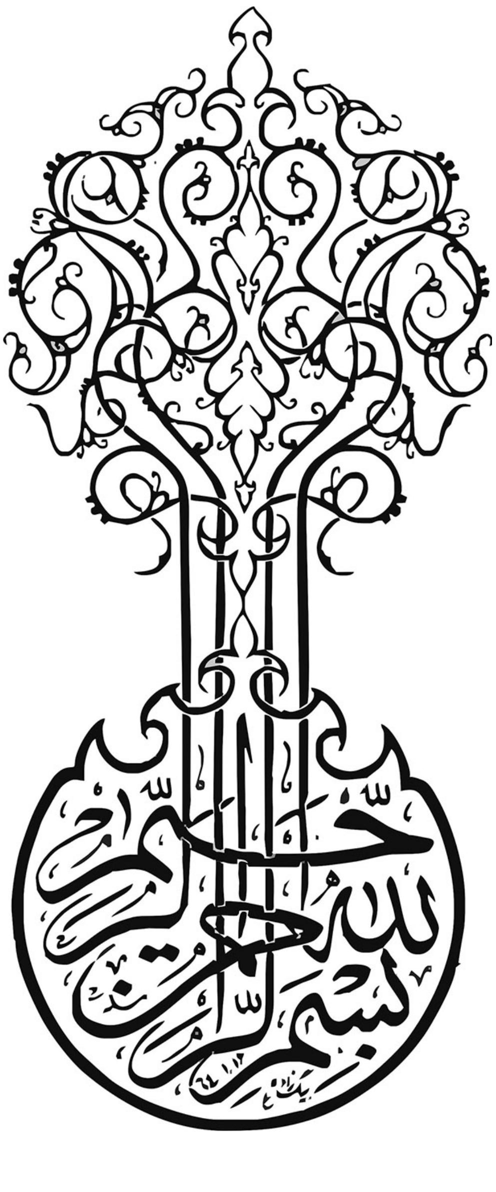

بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه صنعتی اصفهان
دانشکده فیزیک

تحلیل پایداری حالت همگام سیستم‌های آشوبناک با روش سنجه‌ی ماتریسی

پایان‌نامه کارشناسی ارشد فیزیک، گرایش ماده چگال

سید سعید حسینی

استاد راهنما

دکتر کیوان آقابابائی سامانی

۱۳۹۲

دانشگاه صنعتی اصفهان
دانشکده فیزیک

پایان‌نامه کارشناسی ارشد رشته فیزیک آقای سید سعید حسینی

تحت عنوان

تحلیل پایداری حالت همگام سیستم‌های آشوبناک با روش سنجه‌ی ماتریسی

در تاریخ ۱۳۹۲/۰۶/۳۰ توسط کمیته تخصصی زیر مورد بررسی و تصویب نهایی قرار گرفت.

۱- استاد راهنمای پایان‌نامه	دکتر کیوان آقابابائی سامانی
۲- استاد مشاور پایان‌نامه	دکتر فرهاد فضیله
۳- استاد مدعو	دکتر وحید سالاری
۴- استاد ممتحن داخلی	دکتر مجتبی اعلائی
سرپرست تحصیلات تکمیلی	دکتر مجتبی اعلائی

قدردانی

از جناب آقای دکتر کیوان آقابابائی سامانی به خاطر زحمات بی‌شائبه و راهنمایی‌های ارزنده‌ی ایشان در جهت انجام این پایان‌نامه تشکر و قدردانی می‌نمایم .
از پدر و مادر مهربانم بسیار سپاسگذارم که همواره مرا یاری کرده‌اند.
از دوست گرامی و همکار گرانقدرم آقای میلاد یوسف‌پور و همچنین خانم فاطمه آقایی به خاطر همکاری در این پایان‌نامه نیز کمال تشکر و قدردانی را دارم.
و در آخر نیز از تمام دوستانی که در کنار من بوده‌اند تشکر می‌کنم.

فهرست مطالب

چکیده

در این پایان‌نامه ابتدا به معرفی سیستم‌های دینامیکی می‌پردازیم. سیستم‌های دینامیکی به دو دسته‌ی سیستم‌های زمان‌پیوسته و زمان‌گسسته تقسیم می‌شوند. سیستم‌های زمان‌پیوسته توسط معادلات دیفرانسیل و سیستم‌های زمان‌گسسته توسط نگاشت‌ها توصیف می‌گردند. در برخی حالت‌ها برای معادلات توصیف‌کننده‌ی سیستم پاسخ تحلیلی نمی‌توان بدست آورد و سیستم رفتار پیچیده‌ای از خود نشان می‌دهد. سیستم‌های آشوبناک و نگاشت‌های لوجیستیک که نوعی از سیستم‌های زمان‌گسسته هستند بررسی می‌شوند. از نمای لیاپانوف به عنوان ابزاری برای بررسی آشوب‌ناک بودن سیستم استفاده می‌شود. همان‌طور که همگام‌سازی برای نوسانگرهای متناوب مشاهده شده است، همگام‌سازی برای نوسانگرها و نگاشت‌های آشوبناک که دینامیکی نامتناوب، غیرقابل پیش‌بینی و حساس به شرایط اولیه دارند، نیز رخ می‌دهد. انواع همگام‌سازی و همچنین پایداری حالت همگام را شرح داده‌ایم. شبکه‌های پیچیده و چهار شبکه‌ی منظم، جهان کوچک، بی‌مقیاس و تصادفی معرفی شده‌اند و همگام‌سازی شبکه‌هایی از نگاشت‌های لوجیستیک را بررسی کرده‌ایم. سپس به مطالعه‌ی پایداری حالت همگام توسط دو روش تابع پایداری اصلی و روش سنجه‌ی ماتریسی پرداخته‌ایم. در ابتدا تابع جفت‌شدگی را به صورت تفاضل دو نگاشت لوجیستیک در نظرگرفته‌ایم و در حالت کلی‌تر تابع جفت‌شدگی را به صورت تفاضل دو تابع دلخواه در نظرگرفته‌ایم و انتخاب‌های ممکن برای تابع جفت‌شدگی را بررسی کرده‌ایم. بررسی‌های ما در این پایان‌نامه توسط نرم‌افزار Matlab انجام شده است. در روش سنجه‌ی ماتریسی وابستگی پایداری را نسبت به پارامترهای نگاشت لوجیستیک، تعداد رأس‌ها و پارامترهای مختلف هر شبکه مقایسه کرده‌ایم.

کلمات کلیدی:
آشوب – همگام‌سازی – پایداری حالت همگام – سیستم‌های دینامیکی – تابع پایداری اصلی – روش سنجه‌ی ماتریسی

فصل ۱

پیشگفتار

سیستم‌های دینامیکی از زمان کپلر و نیوتون مورد مطالعه بوده‌اند، ولی سیستم‌های غیر خطی به طور گسترده‌ای غیرقابل بررسی بودند. پوانکاره در تحقیقات خود با سیستم‌هایی مواجه شد که رفتار نامنظمی داشته و پیش‌بینی دراز مدت سیستم امکان‌پذیر نبود. لورنز، هواشناس آمریکایی در شبیه‌سازی شرایط آب و هوایی، مشاهده کرد که این سیستم‌ها هرگز به حالت تعادل یا حالت تناوبی نمی‌رسند.به این‌گونه سیستم‌ها که رفتار نامتناوب دارند، به شرایط اولیه حساس هستند و پیش‌بینی رفتار آنها در مدت زمان طولانی عملا غیرممکن است، سیستم‌های آشوبناک گویند.

در فصل دوم به معرفی سیستم‌های دینامیکی می‌پردازیم. سیستم‌های دینامیکی به دو دسته‌ی زمان‌پیوسته و زمان‌گسسته تقسیم می‌شوند. سیستم‌های زمان‌پیوسته توسط معادلات دیفرانسیل و سیستم‌های زمان‌گسسته توسط نگاشت‌ها توصیف می‌شوند. سپس به سیستم‌های دینامیکی آشوبناک و به طور خاص نگاشت لوجیستیک که نوعی سیستم زمان‌گسسته است می‌پردازیم. نمای لیاپانوف را به عنوان ابزاری برای بررسی آشوبناک بودن سیستم در نظر می‌گیریم.

در فصل سوم به بررسی همگام‌سازی در شبکه‌های پیچیده می‌پردازیم. همگام‌سازی را می‌توان تطبیق آهنگ چند نوسانگر یا یکسان شدن مقادیر چند نگاشت تعریف کرد. انواع همگام‌سازی و پایداری را برای نگاشت‌های لوجیستیک معرفی می‌کنیم. پارامتر نظم، شعاع گروه و تابع خطا را می‌توان برای بررسی حالت همگام استفاده کرد. شبکه‌های پیچیده که طرحی از برهم‌کنش بین اجزای تشکیل‌دهنده‌ی یک سیستم می‌باشند و چهار شبکه‌ی منظم،

جهان‌کوچک، بی‌مقیاس و تصادفی و الگوریتم ساخت آنها آشنا می‌شویم.

در فصل چهارم پایداری حالت همگام توسط دو روش تابع پایداری اصلی و روش سنجه‌ی ماتریس مورد مطالعه قرار می‌گیرند. ایده اصلی روش تابع پایداری اصلی تبدیل پایداری خمینه‌ی همگام به پایداری تابع پایداری اصلی متناظر است، که برای اختلالات کوچک حول حالت همگام امکان‌پذیر است. ویژگی مهم تابع پایداری اصلی این است که وابستگی به ماتریس جفت‌شدگی ندارد و به دینامیک نوسانگرها و تابع جفت‌شدگی بستگی دارد. روش تابع پایداری اصلی محدودیت‌هایی دارد از جمله اینکه ماتریس‌های لاپلاسی باید قطری یا بلوکه‌قطری باشند و حالت همگام از قبل مشخص باشد. روش سنجه‌ی ماتریس وضعیت‌های همگام‌سازی سرتاسری و موضعی را برای حالاتی که ماتریس جفت‌شدگی منفی و غیرقطری می‌باشند، گسترش می‌دهد. در ابتدا سیستم‌هایی که تابع جفت‌شدگی به صورت تفاضل دو نگاشت لوجیستیک است در نظر گرفته، سپس به حالاتی که تابع جفت‌شدگی به صورت تفاضل دو تابع دلخواه است تعمیم می‌دهیم.

در فصل پنجم نتایج و نمودارها ارائه شده‌اند. پایداری چهار شبکه به‌ازای مقادیر مختلف پارامتر نگاشت لوجیستیک، تعداد رأس‌ها و پارامترهای مربوط به چهار شبکه بررسی شده‌اند.

فصل ۲

سیستم های دینامیکی آشوبناک

۱.۲ مقدمه

نیوتون [۱] با استفاده از قوانین کپلر [۲] موفق شد قوانینی را در خصوص حرکت اجسام به‌دست آورد. مسئله‌ی حرکت زمین به دور خورشید (مسئله‌ی دوجسمی) را حل کرد و قانون جاذبه‌ی گرانش عکس مجذوری را به‌دست آورد. پس از آن مسئله‌ی سه‌جسم (زمین، خورشید و ماه) مورد بررسی‌های گسترده قرارگرفت، ولی درنهایت مشخص شد که این مسئله حل دقیقی ندارد.

پس از آن پیشرفت‌های زیادی در به‌دست آوردن نظریه کاملی برای حل و بررسی معادلات دیفرانسیل خطی حاصل شد، ولی سیستم‌های غیرخطی به طور گسترده‌ای غیرقابل بررسی بودند؛ فقط در موارد معدودی مثل مسائلی که به طور ضعیف غیرخطی بودند، نظریه اختلال مورد استفاده قرار می‌گرفت.

در اواخر قرن نوزدهم پوانکاره [۳] نشان داد که روش اختلال برای همه حالات جواب صحیحی را به‌دست نمی‌دهد. او توانست با ترکیب آنالیز و هندسه، روش کیفی را برای مطالعه معادلات دیفرانسیل توسعه دهد. پوانکاره در کارهای خود متوجه مجموعه عظیمی از حرکات نامنظمی شد که پیش‌بینی دراز مدت سیستم را غیرممکن می‌ساخت.

---

[۱] Newton

[۲] kepler

[۳] Poincare

روش‌های پیشرفته‌ی کنونی در تجزیه و تحلیل کیفی معادلات دیفرانسیل، نتیجه کارهای پوانکاره، بیرخوف [۱] ، لیاپانوف [۲] و دانشمندان روسی دیگر می‌باشد.

اختراع کامپیوترهای پر سرعت در دهه ۱۹۵۰، امکان آزمایش معادلات دینامیکی را فراهم آورد و لورنز [۳] برای پیش‌بینی آب‌وهوا با شبیه‌سازی انتقال گرما در یک حلقه عمودی، مشاهده کرد که این سیستم، هرگز به تعادل یا حالت تناوبی نمی‌رسد، بلکه به حرکت نامنظم و نامتناوب خود ادامه می‌دهد. علاوه براین، به‌ازای شرایط اولیه‌ی مختلف، رفتارهای متفاوت نشان می دهد. او در مقاله ی خود اثر پروانه‌ای [۴] را چنین بیان کرد که در یک سیستم دینامیکی مانند اتمسفر زمین، آشفتگی بسیار کوچکی ناشی از بر هم خوردن بال‌های یک پروانه، می‌تواند منجر به توفان‌هایی در مقیاس یک قاره بشود. در سال ۱۹۷۱ روئیل [۵] و تاکینس [۶] مفهوم رباینده‌های شگفت [۷] را در بررسی یک سیستم میرا که مسئله تلاطم در سیالات را بیان می‌کرد، به کار بردند. آزمایش‌های گولاب [۸] و سوینی [۹] در سال ۱۹۷۵ بعد جدیدی در مکانیک نیوتونی مطرح شد و آن به‌وجود آمدن حرکات تصادفی و غیرقابل پیش‌بینی در سیستم‌های دینامیکی غیرخطی نه‌چندان پیچیده بود. به نظر می‌رسد که لی [۱۰] و یورک [۱۱] اولین بار کلمه آشوب [۱۲] را در ریاضیات برای جواب‌های تصادفی حاصل از بعضی نگاشت‌ها به کار بردند و استفاده از این کلمه در فیزیک به بولتزمن برمی‌گردد. سیستم‌های آشوبناک، سیستم‌هایی هستند که رفتار نامتناوب دارند، به شرایط اولیه حساس هستند و پیش‌بینی رفتار آن‌ها در مدت‌زمان طولانی، عملا غیرممکن است. در دهه ۱۹۷۰ فینبوم [۱۳] به قانون جهان شمول گذار از نظم به رفتار آشوبناک پی برد. این کشف بین گذار فاز و آشوب ارتباط برقرار کرد. در همین سال‌ها، دو مسئله مهم دینامیکی دیگر مطرح شد؛ یکی گستردگی فراکتال‌ها که در موارد گوناگون دیده می‌شوند، و دیگری ظهور زیست‌شناسی ریاضیاتی؛ از آن پس مطالعه‌ی سیستم‌های دینامیکی به طور جدی ادامه دارد [۱][۲].

۲.۲ سیستم‌های دینامیکی

به مجموعه معادلاتی که بتوانند تحول زمانی حالت یک سیستم را با درنظر گرفتن شرایط اولیه‌ی تحول توصیف کنند، یک سیستم دینامیکی می‌نامند. به طور کلی سیستم‌های دینامیکی به دو دسته تقسیم می‌شوند: سیستم‌های زمان‌پیوسته و سیستم های زمان‌گسسته. تحول سیستم‌های زمان‌پیوسته توسط معادلات دیفرانسیل توصیف می‌شوند،

---

[۱] Birkhoff
[۲] Liapunov
[۳] Lorenz
[۴] Butterfly effect
[۵] D. Ruelle
[۶] F. Takens
[۷] Strange attractor
[۸] Gollub
[۹] Swinney
[۱۰] Li
[۱۱] York
[۱۲] Chaos
[۱۳] Fegenbaum

در حالی‌که تحول سیستم های زمان‌گسسته را نگاشت‌های مکرر توصیف می‌کنند.

معادلات دیفرانسیل دو دسته‌اند: معادلات دیفرانسیل معمولی و پاره‌ای. معادلات دیفرانسیل معمولی یک متغیر مستقل دارند، درحالی‌که معادلات دیفرانسیل پاره‌ای شامل بیش از یک متغیر مستقل هستند. هدف ما بررسی رفتار زمانی سیستم‌هاست. چارچوب کلی معادلات دیفرانسیل معمولی به‌صورت زیر است:

$$\begin{aligned} \dot{x}_۱ &= f_۱(x_۱, \cdots, x_n) \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= f_n(x_۱, \cdots, x_n) \end{aligned} \tag{۱.۲}$$

که x_i ها متغیرهایی هستند که با توجه به مسئله تعریف می شوند؛ که می‌توانند مکان و سرعت یک ذره ی در حال حرکت باشند و $\dot{x}_i$ ها مشتق گیری زمانی x_i ها هستند. اگر با مختصات x_i فضایی بسازیم، جواب این معادلات متناظر با نقطه‌ایست که روی یک منحنی در این فضا حرکت می‌کند. این فضا، فضای فاز [۱] و منحنی، مسیر [۲] نامیده می‌شود. به این دلیل که این فضا N بعدی است، به سیستم معرفی شده با معادلات (۱.۲) سیستم N بعدی یا سیستم مرتبه N گفته می‌شود. معادلات دیفرانسیلی که صریحا به زمان وابسته نیستند، سیستم های خودران [۳] نامیده می‌شوند.

یک سیستم دینامیکی زمان گسسته را می‌توان توسط نگاشت به‌صورت زیر نمایش داد:

$$x_{n+۱} = f(x_n) \tag{۲.۲}$$

که در این‌جا x و f بردارهای N بعدی هستند و n نمایشگر متغییر گسسته‌ی زمانی است. تحول سیستم توسط نگاشت فوق از نقطه ابتدایی $x_۰$ شروع شده و توسط تابع f به نقاط $x_۱$ ، $x_۲$ و ...نگاشته می‌شود[۳].

۱.۲.۲ سیستم‌های دینامیکی آشوبناک

از اواسط قرن گذشته، این حقیقت که بعضی از سیستم‌های دینامیکی شرایط لازم برای آشوبگونه بودن را از خود نشان می‌دهند شناخته شده بود. برای مثال، این‌گونه سیستم‌ها در جو، منظومه‌شمسی و در قلب و مغز موجودات زنده یافت می‌شوند. همچنین در علم شیمی (واکنش بلوزوو- ژابوتین اسکی) [۴] ، در علم اپتیک غیرخطی (لیزر)، در الکترونیک (مدار چوآ- ماتسوموتو) [۵] ، در دینامیک سیالات (انتقال گرما ریلیت- برنارد) [۶] و غیره یافت می‌شوند.

[۱] Phase space

[۲] Trajectory

[۳] Autonomous

[۴] Belouzov-Zhabotinski

[۵] Chua-Matsumoto

[۶] Reyleigh-Bernard

برای سیستم‌های خطی پایدار، تفاوت کوچک در شرایط اولیه تنها سبب تفاوت ناچیزی در خروجی سیستم می‌شود، اما سیستم‌های غیرخطی می‌توانند از خود پدیده‌ای نشان دهند که آشوب نامیده می شود. این مطلب به این معناست که خروجی سیستم نسبت به شرایط اولیه بسیار حساس است. خصوصیت اصلی این‌گونه سیستمها غیرقابل پیش بینی بودن خروجی سیستم است.

غیرخطی بودن از جمله عوامل مهم برای بروز رفتار آشوبی در سیستم‌های دینامیکی و پدیده‌های طبیعی است. سیستم‌های آشوبی از آنجا که دارای ساختاری معین [۱] بوده و در عین حال دارای رفتارهای تصادفی [۲] هستند، در سال‌های اخیر توجه بسیاری از محققین را به خود معطوف داشته است. منظور از سیستم معین این است که در شرایط مشخص به ازای یک ورودی فقط یک خروجی دریافت می‌شود، ولی در سیستم تصادفی به ازای یک ورودی خروجی‌ها متعدد است. در سیستم‌های دینامیکی پایدار، نمو خروجی سیستم توسط حالت اولیه مشخص می‌شود. این درحالی است که در ذهن ما تصادف یا شانس، فرآیندهای با رفتار نامنظم و غیرقابل پیش‌بینی هستند که قانون کلی بر آنها حاکم نیست. نظریه‌ی احتمال ابزار مناسبی برای بررسی رفتار پدیده‌های تصادفی است که روش‌های آماری و حساب احتمالات تا کنون در بسیاری از زمینه‌های علوم کارآیی خود را نشان داده‌اند، با این وجود برای نزدیک ساختن ارتباط قطعیت سیستم‌ها و قوانین احتمال تلاش‌هایی صورت گرفته است و شاخه‌ی جدیدی در ریاضیات به نام نظریه ارگودیک [۳] به‌وجود آمده که جهت جداسازی سیستم‌های دینامیکی با رفتار نامنظم از یکدیگر و طبقه‌بندی آن‌ها مورد استفاده قرار گرفته است.

بنابراین می توان گفت آشوب، رفتار هر سیستم دینامیکی غیرخطی است که حساسیت شدیدی به شرایط اولیه داشته باشد. در یک سیستم آشوبی اطلاعات به صورت نمایی از دست می‌رود یعنی اگر اختلالی (خطای کوچکی) در شرایط اولیه سیستم وجود داشته باشد، این خطا به صورت نمایی رشد می‌کند به‌طوری‌که پس از مدتی (بسته به میزان آشوبناکی سیستم) تقریبا همه اطلاعات از دست می‌رود و خطای بسیار بزرگی در نتایج به‌وجود می‌آید. جالب این‌که اگر خطا را در شرایط اولیه کاهش دهیم الزاما خطا در نتایج نهایی سیستم کاهش نمی‌یابد و حتی ممکن است خطا بزرگتر هم بشود. این مسئله باعث می‌شود که سیستم آشوبی رفتار ظاهرا تصادفی از خود نشان دهد و به ازای شرایط اولیه‌ی تقریبا یکسان، نتایج متفاوتی داشته باشد. البته لازم به ذکر است که آشوب دارای قطعیت ذاتی و دینامیک است و نباید با نوفه‌ی تصادفی (که دارای دینامیک نیست) اشتباه شود. شایان ذکر است که طیف فرکانسی یک مسیر آشوبی پیوسته است. در بسیاری موارد این نوسانات نامنظم و غیرمتناوب بهتر می توانند نمایانگر فرآیندها در سیستم های فیزیکی باشد.

سیستم‌های دینامیکی آشوبناک همانند سیستم‌های دینامیکی به دو دسته سیستم‌های زمان‌پیوسته و زمان‌گسسته تقسیم می‌شوند. چند نمونه از سیستم‌های زمان‌پیوسته عبارتند از: نوسانگر لورنز و نوسانگر راسلر. سیستم‌های

[۱] Deterministic

[۲] Stochastic

[۳] Ergodic

زمان‌گسسته به‌صورت نگاشت می‌باشند مانند نگاشت لوجیستیک [۱] ، نگاشت تنت [۲] یا مثلثی و نگاشت بیکر [۳] . ما در این پایان‌نامه به بررسی نگاشت‌های لوجیستیک می‌پردازیم.

نمای لیاپانوف

یکی از ابزار بررسی آشوبناک بودن سیستم، نمای لیاپانوف [۴] می‌باشد. میزان دور شدن نقاط از یکدیگر معیاری برای آشوبناک بودن نگاشت است. نمای لیاپانوف پارامتری است که، نرخ واگرایی دو مسیر بسیار نزدیک در فضای فاز را نشان داده و مثبت بودن آن بیانگر آشوبناک بودن سیستم است. به منظور محاسبه‌ی بزرگترین نمای لیاپانوف، اختلالی کوچک به شرط اولیه‌ی مشخص وارد می‌کنیم و دو مسیر در فضای فاز را بررسی می‌کنیم. جهت اعمال اختلال مهم نیست زیرا با گذشت زمان، اختلال متعلق به جهتی می‌شود که با بزرگترین ضریب رشد می‌کند و لذا این روش برای پیدا کردن بزرگترین نمای لیاپانوف موثر خواهد بود.

یک سیستم دینامیکی به صورت $\dot{r}(t) = f(r(t))$ در نظر می‌گیریم، که $r(t)$ برداری n بعدی است که مقادیر حقیقی می‌پذیرد. با شروع از شرایط اولیه تصادفی و بعد از گذشت مدت زمانی، سرانجام به جاذب آشوبی می‌رسیم. خمینه $s(t)$ مسیر سیستم بر روی جاذب و دو نقطه نزدیک با فاصله η از هم در نظر می‌گیریم. تا زمانی‌که مسیرهایی که از دو نقطه شروع می‌شوند به اندازه کافی نزدیک بمانند، تغییرات فاصله‌ی دو نقطه، η از معادله‌ی خطی زیر پیروی می‌کند:

$$\dot{\eta}(t) = Df(s)\eta(t) \tag{۳.۲}$$

عناصر ماتریس ژاکوبی $Df(s)$ به این صورت تعریف می‌شود:

$$Df(s) = \{\partial f_i/\partial r_j\} \tag{۴.۲}$$

که بر روی مسیر $s(t)$ محاسبات صورت می‌گیرد. در عمومی‌ترین حالت، ماتریس ژاکوبی مستقل از زمان بوده و مقادیر آن به‌صورت عددی محاسبه می‌گردند. در حالت خاص که $Df(s)$ ثابت باشد (به طور مثال هنگامی‌که، s یک نقطه ثابت ساده باشد) به حل زیر می‌رسیم:

---

[۱] Logistic map

[۲] Tent

[۳] Baker

[۴] Lyapunov Exponent

$$\eta(t) = \sum_j C_j e_j \exp(\lambda_j^* t) \qquad (۵.۲)$$

که C_j ضرایب وابسته به شراط اولیه می‌باشند و λ_j^* و e_j نمایشگر ویژه‌مقادیر و ویژه‌بردارهای ماتریس ثابت Df می‌باشد. در این حالت، طیف λ_j نماهای لیاپانوف مجموعه‌ای از قسمت‌های حقیقی ویژه‌مقادیر هستند.

برای یک ماتریس وابسته به زمان $Df(s)$ ، طیف λ_j را به صورت کلی این‌گونه تعریف می‌کنیم:

$$\lambda_j(\eta) = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \ln \left|(Df^t)\eta\right| \qquad (۶.۲)$$

که Df^t ، t امین تکرار ماتریس ژاکوبی تحت اختلال کوچک η می‌باشد. $j = 1, \ldots, n$ مولفه به تعداد ابعاد سیستم دینامیکی می‌باشد و آن‌ها متناظر با تعداد جهاتی می‌باشند که سیستم می‌تواند مختل شود. رفتار دینامیکی مسیر بر روی جاذب آشوبی توسط بزرگترین نمای لیاپانوف، λ ، مشخص می‌گردد. $\lambda < 0$ نمایانگر نقاط ثابت، $\lambda = 0$ نمایانگر نقاط چندشاخگی و $\lambda > 0$ جاذب‌های آشوبی را مشخص می‌کند.

نگاشت لوجیستیک

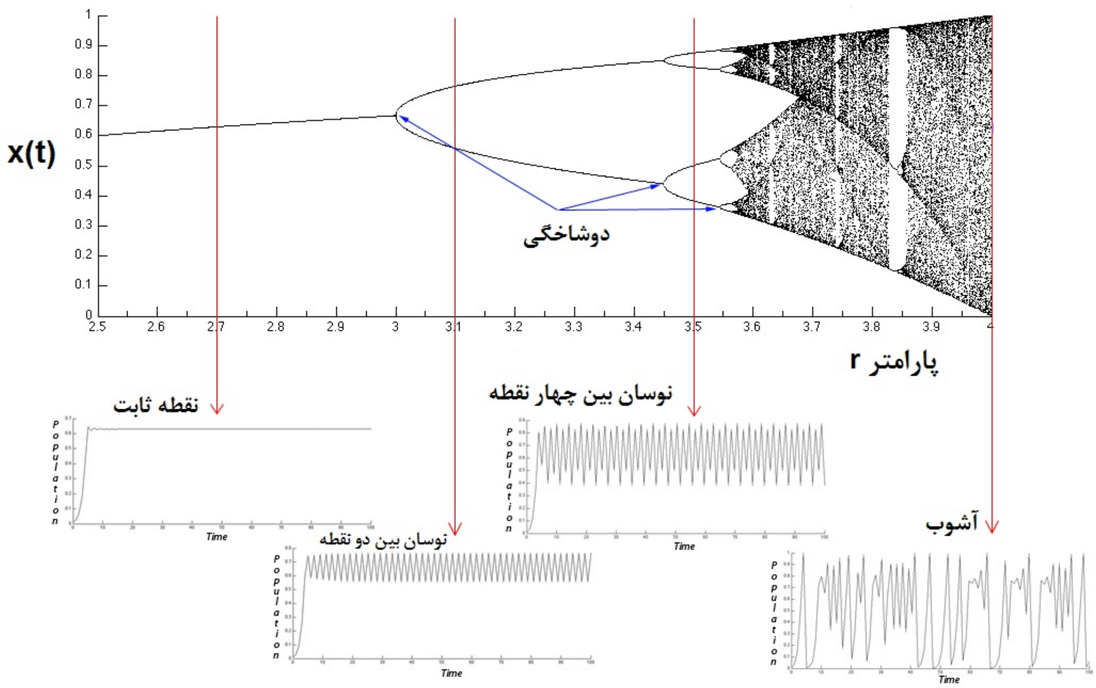
یکی از ساده‌ترین تابع‌های آشوبناک، نگاشت لوجیستیک می‌باشد که به صورت رابطه‌ی زیر تعریف می‌شود:

$$x(t+1) = rx(t)[1 - x(t)] \qquad 0 \le x \le 1 \qquad (۷.۲)$$

رفتار سیستم وابسته به مقدار r به سه بخش تقسیم می شود:
اگر r در بازه $[0, 3]$ باشد مقدار x بعد از چندگام به سوی مقدار خاصی پیش می رود و حل نقطه‌ی ثابت داریم .
اگر r در بازه $[3, 3/57]$ باشد x چند مقدار خاص را می پذیرد و رفتار سیستم به نظر تناوبی است.
اگر r در بازه $[3/57, 4]$ باشد سیستم رفتار آشوبناک دارد (شکل ۱.۲).

منشا نگاشت لوجیستیک به اکولوژی نظری بر می‌گردد؛ در سال ۱۹۷۰ مشخص گردید که نگاشت لوجیستیک می‌تواند رشد یا کاهش میزان جمعیت مجموعه جانداران بدون برهم‌نهی را به‌خوبی توصیف کند. قبل از این دو حالت برای تغییرات جمعیت در نظر می‌گرفتند؛ یا جمعیت به یک مقدار ثابت می‌رسید یا به‌صورت منظم نوسان می‌کرد، ولی نگاشت لوجیستیک احتمال دیگری هم در نظر گرفت، اینکه سیستم جمعیتی آشوبناک رفتار کند.

برای نگاشت لوجیستیک $Df(x) = -2rx$ است، که کمیتی وابسته به زمان برای مقادیر r در ناحیه آشوب

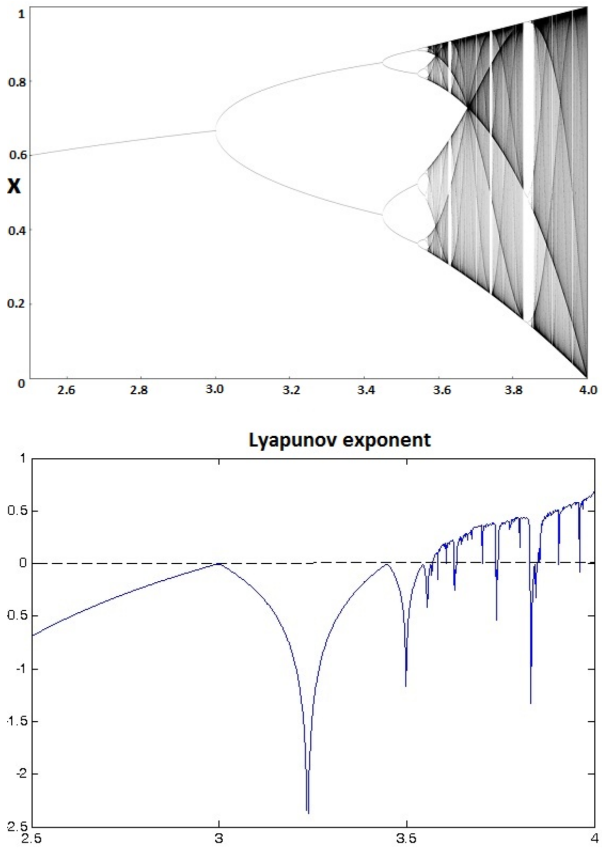


شکل ۱.۲: نمودار مقادیر نهایی نگاشت لوجیستیک بر حسب پارامتر r

می‌باشد. نمای لیاپانوف این‌گونه محاسبه می‌شود:

$$\lambda = \lim_{t\to\infty} \frac{۱}{t} \sum_{j=۱}^{t} \ln|-۲rx(j)| \tag{۸.۲}$$

که $x(j)$ تکرار j ام نگاشت می‌باشد. مقادیر نمای لیاپانوف به ازای مقادیر مختلف r در شکل (۲.۲) رسم شده است[۳].



شکل ۲.۲: نمودار نگاشت لوجیستیک و نمای لیاپانوف متناظر. نقاط ثابت نمای لیاپانوف منفی، نقاط چندشاخگی نمای لیاپانوف صفر و جاذب‌های آشوبی نمای لیاپانوف مثبت دارند.

فصل ۳

همگام‌سازی در شبکه‌های پیچیده

۱.۳ مقدمه

همگام‌سازی [۱] به بیانی ساده، تطبیق آهنگ چند سیستم، مثلاً یک جفت نوسانگر جفت شده، با برهم‌کنش متقابل است. همگام‌سازی اولین بار توسط کریستین هویگنس [۲] ، مخترع ساعت‌های آونگ‌دار مشاهده شد. او در سال ۱۶۶۵ مشاهده کرد که دو ساعت آونگ‌دار آویخته از یک تکیه‌گاه مشترک، آهنگ نوسان یکسانی دارند و حرکت آن‌ها خلاف جهت همدیگر بود؛ حتی اگر اختلالی به دو ساعت وارد می‌شد، ساعت‌ها دوباره به آهنگ حرکت یکسانی باز می‌گشتند. هویگنس این پدیده را همسازی دو ساعت [۳] نام‌گذاری کرد و این‌گونه تشریح کرد که هر آونگ باعث حرکتی غیر قابل مشاهده در تکیه‌گاه مشترک آونگ ها می‌شود و این حرکت به آونگ دیگر نیرویی در جهت همگام شدن آونگ‌ها وارد می‌کند. این نتیجه گیری درست بود و چیزی است که امروزه پدیده همگام سازی متقابل می‌نامند. در این آزمایش حرکت تکیه‌گاه که منجر به همگام‌سازی می‌شود را عامل جفت‌شدگی [۴] میان ساعت‌ها و همگام‌سازی را از نوع فاز مخالف [۵] می‌نامند. مطالعه‌ی همگام‌سازی امروزه بسیار فراتر از محدوده‌ی ساعت‌های آونگ‌دار است. بعد از هویگنس، لرد ریلی [۶] پدیده‌ی همگام‌سازی ستون‌های هوای در حال نوسان در لوله‌ها را مشاهده کرد. در

---

[۱] Synchronization

[۲] Christian Huygens

[۳] Sympathy of two clocks

[۴] Coupling

[۵] Anti-Phase

[۶] Lord Rayleigh

قرن بیستم به همراه رشد مهندسی برق و مخابرات، همگام‌سازی در مطالعه‌ی نوسان‌های مدارهای الکتریکی وارد شد. در ۱۹۲۰ اشل [۱] و وینسنت [۲] خاصیت همگام‌سازی مولد تریود [۳] را کشف کردند. آن‌ها دو مولد با اختلاف فرکانس ناچیز را با هم جفت کرده و نشان دادند که سیستم به خاطر برهم کنش با یک فرکانس مشترک نوسان می‌کند. همچنین کاربرد همگام‌سازی در آرایه‌های ابررسانایی پیوندگاه جوزفسون و آرایه‌های لیزر مورد توجه است.

پدیده‌ی همگام‌سازی و نوسانگرهای جفت‌شده به صورت گسترده‌ای در دنیای واقعی یافت می‌شوند. شبکه‌های عصبی، سلول‌های تنظیم‌کننده‌ی ضربان قلب، سلول‌های ترشح‌کننده‌ی انسولین،هماهنگ شدن صدای دسته‌ای از جیرجیرک‌ها و نورافشانی گروهی از کرم‌های شب‌تاب، نمونه‌هایی از همگام‌سازی در طبیعت هستند.

همینطور که گفته شد تنظیم آهنگ نوسانگرها، به دلیل برهم‌کنش ضعیف بین آن‌ها، همگام‌سازی نامیده می‌شود. در این‌جا آهنگ، همان فرکانس یا تعداد نوسان‌ها در واحد زمان است. برهم‌کنش هم توسط عامل برهم‌کنش صورت می‌پذیرد. تکیه‌گاه مشترک در ساعت‌های هویگنس، نور ساطع‌شده از کرم‌های شب‌تاب و جریان‌های الکتریکی در سلول‌های عصبی عامل برهم‌کنش بین اجزای سیستم است. قدرت این پارامتر جفت‌شدگی نقشی مهم در حالت نهایی همگام دارد.

عامل مهم دیگر در همگام‌سازی، شبکه‌ای است که اجزای تشکیل‌دهنده‌ی سیستم می‌سازند. این شبکه‌ها در قسمت‌های بعدی مورد بررسی قرار می‌گیرند[۴] [۵] [۶].

۲.۳ همگام‌سازی سیستم‌های آشوبناک

همان‌طور که همگام‌سازی برای نوسانگرهای متناوب مشاهده شده است، همگام‌سازی برای نوسانگرها و نگاشت‌های آشوبناک که دینامیکی نامتناوب، غیرقابل پیش‌بینی و حساس به شرایط اولیه دارند، نیز رخ می‌دهد. همگام‌سازی سیستم‌های آشوبناک را در حالت‌های همگام‌سازی کامل و موضعی و پایداری سرتاسری [۴] و موضعی [۵] بررسی می‌کنیم.

۳.۳ انواع همگام‌سازی

دو نگاشت لوجیستیک مشابه را در نظر می‌گیریم که جفت‌شدگی آن‌ها به صورتی است که $|x_۱ - x_۲|$ کوچک می‌باشد. اگر مقدار جفت‌شدگی افزایش یافته تا اختلاف بین متغیرها صفرشود $x_۱ = x_۲$ ، یعنی دینامیک نگاشت‌ها برهم کاملاً منطبق شوند و این حالت با گذشت زمان حفظ شود، می‌گوییم که همگام‌سازی کامل حاصل شده است.

[۱] W.H.Eceles

[۲] J.H.Winsent

[۳] Teriod generator

[۴] Global

[۵] Local

اگر جفت‌شدگی وجود نداشته باشد، دو نگاشت که متغیر x آن‌ها اختلاف کوچکی دارد، با گذشت زمان به صورت نمایی متناسب با بزرگترین نمای لیاپانوف از هم دور می‌شوند. هنگامی‌که جفت‌شدگی وجود داشته باشد واگرایی نگاشت‌ها از یکدیگر کوچک‌تر می‌شود و اگر این جفت‌شدگی به اندازه‌ی کافی بزرگ باشد به همگام‌سازی کامل می‌انجامد. در نتیجه مقدار جفت‌شدگی آستانه برای همگام‌سازی وجود دارد.

هرگاه در یک شبکه نگاشت‌ها یکسان نباشند یا مقدار پارامتر جفت‌شدگی به اندازه‌ی کافی بزرگ نباشد ، متغیرهای آن‌ها ممکن است به هم نزدیک شوند، ولی هیچ‌گاه بر هم منطبق نمی‌شوند. با وجود این‌که انطباق دقیق برای نگاشت‌های غیر مشابه اتفاق نمی‌افتد، اما می‌توان از اختلاف‌های کوچک چشم‌پوشی کرد و آن‌ها را همگام دانست. اگر فاصله‌ی بین دو نگاشت i و j را با d_{ij} نشان دهیم، یک سیستم δ-همگام است اگر به ازای همه‌ی i و j ها، $d_{ij} < \delta$ داشته باشیم. پارامتر نظم P_δ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$P_\delta(t) = \frac{۱}{N(N-۱)} \sum_{i=۱}^{N} \sum_{j=۱, i\neq j}^{N} \Theta(\delta - d_{ij}(t)) \qquad (۱.۳)$$

که N تعداد نگاشت‌ها و $\Theta(x)$ تابع پله‌ای است:

$$\Theta(x) = \begin{cases} ۰ & ,(x < ۰) \\ ۱ & ,(x \geq ۰) \end{cases} \qquad (۲.۳)$$

هرگاه P_δ به مقدار یک نزدیک شود، سیستم به حالت δ -همگام نزدیک می‌شود.

معیاری دیگر برای اندازه‌گیری میزان نزدیک شدن به همگام‌سازی کامل، شعاع گروه است. مجذور شعاع گروه عبارت است از:

$$R^{۲}(t) = \frac{۱}{N} \sum_{i=۱}^{N} (\Delta x_i^{۲}(t)) \qquad (۳.۳)$$

که در این رابطه $\Delta x_i(t) = x_i(t) - \langle x \rangle$ است و $\langle x \rangle$ مقدار میانگین مقادیر x نگاشت‌هاست.

ما شبکه‌هایی از نگاشت‌ها را که به شکل زیر جفت شده‌اند، در نظر می‌گیریم.

$$x_i(t+۱) = f[x_i(t)] + \varepsilon \sum_{j=۱}^{N} W_{ij}\{f[x_j(t)] - f[x_i(t)]\} \qquad (۴.۳)$$

در رابطه‌ی بالا $۱ \leq i \leq N$ و $f[x_i(t)]$ تابعی پیوسته است که دینامیک هر رأس از شبکه را مشخص می‌کند.