به صورت زیر است

$$g(x)\,u(x) = f(x) + \lambda \int_{\Omega} K(x,t)\,u(t)\,dt.$$

$K(x,t)$ هسته‌ی معادله‌ی انتگرال نامیده می‌شود. هسته‌ی معادله و توابع $f(x)$ و $u(x)$ از قبل معلوم‌اند. λ پارامتری است حقیقی یا مختلط، که در حالت خاص می‌تواند یک باشد و Ω بازه‌ی انتگرال‌گیری است. اگر تابع مجهول $u(t)$ زیر علامت انتگرال خطی باشد یعنی توان یک داشته باشد، معادله‌ی انتگرال را خطی می‌گویند، مانند معادله‌ی انتگرال بالا. اما اگر تابع $u(t)$ به صورت غیرخطی ظاهر شود، آنگاه معادله‌ی انتگرال را غیرخطی می‌گویند.

۵.۱ دسته‌بندی معادلات انتگرال خطی

متداول‌ترین معادلات انتگرال خطی را می‌توان به دو گروه معادلات خطی فردهلم و معادلات خطی ولترا دسته‌بندی نمود. اکنون تعاریف و خواص عمده‌ی سه نوع معادلات انتگرال خطی زیر را بررسی می‌کنیم

(۱) معادلات انتگرال فردهلم

(۲) معادلات انتگرال ولترا

(۳) معادلات انتگرال منفرد[۱۰]

[۱۰] Singular integral equation (SIE)

۱.۵.۱ معادلات انتگرال خطی فردهلم

شکل استاندارد معادلات انتگرال خطی فردهلم که در آنها حدود انتگرال‌گیری با اعداد ثابت a و b به صورت زیر می‌باشد

$$\phi(x)\, u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)u(t)\, dt \quad s.t \quad a \leq x \ , \ t \leq b$$

اگر در این معادله‌ی انتگرال $\phi(x) = 0$ باشد، معادله‌ی انتگرال فردهلم نوع اول و اگر $\phi(x) = 1$ باشد، معادله‌ی انتگرال فردهلم نوع دوم می‌نامند.

۲.۵.۱ معادلات انتگرال خطی ولترا

معادلات انتگرالی هستند که در آنها حداقل یکی از حدود انتگرال‌گیری به جای اینکه اعدادی ثابت باشند به صورت تابعی از x ظاهر می‌شود. و شکل کلی آنها به صورت زیر می‌باشد

$$\phi(x)\, u(x) = f(x) + \lambda \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} K(x,t)u(t)\, dt.$$

در اینجا هم اگر $\phi(x) = 0$ باشد، معادله‌ی انتگرال ولترای نوع اول و اگر $\phi(x) = 1$ باشد، معادله‌ی انتگرال ولترای نوع اول می‌نامند.

۳.۵.۱ معادلات انتگرال منفرد

معادله‌ی انتگرال را منفرد گویند اگر حداقل یکی از حدود انتگرال‌گیری نامتناهی باشد یا اینکه هسته‌ی آن در نقطه یا نقاطی از بازه‌ی انتگرال‌گیری نامتناهی گردد. مانند

$$f(x) = \int_0^x \frac{u(t)}{\sqrt{x-t}}\, dt, \quad u(x) = f(x) \ + \ \int_0^\infty (x-t)\, u(t)\, dt.$$

۶.۱ انتگرال‌های مجازی (ناسره)

رفتار $\int_a^b f(x)\,dx$ را وقتی $b \to \infty$ مفهوم انتگرال نامتناهی (که انتگرال مجازی نوع اول خوانده می‌شود) را تداعی می‌کند که آن را با علامت $\int_a^\infty f(x)\,dx$ نشان می‌دهند. یک تعمیم دیگر این طور بدست می‌آید که بازه‌ی $[a,b]$ را متناهی گرفته و f را در یک یا چند نقطه بی‌کران فرض کنیم. این انتگرال‌ها را که با فرآیند حدی مناسبی بدست می‌آیند، انتگرال مجازی نوع دوم می‌نامند. اگر $f(x)$ یک تابع کران‌دار و انتگرال‌پذیر روی بازه‌ای به صورت $[a,x]$ باشد که a یک عدد ثابت و x یک متغیر بزرگتر از a باشد، انتگرال $\int_a^\infty f(y)\,dy$ به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\int_a^\infty f(y)\,dy = \lim_{x\to\infty}\int_a^x f(y)\,dy = \lim_{x\to\infty}(F(x)-F(a)).$$

که در آن F تابع اولیه‌ی f است. اگر حد فوق کران‌دار باشد انتگرال را همگرا گویند، در غیر این‌صورت واگراست.

تعریف ۱.۶.۱. منظور از **انتگرال‌گیری عددی**[۱۱] محاسبه‌ی تقریبی انتگرالی به صورت $\int_a^b f(x)dx$ با عبارتی به صورت $\sum_{k=0}^{n} w_k\, f(x_k)$ است که در آن $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ افرازی از بازه‌ی $[a,b]$ می‌باشد. مقادیر $\{x_k\}_{k=0}^n$ را گره‌های انتگرال‌گیری و $\{w_k\}_{k=0}^n$ را وزن‌های انتگرال‌گیری می‌نامند. وزن‌ها و گره‌ها به نحوی تعیین می‌شوند که عبارت $\sum_{k=0}^{n} w_k\, f(x_k)$ تقریب معقولی از $\int_a^b f(x)\,dx$ را بدست دهد.

[۱۱] Quadrature

۷.۱ چندجمله‌ای های مهم

در این بخش به معرفی چندجمله‌ای های تیلور[۱۲]، لژاندر[۱۳]، ژاکوبی[۱۴] و چبیشف[۱۵] می‌پردازیم که شامل مفاهیم و تعاریف اولیه می‌باشند.

۱.۷.۱ چندجمله‌ای‌های تیلور

فرض کنید تابع f در نقطه‌ی $x=\alpha$ تا مرتبه‌ی n دارای مشتق باشد، در این صورت فقط یک چندجمله‌ای مانند P از درجه‌ی حداکثر n وجود دارد که در $n+۱$ شرط زیر صدق می‌کند

$$P(\alpha)=f(\alpha) \quad , \quad P'(\alpha)=f'(\alpha),...,P^{(n)}(\alpha)=f^{(n)}(\alpha).$$

پس می‌توان نوشت

$$P(x)=\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(\alpha)}{k!}\,(x-\alpha)^k.$$

این چندجمله‌ای‌ها را به افتخار ریاضیدان بزرگ انگلیسی، بروک تیلور[۱۶]، چندجمله‌ای‌های تیلور می‌نامند.

واضح است که درجه‌ی P مساوی n است اگر و تنها اگر $f^{(n)}(\alpha)\neq 0$. در تقریب تابع f به وسیله‌ی چندجمله‌ای تیلور آن در نقطه‌ی α ، خطای درونیابی یا دستور باقیمانده در بسط تیلور را به صورت $E_n(x)=f(x)-P(x)$ نمایش می‌دهیم. لذا اگر تابع f در نقطه‌ی $x=\alpha$ دارای مشتق تا مرتبه‌ی n باشد، می‌توان نوشت

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(\alpha)}{k!}\,(x-\alpha)^k \;+\; E_n(x).$$

قضیه ۱.۷.۱. *فرض کنید $f\in C[a,b]$ و $n+۱$ بار مشتق‌پذیر در بازه‌ی (a,b) باشد. همچنین فرض کنید x_0 ، x_1 ،...، x_n ، $n+۱$ نقطه‌ی متمایز در بازه‌ی $[a,b]$ باشد. اگر $P_n(x)$ چندجمله‌ای*

[۱۲] Taylor

[۱۳] Legendre

[۱۴] Jacobi

[۱۵] Chebyshev

[۱۶] Brook Taylor

باشد به‌طوری که

$$P_n(x_i) = f(x_i) \quad , \quad i = 0, 1, ..., n$$

*آنگاه برای هر $x \in [a, b]$، $\xi \in (a, b)$ **موجود است به طوری که***

$$E_n(x) = f(x) - P_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} W(x).$$

که در آن $W(x) = \prod_{i=0}^{n} (x - x_i)$.

برهان. به مرجع [۱۸] رجوع شود. □

نتیجه ۲.۷.۱. *فرض کنید $max_{x \in [a,b]} \left| f^{(n+1)}(x) \right| = M_{n+1}$ باشد. دراین صورت*

$$|f(x) - P_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} |W(x)| \, , \quad \forall x \in [a, b]$$

و

$$max_{x \in [a,b]} |f(x) - P_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} max_{x \in [a,b]} |W(x)|.$$

قضیه ۳.۷.۱. *اگر $f \in C^{n+1}[a, b]$، آنگاه براي هرنقطه‌ی x و c در $[a, b]$ داریم:*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(c)}{k!} (x - c)^k + R_n(x),$$

$$R_n(x) = \frac{1}{n!} \int_c^x f^{(n+1)}(t)(x - t)^n \, dt.$$

*این قضیه به **قضیه‌ی تیلور با باقیمانده‌ی انتگرال** معروف است.*

برهان. رجوع شود به مرجع [۲] رجوع شود. □

۲.۷.۱ چندجمله‌ای‌های لژاندر

چندجمله‌ای‌های لژاندر جواب معادله‌ی دیفرانسیل معمولی زیر، موسوم به معادله‌ی دیفرانسیل لژاندر هستند

$$(1 - x^2)P_n''(x) - 2xP_n'(x) + n(n+1)P_n(x) = 0$$

همچنین چندجمله‌ای‌های لژاندر را می‌توان با فرمول زیر که به فرمول رودریگز [۱۷] مشهور است، به‌دست آورد.

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n (x^2 - 1)^n}{dx^n}$$

اولین چند جمله‌ای‌های لژاندر به صورت زیر می‌باشند

$$P_0(x) = 1 \ \ , \ \ P_1(x) = x \ \ , \ \ P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1) \ \ , \ \ P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x) \ \ , \ldots$$

همه‌ی این چندجمله‌ای‌ها در بازه‌ی $[-1, 1]$ نسبت به تابع وزن $w(x) = 1$ متعامدند، یعنی اگر $(m \neq n)$، آنگاه

$$\int_{-1}^{1} P_m(x)\, P_n(x)\, dx = 0.$$

۳.۷.۱ چندجمله‌ای‌های ژاکوبی

چندجمله‌ای‌هایی که در بازه‌ی $(-1, 1)$ نسبت به تابع وزن زیر متعامد باشند به چندجمله‌ای‌های ژاکوبی معروف هستند

$$w = (1 - x)^{\alpha}(1 + x)^{\beta}, \ \ \alpha, \beta > -1.$$

چندجمله‌ای‌های لژاندر دسته‌ی خاصی از چندجمله‌ای‌های ژاکوبی به ازای $\alpha = \beta = 0$ هستند.

انتگرال‌گیری گاوس-ژاکوبی [۱۸] می‌تواند برای تقریب انتگرال‌های به شکل

$$\int_{-1}^{1} f(x)\, (1 - x)^{\alpha}(1 + x)^{\beta}\, dx \ , \quad \alpha, \beta > -1$$

مورد استفاده قرار گیرد که در آن $f(x)$ روی بازه‌ی $[-1, 1]$ یک تابع هموار است.

۴.۷.۱ چندجمله‌ای‌های چبیشف

قدیمی‌ترین چندجمله‌ای‌های متعامد، چندجمله‌ای‌های چبیشف هستند. این نوع از چندجمله‌ای‌ها نخستین بار توسط ریاضی‌دان بزرگ بنام چبیشف ارائه شد.

[۱۷] Rodrigues

[۱۸] Gauss-Jacobi quadrature