سرآغاز

به نام خداوند جان و خرد	کزین برتر اندیشه برنگذرد
خداوند نام و خداوند جای	خداوند روزی ده رهنمای
خداوند کیوان و گردان سپهر	فروزنده ماه و ناهید و مهر
ز نام و نشان و گمان برتر است	نگارنده برشده پیکر است
به بینندگان آفریننده را	نبینی مرنجان دو بیننده را
نیابد بدو نیز اندیشه راه	که او برتر از نام و از جایگاه
سخن هر چه زین گوهران بگذرد	نیابد بدو راه جان و خرد
خرد گر سخن برگزیند همی	همان را گزیند که بیند همی
ستودن نداند کس او را چو هست	میان بندگی را ببایدت بست
خرد را و جان را همی سنجد اوی	در اندیشه سخته کی گنجد اوی
بدین آلت رای و جان و زبان	ستود آفریننده را کی توان
به هستیش باید که خستو شوی	ز گفتار بی کار یکسو شوی
پرستنده باشی و جوینده راه	به ژرفی به فرمانش کردن نگاه
توانا بود هر که دانا بود	ز دانش دل پیر برنا بود
از این پرده برتر سخن گاه نیست	ز هستی مر اندیشه را راه نیست

تقدیم به

پدر و مادر عزیزم

تشکر و قدردانی

از استاد راهنمای بزرگوارم جناب آقای دکتر بهبهانی‌نژاد که در تمامی مراحل به من کمک کرده و تجربیات گرانقدر خویش را در اختیار من قرار دادند، کمال تشکر و قدردانی را دارم.

فهرست مطالب

فهرست شکل‌ها

فهرست جدول‌ها

فهرست علامت‌ها

A	ماتریس ضرایب متغیرها در گام زمانی n+1 ام در شکل گسسته‌سازی شده معادلات حاکم
B	ماتریس ضرایب متغیرها در گام زمانی n ام در شکل گسسته‌سازی شده معادلات حاکم
b	قسمت غیرهمگن معادله پواسون
c	بردار پایه فضای رتبه کاسته
f	توابع هندسی که در روش المان‌مرزی تقابل دوگانه به‌کار می‌روند.
G	ماتریس ضرایب در روش المان‌مرزی
H	ماتریس ضرایب در روش المان‌مرزی
I	ماتریس واحد
K	ضریب هدایت گرمایی
L	تعداد گره‌های داخلی
N	تعداد گره‌های مرزی
n	بردار نرمال بر سطح
Q	بردار متغیرها
q	تابع شار
q^*	مشتق حل اساسی نسبت به بردار مکان
r	فاصله بین دو گره
S	سطح ناحیه محاسباتی
t	زمان
u	دما
u^*	حل اساسی دما در روش المان‌مرزی
V	حجم ناحیه محاسباتی
W	بردار سمت راست شکل گسسته‌سازی شده معادلات حاکم
X	ماتریس بردارهای ویژه سمت راست
Y	ماتریس بردارهای ویژه سمت چپ

Z	ماتریس قطری شامل مقادیر ویژه جریان
Ω	ناحیه محاسباتی
∇^2	اپراتور لاپلاس
Δ	تابع دلتای دیراک
ϕ	تابع میانیابی
Γ	مرز ناحیه محاسباتی
λ	مقدار ویژه
κ	ضریب پخش حرارتی

فهرست اختصارها

Boundary Element Method	BEM
Dual Reciprocity Method	DRM
Proper Orthogonal Decomposition	POD
Reduced Order Modeling	ROM

چکیده پایان‌نامه

نام خانوادگی: خریدار	**نام:** الهام
عنوان پایان نامه: شبیه‌سازی عددی انتقال حرارت هدایتی غیردائم با استفاده از روش المان‌مرزی و مدل‌سازی رتبه‌کاسته	
استاد راهنما: دکتر مرتضی بهبهانی‌نژاد	**استاد مشاور:** دکتر عزیز عظیمی
درجه تحصیلی: کارشناسی ارشد	**رشته:** مهندسی مکانیک **گرایش:** تبدیل انرژی
محل تحصیل(دانشگاه): شهید چمران اهواز	
دانشکده: مهندسی	
تاریخ فارغ التحصیلی:	**تعداد صفحه:** ۱۰۹ صفحه
کلیدواژه ها: مدل‌سازی رتبه‌کاسته، انتقال حرارت هدایتی گذرا، روش المان‌مرزی تقابل دوگانه	

چکیده:

در پایان‌نامه حاضر مدل‌سازی رتبه‌کاسته مسائل انتقال حرارت هدایتی گذرا، توسط مودهای ویژه سیستم صورت پذیرفته‌است. بردارهای ویژه سیستم، به‌عنوان پایه‌های فضای رتبه‌کاسته درنظر گرفته شده‌اند. به‌منظور تحلیل عددی مساله از روش المان‌مرزی تقابل دوگانه استفاده شده‌است. در ادامه، مقادیر ویژه و بردارهای ویژه سمت چپ و سمت راست سیستم محاسبه شده و برای ساخت مدل رتبه‌کاسته مورد استفاده قرار گرفته‌اند. در تحلیل عددی، معادله حاکم بر مسائل انتقال حرارت هدایتی گذرا از حالت پایه انحراف پیدا می‌کند. یکی از روش‌های رایج برای حل این مشکل، استفاده از تصحیح استاتیکی است، ولی این روش از قابلیت مدل رتبه‌کاسته می‌کاهد. بدین منظور جهت کاهش اثرات ناشی از تصحیح استاتیکی، معادلات حاکم تنها بر اساس مقادیر ویژه غیرصفر بیان شدند. مشاهده شد که در تحلیل عددی معادله پواسون به روش المان‌مرزی تقابل دوگانه، تعداد مقادیر ویژه صفر با تعداد گره‌هایی که شرط مرزی آن‌ها از نوع دیریکله است، یکسان می‌باشد. نتایج به‌دست آمده نشان می‌دهند که با انتخاب تعداد اندکی از مودهای غالب، مدل رتبه‌کاسته حاضر قادر خواهد بود نتایج رضایت‌بخشی را نتیجه دهد. برای این منظور هفت مثال با شرایط مرزی مختلف در مسائل دوبعدی و سه‌بعدی مورد بررسی قرار گرفته‌اند. نتایج نشان می‌دهند که هر چقدر سیستم معادلات حاصله بزرگ‌تر باشد و نیز تعداد شرایط مرزی دیریکله بیشتر باشد نتایج رضایت‌بخش‌تری حاصل خواهد شد به‌طوری که در برخی موارد، این روش می‌تواند بیشتر از ۹۰ درصد در زمان محاسبات صرفه‌جویی کند. به‌علاوه با بررسی رفتار مقادیر ویژه سیستم، می‌توان نسبت به پایداری سیستم معادلات عددی حاکم اظهار نظر نمود.

فصل اول

مقدمه

امروزه به‌وفور از روش‌های عددی در حل مسائل مهندسی استفاده می‌شود. این روش‌ها عموما مبتنی بر حل تقریبی یک معادله یا دسته‌ای از معادلات حاکم بر محیط مورد بررسی می‌باشند. علت اصلی در توسعه این‌گونه روش‌ها و استفاده‌های مکرر از آن‌ها، به‌ویژه از سال‌های ۱۹۶۰ به بعد را در سه عامل مهم می‌توان خلاصه کرد: اول اینکه بسیاری از مسائل عملی مهندسی خصوصا مسائل انتقال حرارت و مکانیک سیالات را نمی‌توان به‌صورت تحلیلی محاسبه کرد که این عامل معمولا به‌سبب هندسه‌های نامنظم، شرایط مرزی پیچیده یا خواص فیزیکی غیرخطی و یا معادله غیرخطی حاکم بر مساله می‌باشد. دوم توسعه و بسط علوم رایانه‌ای در محاسبات عددی و روش‌های برنامه‌ریزی و سوم، تحقیقات اساسی انجام گرفته بر روی اصول پایه‌ای چون حساب تغییرات و روش مانده‌های وزن‌دار که مبنای اولیه بسیاری از روش‌های عددی به‌حساب می‌آیند. اولین روش عددی شناخته شده که در حیطه عمل خود کاربرد وسیعی نیز یافت روش تفاضل محدود است که در آن، تحلیل معادلات حاکم بر مساله با استفاده از سری تیلور و با بسط موضعی روی متغیرهای نامعلوم، شروع شده و عملیات تکراری تا رسیدن به دقت مورد نظر در تمامی دامنه مورد بررسی ادامه می‌یابد. در این روش، که مبنای محاسباتی آن‌را می‌توان به‌عنوان یک حالت خاصی از روش مانده‌های وزن‌دار به‌حساب آورد، حجم بالای عملیات محاسباتی و تکراری و همچنین عدم توانایی در مدل‌کردن انواع محیط‌های فیزیکی را می‌توان از جمله ضعف‌های اساسی به‌حساب آورد.

دیگر روش عددی مهم روش اجزای محدود می‌باشد که به لحاظ ویژگی‌های خاص در تقسیم‌بندی محیط‌ها به یک سری اجزایی که در ارتباط و همساز با هم عمل می‌کنند و همچنین فرمول‌بندی ساده خود، از کاراترین و مورد استفاده‌ترین روش‌ها به‌شمار می‌آید. در این روش با تقسیم‌بندی دامنه مورد بررسی به اجزای کوچکتر و اعمال شرایط تعادل و همسازی بین آن‌ها، یک

دستگاه معادلات کلی تشکیل می‌شود که حل این دستگاه در نهایت به تحلیل کامل سیستم می‌انجامد. این روش، هرچند در بین پژوهشگران و متخصصین بیشترین توجه را به‌خود معطوف داشته ولی در این میان مشکلاتی چون حجم بالای اطلاعات و داده‌های اولیه، عدم توانایی کامل در مدل‌کردن محیط‌های نامحدود و همچنین عدم کارایی لازم در تحلیل برخی سیستم‌های پیچیده، نمی‌توان چشم‌پوشی کرد.

روش المان‌مرزی از دیگر روش‌های عددی مطرح می‌باشد که اخیرا جهت حل مشکلات فوق مورد توجه بسیار قرار گرفته است. در ادامه این روش معرفی خواهد شد.

۱-۱ روش المان‌مرزی

روش المان‌مرزی یکی از موثرترین روش‌های عددی انواع مسائل مهندسی است که بر پایه تئوری معادلات انتگرالی بنا نهاده شده‌است. برای حل مسائل به‌روش المان‌مرزی، بر خلاف روش‌های عددی دیگر، ابتدا می‌بایست معادله دیفرانسیلی حاکم بر مساله به‌فرم انتگرالی تبدیل شود. پس از تبدیل فرم دیفرانسیلی معادله به‌فرم انتگرالی، معادله حاصل شامل بر چند عبارت انتگرالی روی حجم (کل ناحیه محاسباتی) می‌شود. در صورتی که معادله حاکم بر مساله دارای جواب اساسی باشد، به‌کمک استفاده از قضیه گرین می‌توان تمامی عبارت‌های انتگرالی روی کل ناحیه را به عبارت‌های انتگرالی روی مرز تبدیل نمود. سپس با شبکه‌بندی مرز مساله و انتگرال‌گیری روی هر یک از المان‌های مرزی مجهولات مساله به‌دست می‌آیند. از جمله مزایای این روش می‌توان به موارد زیر اشاره نمود:

- **حجم داده‌های ورودی به مراتب کمتر:** در BEM تنها نیاز به المان‌بندی مرز دامنه مورد بررسی (به جای تمامی محیط) می‌باشد که این عامل باعث کاهش چشمگیر اطلاعات اولیه در تحلیل خواهد شد. در این صورت میدان عمل استفاده‌کننده بسیار افزایش یافته و تحلیل مساله، زمان و هزینه کمتری را دربر می‌گیرد.
- **دقت بیشتر:** در BEM تا قبل از مرحله گسسته‌سازی محیط، هیچ تقریبی بر فرمول‌بندی حاکم بر مساله وارد نشده و از طرف دیگر فرمول‌بندی به‌گونه‌ای است که تمامی گره‌ها در

ارتباط توام با هم هستند. این دو عامل مهم به اضافه حجم معادلات به مراتب کمتر، بر دقت بیشتر این روش می‌افزاید.

- **مدل‌کردن محیط‌های با مرز نامحدود:** در BEM بدون نیاز به تعریف مرزهای مجازی و هرگونه محدود کردن محیط مورد بررسی، مدل‌کردن و تحلیل محیط‌های نامحدود و نیمه نامحدود میسر می‌شود.

علاوه بر مزایای اشاره شده در بالا این روش دارای محدودیت‌هایی نیز می‌باشد. به‌عنوان مثال، ماتریس‌های ایجاد شده در پیاده‌سازی عددی روش المان‌مرزی به‌صورت ماتریس‌های پر می‌باشند. این موضوع مهم‌ترین محدودیت این روش می‌باشد که با افزایش تعداد المان‌ها باعث طولانی‌شدن زمان حل برنامه می‌شود. در فصل سوم شرح دقیق‌تری از روش المان‌مرزی آورده شده‌است.

در کار حاضر از روش المان‌مرزی جهت تحلیل مسائل انتقال حرارت هدایتی گذرا استفاده شده‌است. روش‌های مختلفی جهت تحلیل مسائل انتقال حرارت هدایتی گذرا با استفاده از روش المان‌مرزی وجود دارد. در بخش بعد یکی از این روش‌ها توضیح داده خواهد شد.

۱-۱-۱ روش المان‌مرزی تقابل دوگانه

انتگرال‌های دامنه در روش المان‌مرزی به دلایل مختلفی مثل وجود نیروهای حجمی، حالت‌های اولیه، جملات غیرخطی و... به‌وجود می‌آیند. در اولین سال‌های استفاده از روش المان‌مرزی، همیشه این نیار وجود داشت که حل اساسی مربوط به مساله مورد بررسی حتما وجود داشته باشد. این حل اساسی باید تمامی جملات موجود در معادله حاکم را به‌حساب می‌آورد تا از انتگرال‌های دامنه در فرمولاسیون معادله انتگرال مرزی جلوگیری کند، در غیر این صورت سلول‌های داخلی باید تعیین می‌شدند.

در سال‌های بعد با پیشرفت‌هایی که در این روش صورت گرفت، حل اساسی بسیاری از معادلات تعیین شدند، ولی حلی اساسی که برای هر حالتی قابل استفاده باشد، تعیین نشد. همچنین، در بسیاری از موارد، تغییر یک برنامه، جهت اعمال یک حل اساسی جدید، بدین جهت که کاربر فقط می‌خواهد یک معادله دیفرانسیل که تنها کمی متفاوت با معادلات قبلی است را

بررسی کند، جالب به‌نظر نمی‌رسید. استفاده از سلول‌های داخلی جهت ارزیابی انتگرال‌های روی دامنه، نیازمند گسسته‌سازی داخلی است که این عمل موجب افزایش قابل توجه داده‌های مورد نیاز جهت اجرای برنامه می‌شود، در نتیجه روش المان‌مرزی جذابیت خود را نسبت به روش المان محدود یا روش‌های عددی دیگر از دست می‌دهد.

جهت پرهیز از مشکلات فوق، باید روش المان‌مرزی به‌گونه‌ای ایجاد می‌شد که ویژگی‌های زیر را داشته باشد:

۱. حلی را ارائه دهد که تنها به گسسته‌سازی مرز دامنه نیاز داشته باشد؛ بدون نیاز به گسسته‌سازی دامنه
۲. نیازی به به‌دست‌آوردن حل اساسی جدید در هر مساله نداشته باشد.
۳. در هر مساله‌ای با استفاده از یک روش مشابه قابل استفاده باشد مثل روش المان محدود.

تعدادی از روش‌هایی که شرایط فوق را ایجاد می‌کنند به‌صورت زیر هستند:

۱. انتگرال‌گیری تحلیلی انتگرال دامنه
۲. استفاده از سری‌های فوریه
۳. روش بردار گالرکین
۴. روش تقابل چندگانه
۵. روش تقابل دوگانه

اگرچه روش انتگرال‌گیری تحلیلی دامنه روش دقیقی است، ولی استفاده از آن تنها به مسائل خیلی ساده‌ای که در آن‌ها انتگرال را می‌توان به‌صورت تحلیلی محاسبه کرد، محدود می‌شود. روش تبدیل فوریه نیز یک روش سرراست جهت استفاده در بسیاری از مسائل نمی‌باشد، زیرا محاسبه ضرایب از نظر محاسباتی طاقت فرساست، با این وجود این روش در چندین حالت ساده استفاده شده‌است و موفقیت‌آمیز بوده‌است. در روش بردار گالرکین از یک حل اساسی اولیه مرتبه بالاتر و قضیه گرین جهت تبدیل انتگرال‌های دامنه به‌خصوصی به انتگرال‌های مرزی معادل استفاده می‌شود. مشکل اصلی این روش آنست که تنها می‌تواند در مسائل نسبتا ساده مورد

استفاده قرار گیرد. روش تقابل چندگانه، بسطی از روش بردار گالرکین است. در این روش به‌جای استفاده از تنها یک حل اساسی مرتبه بالا، به تعداد مورد نیاز از آن‌ها استفاده می‌شود. مشکل اصلی این روش آنست که این روش را نمی‌توان در مسائل غیرخطی عمومی مورد استفاه قرار داد، هر چند این روش در حل چندین مساله وابسته به زمان مورد استفاده قرار گرفته است و موفقیت آمیز بوده‌است.

روش المان‌مرزی تقابل دوگانه تمامی شرایط گفته شده در بالا را ارضا می‌کند، یعنی این روش را می‌توان با هر نوع حل اساسی مورد استفاده قرار داد و به سلول‌های داخلی نیازی ندارد، هر چند کاربر می‌تواند در این روش گره‌های داخلی را تعریف کند. در کار حاضر نیز از این روش جهت تحلیل مسائل انتقال حرارت هدایت استفاده شده‌است.

همان‌طور که قبلا نیز ذکر شد، یکی از مهم‌ترین معایب روش المان‌مرزی ایجاد ماتریس‌های پر و نامتقارن در برنامه است که این موضوع با افزایش تعداد المان‌ها موجب طولانی‌تر شدن زمان حل برنامه می‌شود. هدف این پایان‌نامه استفاده از روشی است که با داشتن دقت مناسب بتواند درجه آزادی سیستم را کاهش دهد. با کاهش درجات آزادی سیستم سرعت محاسبات در هر گام زمانی بالا رفته و در نتیجه زمان تحلیل مساله انتقال حرارت گذرا کاهش می‌یابد. در قسمت بعد یکی از این روش‌ها معرفی می‌گردد.

۱-۲ مدل‌سازی رتبه‌کاسته

روش‌های عددی برای توسعه مدل‌سازی فیزیکی در مسائل انتقال حرارت مناسب هستند ولی در ابعاد خیلی بالا، هزینه محاسباتی این‌گونه مدل‌سازی‌ها زیاد بوده و نمی‌توان از آن‌ها در کاربردهای معمولی استفاده کرد. بنابراین علی‌رغم افزایش فعالیت‌های تحقیقاتی در این زمینه کاربرد کمی از آن‌ها در صنعت مشاهده می‌شود. در دهه‌های اخیر به‌منظور کاهش زمان محاسباتی و نیز کاهش هزینه‌ها، روش مدل‌سازی رتبه‌کاسته مورد بررسی قرار گرفته است. در این روش ضمن کاهش تعداد معادلات دقت حل مساله همچنان پایدار باقی می‌ماند.

یک روش ساخت مدل‌های رتبه‌کاسته این است که میدان جریان غیردائم را بر حسب تعداد اندکی از مودهای فراگیر جریان بیان نمود. این مودها می‌توانند یک سری از مودهای فرضی باشند و به هر شکل دلخواه انتخاب شوند. ولی از نظر مفهومی ساده‌ترین انتخاب می‌تواند مودهای ویژه

جریان باشد. داول و همکاران انتخاب مودهای ویژه جریان را در تحلیل مسائل آیرودینامیک از چند جنبه زیر حائز اهمیت دانسته‌اند [۱]:

۱. مقادیر ویژه و بردارهای ویژه برای جریان‌های غیردائم وجود دارند. بنابراین ممکن است بتوان توسط آن‌ها برخی مفاهیم اساسی فیزیک جریان غیردائم را استخراج نمود.
۲. اگر تعداد اندکی از مودهای ویژه غالب باشند، می‌توان توسط آن‌ها به یک مدل محاسباتی کارا برای دستیابی به یک حل دقیق و سریع میدان جریان غیردائم دست یافت.
۳. با ساختن یک مدل آیرودینامیکی در فضای مودال می‌توان مودهای ویژه آیرودینامیکی را با مودهای ویژه سازه ترکیب کرد و به یک مدل آیروالاستیک با حداقل تعداد درجات آزادی دست یافت.

بنابراین یک مدل CFD متداول که شامل $۱۰^{۴}$ تا $۱۰^{۶}$ درجه آزادی است را می‌توان با انتخاب حدود ۱۰ تا ۱۰۰ مود غالب به ۱۰ تا ۱۰۰ درجه آزادی کاهش یافت.

روش دوم برای ساخت یک مدل رتبه‌کاسته روش تجزیه متعامد مناسب است. در این روش توابع پایه (مودها) با استفاده از داده‌های تجربی و یا عددی به‌گونه‌ای محاسبه می‌شوند که متوسط محتویات انرژی سیستم را به بهترین شکل ممکن ردگیری کنند. با تصویر معادلات حاکم روی این توابع و با درنظر گرفتن تعدادی از مودهای غالب می‌توان تعداد کمی معادله دیفرانسیل معمولی (ODE) برای حرکت سیال به‌دست آورد به‌گونه‌ای که بتوان همه میدان جریان را با دقت قابل قبولی با استفاده از این معادلات دیفرانسیل معمولی توصیف نمود.

در این پایان‌نامه مدل‌سازی رتبه‌کاسته مساله انتقال حرارت هدایتی گذرا بر مبنای روش اول یعنی، بیان دینامیک مساله غیردائم بر اساس مودهای ویژه مد نظر می‌باشد.