بسم الله الرحمن الرحيم

١٥٢٥٥٣

QA
۹۰۲
۸۶/۱۱/۱۴

دانشگاه پیام‌نور
دانشکده علوم پایه
گروه ریاضی

زیر مدول‌های اول و اولیه از مدول‌های خاص

پایان نامه
برای دریافت درجه کارشناسی ارشد
در رشته ریاضی

توسط
سید حسین همت‌پور

استاد راهنما
دکتر احمد خاکساری

۱۳۸۷/۲/۱۱

بهمن ۱۳۸۵

۱۰۴۰۰۲

صورت جلسه دفاع از پایان‌نامه

پایان نامه تحت عنوان: **زیرمدول‌های اول و اولیه از مدول‌های خاص**

که توسط **سید حسین همت‌پور** دانشجوی دوره کارشناسی ارشد رشته ریاضی مرکز شیراز تهیه و به هیأت داوران ارائه گردیده است، مورد تأیید می‌باشد.

تاریخ دفاع: ۱۳۸۵/۱۱/۱۸ نمره: ۱۷/۷۵ درجه ارزشیابی: عالی

اعضای هیأت داوران:

نام و نام خانوادگی	هیأت داوران	مرتبه علمی	امضاء
۱– احمد خاکساری	استاد راهنما	استادیار	
۲– دکتر فریبا ارشاد	داور	استادیار	ارشاد
۳– دکتر نرگس عباسی	نماینده دانشگاه	استادیار	

۱۳۸۷/ ۲/ ۱۱

تقدیم به:

همسرم،

و فرزندانم احسان و علی

سپاسگزاری

ای معلم خفتگان جهل بیمار تواند

تو مسیحایی علاج این همه بیمار کن

ابتدا خود لازم می‌دانم که: از استاد ارجمند و بزرگوارم جناب آقای دکتر احمد خاکساری که در تمام این دوره با ارشادات و رهنمودهای دلسوزانه خود، سنگ تمام گذاشتند، صمیمانه تقدیر و تشکر نمایم. و از ایزد منان خواهانم که این استاد محترم و توانمند که قدم به قدم ما را یاری فرمودند و زحمات زیادی را در نگارش این پایان‌نامه متحمل گردیدند، طول عمر با عزت و سربلندی عطا فرماید تا هدایتگر نسل آینده گردد.

مقدمه:

او خداوندی است که موجودات را آفرید، بدون این که از هیچ نمونه آماده و پیش ساخته‌ای ایده بگیرید و از کار خالق دیگری که پیش از وی جهانی را آفریده باشد، تقلید کند.

آثار صنع و نشانه‌های حکمتش در نوآوری بی‌سابقه و خلقت بی‌نظیرش هویداست.

بنابراین، هر یک از موجوداتی که خدا آفریده برهان آفریدگاری و دلیل خداوندی اوست؛ حتی اگر آن موجود، جامد و بی‌زبان باشد.

چرا که آن هم با زبان بی‌زبانی خالق خود را معرفی می‌کند و تدبیر خدا را باز می‌گوید. بدون این که به سخن گفتن نیازی داشته باشد.

همه این کارها بدان جهت بود که هیچ یک از مخلوقات از محدوده و چهارچوب تعیین شده از جانب خداوند تجاوز نکند و برای رسیدن به مقصد مورد نظر و کمال نهایی کوتاهی ننماید و اگر خداوند به او دستوری داد، انجام دادنش بر وی دشوار نباشد و سرکشی نکند.

(بخشی از خطبه ۹۰ نهج‌البلاغه امام علی (ع))

مقدمه‌ای برآموختن علم

علم ماجرای تمام بشریت است، برای آموختن، برای زیستن در جهان و شاید برای دوست داشتن آن، برای آنکه جزئی از این ماجرا باشیم، باید بفهمیم، خود را درک کنیم، به این احساس نزدیک شویم، که در آن آدمی ظرفیتی است بسیار بیشتر از آنچه تاکنون حس کرده است، ظرفیتی از امکانات انسانی به وسعت نامتناهی ...

پیشنهاد من این است که علم را در هر سطح از پایینترین تا بالاترین آن به طریقی بشر دوستانه بیاموزیم، با نوعی فهم فلسفی، فهمی اجتماعی و فهمی انسانی از سرگذشت و گوهر کسانی که این بنا را ساخته‌اند، با پیروزیها، تلاشها و شکستهایی که داشته‌اند، بیاموزیم.

(ریزاکسارابی: برنده جایره نوبل در فیزیک)

یکی از سؤالاتی که معمولاً خیلی از دانش‌آموزان و دانشجویان در پایه‌های مختلف تحصیلی از معلمین و استادان خود می‌پرسند. این است که ریاضی چه استفاده‌های (کاربردی) برای ما دارد؟

برای پاسخ به این سؤال شاید مطالب زیر بتواند کمک خوبی به ما بنماید و راهنمای مناسبی باشد.

بشر در آغاز، شمارش را به یاری اندام بدن خود انجام می‌داد، و نام همین اندام‌ها را روی عدد می‌گذاشتند:

انگشت نماینده ۱، دست نماینده‌ی ۵، دو دست نماینده‌های ۱۰ و آدم نماینده‌ی ۲۰ بود.

از جمله کاربردها:

۱– شمارش‌ها و محاسبات روزمره مالی.

۲– اندازه‌گیری طول‌ها و فاصله‌ها و ارتفاع‌ها.

۳– زاویه و کشاورزی: کشاورزان بر اثر تجربه دریافته‌اند که خیش (وسیله شخم زدن) باید زاویه‌دار با زمین برخورد کند یا بیل باید زاویه‌دار با زمین برخورد کند تا مؤثر باشد.

اگر زاویه شخم‌زدن و زاویه بیل زدن با سطح زمین حاده نباشد منظور را برآورده نمی‌کند.

۴– زمان آشپزی.

۵– زاویه و هواپیما.

۶– پیش‌بینی اخترشناسی.

۷– نقش زاویه در پره‌های توربین و آسیاب بادی.

۸– کاربرد در فیزیک:

ماکسول فیزیکدانان انگلیسی، قانون نوسان‌های اکترومغناطیسی را به یاری معادله‌های ریاضی بیان کرد او با روش خاص ریاضی نتیجه گرفت و ثابت کرد که موج‌های الکترومغناطیسی با سرعتی نزدیک به سرعت نور منتشر می‌شوند.

۹– کاربرد در پرتاب و هدایت موشک‌ها ماهواره‌ها:

به کمک معادله‌های دقیق ریاضی است که ماهواره‌ها را در مدار زمین قرار می‌دهند و یا به کرات دیگر می‌فرستند.

پرتاب موشک‌ها و حرکت آنها در طول مسیر به کمک معادله‌های ریاضی انجام می‌گیرد.

پرتاب موشک‌های جنگی از یک نقطه و برخورد آن به نقطه هدف به کمک حرکت بر روی مسیر دقیق سهمی‌گونه صورت می‌گیرد.

۱۰– کاربرد در صنعت ساختمان‌سازی و سازه‌های فلزی و بتونی و تونل‌ها:

برآورد میزان با رومیزان تحمل باردریک سازه فلزی (ساختمانها) و یا یک ساز، بتونی (پل‌ها) به وسیله معادلات ریاضی انجام می‌گیرد. ساخت تونل‌های در مسیر جاده‌ها به شکل قوسی و تقریباً سهمی‌گونه بر اساس محاسبات دقیق ریاضی است که تحمل بتونی تونل را چند برابر افزایش می‌دهد.

۱۱– سدها:

ساخت سدها به شکل قوسی، به کمک محاسبات ریاضی است که صورت می‌گیرد تا در تحمل دیواره سد در مقابل فشار وارده از طرف آب پشت آن بیشتر شده و بخشی از این فشار، دیواره‌های کنار سد متصل می‌گردد.

هزاران کاربرد دیگر اما گاهی در ریاضیات عالی شاخه محض باز به این فکر می‌افتم که این ریاضیات چه کاربردی دارد آیا می‌شود از لم پنج کوتاه جایی استفاده کرد و یا می‌شود از قضیه در مسائل رسته‌ها استفاده‌ای برد صدها شاید دیگر که ممکن است در ذهن برای همه‌ی دانشجویان و حتی استادان محترم مطرح گردد.

فهرست

نام خانوادگی دانشجو: همت‌پور نام: سیدحسین

عنوان پایان نامه: **زیرمدول‌های اول و اولیه از مدول‌های خاص**

استاد راهنما: **آقای دکتر احمد خاکساری**

مقطع تحصیلی : کارشناسی ارشد رشته : ریاضی گرایش : محض (جبر)

دانشگاه : پیام نور—مرکز شیراز دانشکده: علوم پایه

تاریخ فارغ التحصیلی : ۱۳۸۵/۱۱/۱۸ تعداد صفحه : ۶۹

چکیده:

در فصل اول مفاهیمی، مانند ایده‌آل، ایده‌آل اول و ایده‌آل ماکسیمال و اینکه ایده‌آل m ماکسیمال است اگر و تنها اگر $\frac{A}{m}$ میدان باشد را بررسی نموده‌ایم.

در فصل دوم زیرمدول‌های اول و ماکسیمال و اینکه اگر N یک زیرمدول ماکسیمال از A_مدول M باشد آنگاه N یک زیرمدول اول از M می‌باشد.

در فصل سوم زیرمدول‌های اول از A^n و مفهوم ایده‌آل قدر را بررسی نموده‌ایم.

در فصل چهارم، حالت خاص ارتفاع از زیرمدول‌های اول را در فضای $A^۲$ بررسی می‌کنیم و اینکه اگر $N = A(a,b) + A(c,d)$ زیرمدولی از M باشد پس M دوری است اگر و تنها اگر $\Delta = ۰$ باشد.

و در فصل ۵، تجزیه اولیه در A^n و اینکه اگر A حلقه تعویض‌پذیر یکداری بوده و B یک A_مدول باشد که در شرط زنجیر افزایشی بر زیرمدول‌ها صدق می‌کند. در این صورت هر زیرمدول $D(\neq B)$ یک تجزیه ابتدایی دارد.

یا هر زیرمدول یک مدول نوتری تجزیه ابتدایی دارد.

فصل ۱

ایده‌آل‌های اول و ماکسیمال

۱ ایده‌آل‌های اول و ماکسیمال

۱.۱

تعریف ۱.۱.۱: عمل دوتایی قاعده‌ای است که به هر زوج مرتب از اعضای مجموعه عضوی را منسوب می‌کند.

هنگام تعریف عمل دوتایی مانند $*$ در یک مجموعهٔ S باید مطمئن باشیم که:

۱– به هر زوج ممکن از اعضای S دقیقاً یک عضو منسوب شود.

۲– عضوی که به هر زوج مرتب از اعضای S منسوب می‌شود خود در S باشد.

مثال ۲.۱.۱: در Q^+، $*$ را با ضابطهٔ $a * b = \frac{a}{b}$ تعریف می‌کنیم در این صورت $*$ تعریف شده روی Q^+ در هر دو شرط داده شده صدق می‌کند.

تعریف ۳.۱.۱: گروه: گروه $(G, *)$ عبارت است از یک مجموعه G همراه با عمل دوتایی $*$ در G به طوری که اصول زیر برقرار باشند.

الف) عمل دوتایی $*$ شرکت‌پذیر باشد $(a * b) * c = a * (b * c)$،

ب) عضوی چون e در G وجود داشته باشد به قسمی که برای هر x از G، $e * x = x * e = x$.

تذکر ۴.۱.۱: عضو e را عضو همانی G نسبت به عمل $*$ می‌نامیم.

ج) برای هر a از G عضوی چون a' از G وجود دارد به طوری که $a' * a = a * a' = e$

تذکر ۵.۱.۱: عضو a' را وارون a نسبت به عمل $*$ می‌نامند.

تعریف ۶.۱.۱: گروه آبلی: گروه G آبلی است در صورتی که عمل دوتایی $*$ آن تعویض‌پذیر باشد $a * b = b * a$

تعریف ۷.۱.۱: حلقه: مجموعه‌ای است همراه دو عمل (جمع و ضرب) به طوری که

الف) $(A, +)$ یک گروه آبلی باشد.

ب) A نسبت به عمل ضرب شرکت‌پذیر باشد

$$a(bc) = (ab)c$$

ج) A نسبت به عمل‌های ضرب روی جمع پخش‌پذیر (توزیع‌پذیر) باشد یعنی $(a+b)c = ac + bc$ و $a(b+c) = ab + ac$

تعریف ۸.۱.۱: حلقه تعویض‌پذیر:

اگر در یک حلقه به ازای هر $x, y \in A$ داشته باشیم $xy = yx$ یعنی نسبت به عمل ضرب خاصیت جابجایی داشته باشد، آنگاه A را حلقه تعویض‌پذیر می‌نامیم.

تعریف ۹.۱.۱: حلقهٔ یکدار:

هر گاه یک حلقه نسبت به عمل ضرب عضو خنثی داشته باشد گوییم حلقه یکدار است و یک حلقه را معمولاً با ۱ نمایش می‌دهند.

تذکر ۱۰.۱.۱: همانی حلقه را معمولاً با ۱ نمایش می‌دهند جز در حلقه‌ای که فقط یک عضو بنام صفر دارد در این حالت داریم: $۱ = ۰$.

تعریف ۱۱.۱.۱: حلقه صفر

حلقه‌ای که فقط عضو ۰ را داشته باشد.

تعریف ۱۲.۱.۱: زیر حلقه

زیرمجموعه S از حلقه A یک زیرحلقهٔ A است اگر در شرایط زیر صدق کند:

الف) $\forall a, b \in S, a - b \in S$،

ب) $\forall a, b \in S, ab \in S$.

تعریف ۱۳.۱.۱: ایده‌آل

فرض کنیم A حلقه‌ای تعویض‌پذیر باشد. زیرمجموعهٔ I از A را ایده‌آل می‌نامیم اگر شرط‌های زیر برقرار باشند

الف) $I \neq \emptyset$

ب) $\forall x, y \in I \Longrightarrow x - y \in I$

ج) هر گاه $x \in A$ و $y \in I$ آنگاه $xy \in I$ یعنی $IA \subseteq I$

تذکر ۱۴.۱.۱: در اینجا حلقه جابجایی یکدار است.

نکته ۱۵.۱.۱: هر ایده‌آل حلقهٔ تعویض‌پذیر یکدار A تحت جمع بسته است

$$\forall x, y \in I \Longrightarrow x + y \in I$$

تعریف ۱۶.۱.۱: مقسوم‌علیه صفر

یک مقسوم‌علیه صفر از یک حلقه عضوی مانند x است که صفر را می‌شمارد یعنی عضوی مانند $y \neq 0$ در A وجود داشته باشد به طوری که $xy = 0$.

مثال ۱۷.۱.۱: در $\mathbb{Z}_6$، $\bar{2} \neq 0$ و $\bar{3} \neq 0$ اما $\bar{2}.\bar{3} = 0$.

تعریف ۱۸.۱.۱: A یک حلقه بدون مقسوم‌علیه صفر است ($1 \neq 0$) در صورتی که اگر داشته باشیم $xy = 0$ آنگاه $x = 0$ یا $y = 0$ باشد.

تعریف ۱.۱.۱۹: حوزهٔ صحیح

یک حلقه جابجایی یکدار حوزهٔ صحیح می‌نامند اگر مقسوم‌علیه صفر نداشته باشد.

مثال ۱.۱.۲۰: حلقه $\mathbb{Z}$ (اعداد صحیح) یک دامنه صحیح است.

تعریف ۱.۱.۲۱: یکال (unit)

فرض A حلقه‌ای یکدار باشد، عضو a از A یک یکال (unit) A است در صورتی که در A معکوس ضربی داشته باشد.

تعریف ۱.۱.۲۲: ایده‌آل اصلی

مضرب‌های عضو $x \in A$ تشکیل ایده‌آلی می‌دهد که به آن ایده‌آل اصلی تولید شده توسط x گوییم و با (x) یا Ax نمایش داده می‌شود و داریم:

$$Ax = (x) = \{ax | a \in A\}$$

تعریف ۱.۱.۲۳: میدان

حلقه جابجایی یکداری که هر عضو مخالف صفر آن دارای وارون باشد را یک میدان گویند.

تعریف ۱.۱.۲۴: ایده‌آل اول

ایده‌آل مانند p در A اول گوییم اگر $p \neq A$ و برای هر $x, y \in A$ اگر $xy \in p$ آنگاه $x \in p$ یا $y \in p$.

تعریف ۱.۱.۲۵: ایده‌آل ماکسیمال

ایده‌آل m از حلقه A را ماکسیمال می‌نامند. در صورتی که $m \neq A$ و به ازای هر ایده‌آل a از A. اگر $m \subseteq a$ آنگاه $a = A$ یا $m = a$.

قضیه ۱.۱.۲۶: ایده‌آل p از A اول است اگر و تنها اگر $\frac{A}{p}$ یک حوزهٔ صحیح باشد.

اثبات: فرض می‌کنیم p یک ایده‌آل اول از A باشد و $(x+p)(y+p)=p$ بنابراین $xy+p=p$ لذا $xy\in p$ و بنابر فرض $x\in p$ یا $y\in p$ که این نتیجه می‌دهد $x+p=p$ یا $y+p=p$.

برعکس، فرض می‌کنیم $\frac{A}{p}$ یک حوزه صحیح باشد و $xy\in p$ بنابراین داریم

$$xy+p=p \Longrightarrow (x+p)(y+p)=p \Longrightarrow x+p=p \text{ یا }$$

$$y+p=p \Longrightarrow x\in p \text{ یا } y\in p$$

■

علامت‌گذاری ۲۷.۱.۱:

مجموعهٔ ایده‌آل‌های اول حلقه A را با علامت $Spec(A)$ نمایش می‌دهیم.

قضیه ۲۸.۱.۱: ایده‌آل m از A ماکسیمال است اگر و تنها اگر $\frac{A}{m}$ میدان باشد

اثبات: فرض کنید m یک ایده‌آل ماکسیمال از حلقهٔ A باشد از اینکه بین ایده‌آل‌های $\frac{A}{m}$ و ایده‌آل‌های A که شامل m است تناظر یک به یکی برقرار است.

لذا تنها ایده‌آل‌های $\frac{A}{m}$ صفر و خود $\frac{A}{m}$ است. بنابراین $\frac{A}{m}$ یک میدان است.

برعکس، اگر $\frac{A}{m}$ میدان باشد و a یک ایده‌آل به طوری که $m\subseteq a$ در این صورت $\frac{a}{m}$ یک ایده‌آل $\frac{A}{m}$ است.

بنابراین $a=A$ یا $a=m$ لذا m ایده‌آل ماکسیمال A است.

قضیه ۲۹.۱.۱: هر ایده‌آل ماکسیمال m از حلقه A اول است.

اثبات: از اینکه $\frac{A}{m}$ میدان است. در نتیجه حوزهٔ صحیح می‌باشد بنابراین m یک ایده‌آل اول از A می‌باشد. ■

نکته ۳۰.۱.۱: عکس قضیه فوق همواره برقرار نمی‌باشد. زیرا ایده‌آل صفر در حلقهٔ اعداد صحیح $\mathbb{Z}$ اول است ولی ماکسیمال نیست.

تعریف ۳۱.۱.۱: دامنه ایده‌آل اصلی

یک دامنه ایده‌آل اصلی حوزه صحیحی است که هر ایده‌آل آن اصلی باشد.

قضیه ۳۲.۱.۱: در یک حلقه جابجایی یکدار A، تنها عنصر خودتوان در $J(A)$ عنصر $\circ$ است.

اثبات: فرض $x \in J(A)$ و $x^{\text{۲}} = x$ می‌دانیم $\text{۱} - rx$ برای هر $r \in A$ وارون‌پذیر است. پس اگر $r = \text{۱}$ آنگاه $\text{۱} - x$ در A وارون‌پذیر است لذا $(\text{۱} - x)t = \text{۱}$ که در آن $t \in A$ بنابراین

$$x = x(\text{۱} - x)t = (x - x^{\text{۲}})t = \circ \Longrightarrow x = \circ$$

■

تعریف ۳۳.۱.۱: رادیکال

فرض کنید A حلقه‌ای تعویض‌پذیر و یکدار و a ایده‌آل A باشد در این صورت:

$rad(a) = \sqrt{a} = \{x \in A | x^n \in a$ وجود داشته باشد که $n \in N\}$

قضیه ۳۴.۱.۱: اگر a ایده‌آل A باشد آنگاه $\sqrt{a}$ ایده‌آلی از A شامل a است.

اثبات: بدیهی است.

قضیه ۳۵.۱.۱: فرض کنید $\sum$ مجموعه‌ای از ایده‌آل‌های A مانند a باشد که p یک عضو ماکسیمال از $\sum$ باشد نشان می‌دهیم که p اول است. $\sum$ مجموعه‌ای از ایده‌آل‌های a با این شرط می‌باشد که $\forall n > \circ \Longrightarrow f^n \notin a$.

اثبات: هر گاه $x, y \notin p$ پس ایده‌آل‌های $p + (x)$ و $p + (y)$ که اکیداً شامل p نیستند و بنابراین متعلق به $\sum$ نیستند لذا m و nای طبیعی وجود دارد که $f^n \in p + (y)$ و $f^m \in p + (x)$ می‌دانیم

$$f^{m+n} \in p + (xy) \Longrightarrow p + (xy) \notin \sum$$

لذا $xy \notin p$ بنابراین نتیجه می‌گیریم p ایده‌آلی اول است همچنین $f \notin p$. ■

نکته ۳۶.۱.۱: اگر I و J دو ایده‌آل باشند آنگاه IJ و $I+J$ و $I\cap J$ نیز همواره ایده‌آل هستند.

پرسش: در چه حالتی $IJ = I\cap J$

پاسخ: در حالتی که جمع دو ایده‌آل کل حلقه باشد یعنی $I+J=A$ آنگاه $IJ = I\cap J$ (این فقط یکی از حالات است).

تذکر ۳۷.۱.۱: در حالت کلی $IJ \subset I\cap J$

$$IJ = \{\sum_{k=۱}^{n} i_k j_k | i_k \in I,\ n\in N, j_k \in J\}$$

تعریف ۳۸.۱.۱: ایده‌آل خارج‌قسمتی

اگر a و b ایده‌آل‌هایی از حلقه A باشند ایده‌آل خارج‌قسمتی $(a:b)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$(a:b) = \{x\in A : xb \subseteq a\}$$

به ویژه $(۰:b) = \{x \in A : xb = ۰\}$ را پوچساز b می‌نامند و با نماد $Ann(b)$ نمایش می‌دهیم.

نکته ۳۹.۱.۱: اگر b ایده‌آل اصلی (x) باشد ایده‌آل خارج‌قسمتی $(a:b)$ را با نماد $(a:x)$ نمایش می‌دهند.

نکته ۴۰.۱.۱: $D = \bigcup_{x\neq ۰} Ann(x)$ (مجموعهٔ مقسوم‌علیه‌های صفر A را با D نمایش می‌دهیم)

$$D = r(D) = r(\bigcup_{x\neq ۰} Ann(x)) = \bigcup_{x\neq ۰} r(Ann(x))$$

قضیه ۴۱.۱.۱: فرض کنیم A یک حلقه جابجایی یکدار باشد به قسمی که برای هر x، $n > ۱$ وجود دارد که $x^n = x$ در این صورت هر ایده‌آل اول A یک ایده‌آل ماکسیمال است.

اثبات: فرض کنید p ایده‌آل اولی از A باشد به طوری که $p \subseteq m \subseteq A$ همچنین فرض کنید $p\neq m$ باشد پس $x\in m-p$ را در نظر بگیرید. در این صورت $n>۱$ وجود دارد به طوری که $x^n = x$ در نتیجه $x^n - x = ۰$ و بنابراین

$$x(x^{n-۱} - ۱) = ۰ \in p$$

اما می‌دانیم p یک ایده‌آل اول است و $x \notin p$ پس $x^{n-1} - 1 \in p \subseteq m$ لذا $x^{n-1} - 1 \in m$ و $x^{n-1} - 1 = t \in m$ و $x \in m$ بنابراین

$$x^{n-1} - t = 1$$

در نتیجه $m = A$ است و لذا p یک ایده‌آل ماکسیمال A است.

تعریف ۴۲.۱.۱: مدول

هرگاه A یک حلقه جابجایی یکدار باشد یک A_مدول یکانی گروه آبلی چون M می‌باشد (که عمل آن را با جمع نشان می‌دهیم) همراه با ضرب اسکالری به صورت $\circ : A \times M \longrightarrow M$ و $\circ : (a, x) \longrightarrow ax$ که دارای شرایط زیر باشد:

۱) $\mathcal{M} : A \times M \longrightarrow M \ \ \forall x, y \in M, a \in A \ \ a(x+y) = ax + ay$

۲) $\forall a, b \in A, x \in M \ \ (a+b)x = ax + bx$

۳) $\forall x \in M, \forall a, b \in A, \quad a(bx) = (ab)x$

۴) $\forall x \in M, 1x = x1 = x$.

۴۳.۱.۱: همریختی مدولی

هرگاه M، N، A_مدول باشند یک همریختی A_مدولی نگاشتی است مانند $f : M \longrightarrow N$ که شرایط زیر صدق می‌کند:

۱– برای هر $x, y \in M \quad f(x+y) = f(x) + f(y)$،

۲– برای هر $a \in A \quad f(ax) = af(x)$.

۴۴.۱.۱: اگر $f : M \longrightarrow N$ یک همریختی A_مدولی باشد هسته f را با نماد $\ker f$ نمایش داده و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\ker(f) = \{x \in M : f(x) = 0\} = f^{-1}(0)$$

$\ker(f)$ یک زیرمدول از M می‌باشد.

تصویر f، $f(M) = Imf$ است که زیرمدولی از N می‌باشد

$$Co\ker(f) = \frac{N}{I_m(f)}$$

که یک مدول خارج‌قسمتی از N می‌باشد.

تعریف ۴۵.۱.۱: $(N : P)$

اگر N و P زیرمدول‌هایی از M باشند، تعریف می‌کنیم

$$(N : P) = \{a \in A | aP \subseteq N\}$$

در حالت خاص $N = \circ$، $(\circ : P)$ را با نماد $Ann(P)$ نمایش و پوچ‌ساز P گویند همچنین

$$(\mathbf{0} : M) = \{a \in A | aM = \circ\}$$

را پوچ‌ساز M گویند و با نماد $Ann(M)$ نمایش می‌دهیم که یک ایده‌آل حلقه A است. $\mathbf{0}$ـزیرمدول M است.

این ایده‌آل در اینجا پوچساز (Anniliator) M نامیده می‌شود و با $Ann(M)$ نشان داده می‌شود.

نکته ۴۶.۱.۱: اگر $a \subseteq Ann(M)$ یعنی M یک $\frac{A}{a}$ـ مدول است که دارای خاصیت زیر می‌باشد
اگر $\bar{x} \in \frac{A}{a}$ نمایندهٔ دسته هم‌ارزی به وسیلهٔ $x \in A$ باشد تعریف می‌کنیم $\bar{x}m$ را با $xm(x \in M)$ این انتخاب نماینده x از $\bar{x}$ مهم است و بنابراین $aM = \circ$.

نکته ۴۷.۱.۱: اگر M یک Aـمدول باشد و $a \lhd A$ ما نمی‌توانیم M را به عنوان یک $\frac{A}{a}$ـمدول در نظر بگیریم

زمانی می‌توانیم M را به عنوان $\frac{A}{a}$ـمدول در نظر بگیریم که $a \subseteq Ann(M)$ باشد

$$\therefore \frac{A}{a} \times M \longrightarrow M$$

$$\therefore (r + a, m) = rm$$