٦٩٩٠٠

دانشگاه مازندران

دانشکده علوم پایه

موضوع:

مباحثی در مجموعه احاطه کنندهٔ بحرانی گرافها

جهت اخذ درجهٔ کارشناسی ارشد رشتهٔ ریاضی

گرایش گراف وترکیبیات

استاد راهنما:

دکتر دوستعلی مژده

استاد مشاور:

دکتر حسین حاج ابوالحسن

نگارش :

سمیه میرزمانی

تیر ماه ۱۳۸۶

من لم یشکر المخلوق لم یشکر الخالق

سپاس بیکران پروردگار یکتا را که هستی ام بخشید و مرا به طریق علم و دانش رهنمون ساخت، و به همنشینی رهروان علم مفتخرم نمود و خوشه‌چینی از خرمن دانش را روزی ام ساخت. پروردگارا همواره شاکر رحمتت بوده‌ام و امروز بیشتر از پیش ، چرا که با اتمام این مرحله تحصیلی عظمتت را عظیم تر از قبل و لطفت را نامحدودتر از گذشته حس می کنم. دانش امروزم بیش از سالهای گذشته است، ولی هرچه به جلو گام برمی دارم بیشتر به ضعف خود در برابر زیبایی هایت پی می برم و این سرشار از غرور میسازدم، زیرا معبودی را بنده ام که بهترین است و شعور درک این که مطلق است را عطایم نموده، خداوندا رخصتم ده تا همیشه در راه شناختت قدم بر دارم. همچنین بر خود لازم می دانم از استاد راهنمای محترم ، جناب آقای دکتر مژده که با رهنمود های ارزنده همواره مرا مورد لطف خویش قرار داده اند صمیمانه تشکر و قدردانی نمایم. از آقایان دکتر متین‌فر و دکتر نعمتی که با سمت اساتید مدعو در جلسه دفاعیه حضور داشته اند بسیار متشکرم. از خانواده خود که در کلیه مراحل تحصیل همواره مشوق و پشتیبان اینجانب بوده اند، صمیمانه تشکر و قدردانی می نمایم. از کلیه دوستانی که مرا مورد لطف خویش قرار داده اند بسیار سپاسگذارم.

سمیه‌میرزمانی — تیرماه ۱۳۸۶

تقدیم به

پدرم

که صلابت و لطافت رفتارش همیشه برایم زمینه ساز حرکتی نو بوده است ،

مادرم

که محبت خالصانه‌اش، آرامشی آبی پدید آورد تاهمواره رهنمود بی تشویش لحظات زندگی باشم

و تمام کسانی که به نحوی در گذشتن از این مرحله به اینجانب از هیچ کمکی دریغ نکردند.

چکیده

در این رساله ابتدا مفهوم احاطه کنندهٔ نقطه–بحرانی و نقطه–بحرانی کلی را ارائه می دهیم، سپس کرانی برای قطر گرافهای k–نقطه–بحرانی وقتی $k \in \{۴, ۵, ٦\}$ و راس بحرانی ندارند می یابیم و گرافهایی میسازیم که نقطه–بحرانی اند، اما راس بحرانی ندارند.
در پایان با تعریف انواع گراف های هرری یعنی $H_{۲m,n}$ ، $H_{۲m+۱,۲n}$ و $H_{۲m+۱,۲n+۱}$ و ارائه دادن مجموعه احاطه کننده برای آنها، بررسی می کنیم که تحت چه شرایطی، گرافهای هرری بحرانی، نقطه–بحرانی و یا نقطه–بحرانی کلی اند.

فهرست مندرجات

مقدمه

مفهوم احاطه کننده در گرافها، در سال ۱۹۵۰ با بازی شطرنج شروع شد. [۹]
هدف مساله، استفاده معین از مهره های شطرنج، برای احاطه کردن مربع هایی از صفحه شطرنج بود.
می دانیم که یک وزیر، بصورت افقی عمودی یا قطری می تواند حرکت کند. فرض مساله، پیدا کردن کمترین تعداد وزیر که روی یک صفحه شطرنج می تواند قرار گیرد، بطوریکه هر مربعی، بوسیله یک وزیر یا بوسیله تنها یک حرکت وزیر گرفته شود.
ثابت شد که کمترین تعداد وزیر مورد نیاز، ۵ عدد است که این مساله به مساله ۵ وزیر مشهور شد.
رابطه بین ۵ وزیر و احاطه کننده ها، نشان می دهد که ما، هر راس از یک گراف را متناظر یک مربع از ۶۴ مربع صفحه شطرنج در نظر بگیریم، آنگاه ۲ راس در G مجاور هستند، اگر هر مربع متناظر، روی مربع دیگر در یک حرکت وزیر بتواند امتداد داده شود. این گراف به گراف وزیر مشهور است. از اینجا کمترین تعداد وزیر ها که تمام صفحه شطرنج را احاطه می کنند، درست یک مجموعه احاطه کننده در G است. جهت اطلاعات بیشتر در مورد مجموعه احاطه کننده در گرافها به منابع [۸] و [۹] و در مورد گرافهای بحرانی به منابع [۱],[۷],[۱۳] و [۱۴] مراجعه کنید.
مفهوم γ -راس بحرانی اولین بار در سال ۱۹۸۴ و ۱۹۸۸ توسط بریگهام [۱]، چین [۲] وداتون [۳] تعریف شد. [۱]

---

[۱] Brigham
[۲] Chin
[۳] Dutton

مفهوم نقطه—بحرانی و نقطه—بحرانی کلی اولین بار در سال ۲۰۰۴ توسط سامنر [۴] و برتن [۵] ارائه گردید.[۴]

در آن مقاله پس از اثبات قضایا، سوالی مطرح شد که ما به قسمتی از آن پاسخ دادیم.

پایان نامه حاضر شامل چهار فصل می‌باشد.

در فصل ۱ برای درک آسانتر مطالب و موضوعات نا آشنا تعدادی از تعاریف و نتایجی را که قبلاً با آنها آشنا شده‌ایم و نیز تعاریف و قضایایی که در فصل های بعدی این پایان نامه مورد استفاده قرار خواهند گرفت را بیان می نماییم.

در فصل ۲ به بررسی مفهوم نقطه—بحرانی و نقطه—بحرانی کلی و قضایای مربوط به آن می پردازیم.

در فصل ۳ کرانی برای قطر گرافهای نقطه—بحرانی در حالت خاص ارائه می دهیم. که پاسخ به بخشی از سوالی است که توسط سامنر و برتن ارائه گردید.[۴]

در فصل ۴ بررسی می کنیم گراف های هرری تحت چه شرایطی بحرانی، نقطه—بحرانی و یا نقطه—بحرانی کلی اند.

---

[۴] Sumner
[۵] Burton

فصل ۱

مقدمات و پیش نیازها

مقدمه

برای درک آسانتر مطالب و موضوعات نا آشنا که در فصل های بعدی این پایان نامه آمده تعدادی تعاریف و نتایج بیان می گردد.

۱—۱ تعاریف اولیه

تعریف ۱.۱ گراف، از یک مجموعه V به نام مجموعه رئوس (نقاط) و رابطه‌ای بین این مجموعه رئوس تشکیل شده است. مجموعه رئوس در گراف را با نماد V و مجموعه یالها را با نماد E نشان می دهند و در این حالت گراف حاصل را با نماد $G=(V,E)$ نشان می دهند.

تعریف ۲.۱ هر زیر مجموعه دو عنصری از V که در آن رابطه صدق کند یک یال نامیده می شود.

تعریف ۳.۱ اگر E مجموعه‌ای از زوجهای مرتب در V باشد یعنی $E \subseteq V \times V$ ، در این صورت $G=(V,E)$ را گراف جهت دار یا سودار می نامند.

تعریف ۴.۱ اگر یالی در G، یک راس را به خودش وصل کند یعنی $e=(a,a)$ یا $e=\{a,a\}$، در این صورت به یال e یک طوقه گفته می شود.

تعریف ۵.۱ تعداد یالهای گذرنده از یک راس را درجه آن راس می نامند و برای راس v، درجه آن را با $deg\ \ v$ نشان می دهند.

تعریف ۶.۱ بیشترین درجه در میان درجات رئوس در گراف $G = (V, E)$ را با نماد $\Delta(G)$ و کمترین درجه را با نماد $\delta(G)$ نشان می دهند.

تعریف ۷.۱ گرافی که در آن $\delta(G) = \Delta(G)$ برقرار باشد را گراف منتظم می نامند.

تعریف ۸.۱ اگر v یک راس در گراف G باشد نماد $G - v$ را زیر گرافی از G در نظر گرفته که در آن v و تمام یالهای گذرنده از v حذف شوند. اگر e یک یال باشد $G - e$ یعنی گرافی که یال e از آن حذف شد.

تعریف ۹.۱ گرافی مانند $G = (V, E)$ که در آن $V_1 \cap V_2 = \emptyset, V = V_1 \cup V_2, V_1 \neq \emptyset, V_2 \neq \emptyset$ و هر یال G رابط بین راسی از V_1 و راسی از V_2 باشد،آنگاه G را یک گراف دو بخشی گویند.

تعریف ۱۰.۱ گرافی مانند $G = (V, E)$ که در آن V به m زیر مجموعه نا تهی افراز شود، طوری که هر یال e در E راسی از یک بخش را به راسی از بخش دیگر وصل کند گراف m-بخشی یا به اختصار گراف بخشی نامیده می شود.

تعریف ۱۱.۱ اگر $G=(V,E)$ یک گراف دو بخشی باشد و $V=V_1\cup V_2$ و بین هر دو راس از V_1 و V_2 یک یال موجود باشد در این صورت آن را یک گراف دو بخشی کامل نامند.
اگر $|V_1|=m$ ، $|V_2|=n$ در این صورت گراف دو بخشی کامل G را با نماد $K_{m,n}$ نشان می دهند.
گراف m-بخشی کامل نیز بطور مشابه تعریف می شود. لذا در گراف m-بخشی کامل از هر راس یک بخش به هر راس بخش های دیگر یک یال وجود دارد.

تعریف ۱۲.۱ گراف کامل گرافیست که بین هر دو راس آن یالی وجود داشته باشد. گراف کامل n راسی را با نماد K_n نشان می دهیم.

تعریف ۱۳.۱ اگر v یک راس دلخواه در گراف $G=(V,E)$ باشد. آنگاه $N[v]$ نشان دهنده تمام مجاورهای v به انضمام خود v می باشد که همسایگی بسته v نام دارد. $N(v)$ مبین تمام مجاورهای v می باشد یعنی $N(v)=N[v]\cup\{v\}$.

تعریف ۱۴.۱ اگر x یک عدد حقیقی باشد آنگاه:
$\lceil x\rceil$ نشان دهنده کوچکترین عدد صحیح بزرگتر یا مساوی x و
$\lfloor x\rfloor$ نشان دهنده بزرگترین عدد صحیح کوچکتر یا مساوی x می باشد.

تعریف ۱۵.۱ برای یک مجموعه S، یک راس v یک همسایگی خصوصی u است اگر $N[v]\cap S=\{u\}$ و مجموعه تمام همسایگان خصوصی u نسبت به مجموعه S را که با $pn[u,s]$ نمایش داده می شود ،چنین تعریف می گردد:

$$pn[u,s]=\{v\mid N[v]\cap S=\{u\}\}$$

تعریف ۱.۱۶ زیر مجموعه $S \subseteq V(G)$ را یک مجموعه احاطه کننده برای گراف G گوییم، هرگاه هر راس در $V \setminus S$ ، مجاور راسی در S باشد. که $V \setminus S$ یعنی از مجموعه رئوس $V(G)$ رئوس مجموعه S حذف شود.

تعریف ۱.۱۷ به کمترین اندازه از مجموعه‌های احاطه کننده برای گراف G را، عدد احاطه کننده می گوییم و با $\gamma(G)$ نشان می دهیم.

تعریف ۱.۱۸ مجموعه احاطه کننده ای که دارای اندازه $\gamma(G)$ باشد را به اختصار با MDS نشان می دهیم.

تعریف ۱.۱۹ فرض کنید S یک زیر مجموعه از رئوس V در گراف $G = (V, E)$ باشد. S را یک مجموعه احاطه کننده همبند برای گراف G گوییم هرگاه زیر گراف القا شده توسط S همبند باشد.
مجموعه احاطه کننده همبند باکمترین تعداد عضو را مجموعه احاطه کننده همبند مینیمم می نامیم و اندازه آنرا با نماد $\gamma_c(G)$ نشان می دهیم.

تعریف ۱.۲۰ فرض کنید S یک زیر مجموعه از رئوس V در گراف $G = (V, E)$ باشد. S را یک مجموعه احاطه کننده کلی یا تام برای گراف G گوییم هرگاه برای هر راس $v \in V$، راسی مانند $u \in S$ موجود باشد به طوری که u مجاور با v باشد. به عبارت دیگر S دارای راس تنها نباشد.
مجموعه احاطه کننده کلی با کمترین تعداد عضو را مجموعه احاطه کننده کلی مینیمم می نامیم و اندازه آنرا با نماد $\gamma_t(G)$ نشان می دهیم.

تعریف ۲۱.۱ فرض کنید S یک زیر مجموعه از رئوس V در گراف $G=(V,E)$ باشد. S را یک مجموعه احاطه کننده مستقل برای گراف G گوییم هرگاه رئوس القا شده توسط S، مجموعه مستقل راسی باشد.
مجموعه احاطه کننده مستقل راسی با کمترین تعداد عضو را مجموعه احاطه کننده مستقل مینیمم می نامیم و اندازه آنرا با نماد $\gamma_i(G)$ نشان می دهیم.

تعریف ۲۲.۱ گراف $G=(V,E)$ یال بحرانی است اگر اضافه کردن هر یال به هر دو راس غیر مجاور سبب شود عدد احاطه کننده کاهش یابد به عبارت دیگر اگر a و b دو راس غیر مجاور در G باشند آنگاه $\gamma(G+ab)<\gamma(G)$. که در اینجا $G+ab$ گراف حاصل از الحاق یال ab به G است.

تعریف ۲۳.۱ یک راس در گراف $G=(V,E)$ بحرانی است هرگاه حذف این راس سبب شود عدد احاطه کننده کاهش یابد به عبارت دیگر $\gamma(G-v)<\gamma(G)$. که در اینجا $G-v$ گراف حاصل از حذف راس v از G می باشد.

تعریف ۲۴.۱ گراف $G=(V,E)$ راس بحرانی است هرگاه هر راس آن بحرانی باشد. مجموعه رئوس بحرانی یک گراف را با G' نشان می دهیم.

تعریف ۲۵.۱ یک راس در گراف $G=(V,E)$ را ثابت (خنثی) می نامیم هرگاه $\gamma(G-v)=\gamma(G)$.

تعریف ۲۶.۱ وقتی می گوییم گراف k- راس بحرانی یا k- یال بحرانی است یعنی $\gamma(G) = k$ و حذف هر راس یا اضافه کردن هریال $\gamma(G)$ را کاهش می دهد.

تعریف ۲۷.۱ اگر u, v دو راس در گراف G باشند. یک مسیر uv فاصله کوتاهترین مسیر از u به v است و این فاصله را با نماد $d_G(u, v)$ نشان می دهیم.

تعریف ۲۸.۱ قطر یک گراف عبارت است از $d(G) = diam(G) = max\{d_G(u, v);\ u, v \in G\}$.

تعریف ۲۹.۱ اگر $G = (V, E)$ یک گراف باشد که $|V| = n$ در این صورت مکمل G را با $\bar{G} = (\bar{V}, \bar{E})$ نشان داده که $\bar{V} = V$ و $\bar{E} = E_{K_n} - E$ مکمل یک گراف n راسی دقیقا نسبت به گراف کامل n راسی در نظر گرفته می شود. در اینجا E_{K_n} یالهای گراف کامل n—راسی می باشد.

فصل ۲

احاطه کننده نقطه—بحرانی و نقطه—بحرانی کلی

مقدمه

در این فصل به بررسی گرافهای نقطه—بحرانی و نقطه—بحرانی کلی می پردازیم و مشخصه‌ای برای گرافهای ۲—نقطه—بحرانی و ۲—نقطه—بحرانی کلی می یابیم همچنین گرافهای نقطه—بحرانی را با در نظر گرفتن نقطه‌ی بحرانی مورد بررسی قرار می دهیم.[۴]

۲—۱ احاطه کننده نقطه—بحرانی (کلی)

تعریف ۱.۲ برای هر جفت رئوس $v, u \in G$ ، گراف بدست آمده از منطبق کردن u و v را با $G.uv$ نشان می دهیم و (uv) را راس حاصل از انطباق u و v می نامیم.

تعریف ۲.۲ برای گراف G اگر منطبق کردن هر جفت رئوس مجاور و برداشتن یال مابین آنها سبب شود عدد احاطه کننده گراف جدید کاهش یابد آنگاه گراف را نقطه—بحرانی می گویند یا به عبارتی برای هر دو راس مجاور u و v داشته باشیم، $\gamma(G.vu) < \gamma(G)$.

تعریف ۳.۲ برای گراف G اگر منطبق کردن هر جفت رئوس دلخواه سبب شود عدد احاطه کننده گراف جدید کاهش یابد آنگاه گراف را نقطه—بحرانی کلی می گویند یا به عبارتی برای هر دو راس دلخواه u و v داشته باشیم، $\gamma(G.vu) < \gamma(G)$.

لم ۴.۲ فرضٌ کنیم برای گراف G، $a, b \in V(G)$ باشد. آنگاه $\gamma(G.ab) < \gamma(G)$ اگر وفقط اگر یک MDS شامل a و b موجود باشد، یا حداقل یکی از a یا b بحرانی باشند.

اثبات: $(\Leftarrow)$ فرض کنیم $a,b \in V(G)$ بطوریکه $\gamma(G.ab) < \gamma(G)$. فرض کنیم S یک MDS از $G.ab$ باشد.

اگر $(ab) \in S$ آنگاه $S^* = [S-(ab)] \cup \{a,b\}$ یک MDS برای G می باشد که شامل a و b می باشد.

اگر $(ab) \notin S$ آنگاه $t \in S$ وجود دارد به طوری که t با (ab) مجاور است و با $t \leftrightarrow (ab)$ نشان می دهیم.

اگر $t \in N(a) \cap N(b)$، آنگاه S، G را احاطه می کند که با $\gamma(G.ab) < \gamma(G)$ تناقض دارد. بنابراین t تنها با یکی از a یا b در G مجاور است. فرض کنیم $a \leftrightarrow t$ آنگاه S، $G-b$ را احاطه می کند در اینصورت $b \in G'$. برای $b \leftrightarrow t$ نیز به همین ترتیب ثابت می شود.

$(\Rightarrow)$ اگر a و b عضو یک MDS از G مانند S باشند آنگاه S یک مجموعه احاطه کننده برای $G.ab$ از اندازه $\gamma(G) - ۱$ می باشد که $\gamma(G.ab) < \gamma(G)$ و اگر $a \in G'$ آنگاه هر MDS از $G-a$ یک مجموعه احاطه کننده برای $G.ab$ از اندازه $\gamma(G) - ۱$ می باشد که $\gamma(G.ab) < \gamma(G)$. برای $b \in G'$ نیز همینطور اثبات می شود. $\square$

لم زیر نتیجه ای از لم قبل می باشد.

لم ۵.۲ اگر G یک گراف باشد بطوریکه $\gamma(G) = k \geq ۲$، آنگاه G نقطه—بحرانی (نقطه—بحرانی کلی) است اگر وفقط اگر هر دو راس مجاور غیر بحرانی (هر دو راس غیر بحرانی) به یک مجموعه احاطه کننده مینیمم (MDS) متعلق باشند.

در اینجا چند نوع از گرافهای نقطه—بحرانی و نقطه—بحرانی کلی را ارائه می دهیم.

۱) $P_{۳k+۱}$، نقطه بحرانی است.

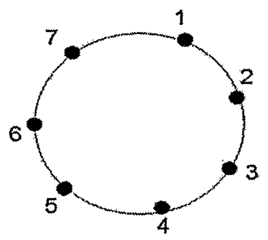
باید ثابت کنیم هر دو راس مجاور عضو یک MDS است یا حداقل یکی از آنها بحرانی است. اگر رئوس این نوع مسیر را شماره‌گذاری کنیم رئوسی که شماره آنها $۳k + ۱$ باشد، بحرانی هستند. کافیست نشان دهیم دو راس که بین دو راس بحرانی هستند در یک MDS قرار می گیرند. می دانیم $\gamma(P_{۳k+۱}) = k + ۱$ می باشد. هر دو راسی را که بین دو راس بحرانی انتخاب کنیم می

تواند ۴ راس را احاطه کند و باقی رئوس یعنی $۳k + ۱ - ۴$ توسط $k - ۱$ راس احاطه می شود زیرا $۳k - ۳ = ۳(k - ۱)$.

مثال: $P_۷$ نقطه—بحرانی است.

۲) $C_{۳k+۱}$، نقطه—بحرانی کلی است. چرا که هر راس آن یک راس بحرانی می باشد و لذا با توجه به لم ۵.۲، نقطه—بحرانی کلی می باشد.

مثال: $C_۷$ نقطه—بحرانی کلی است.



۳) گراف $K_t \times K_t$ برای $t \geq ۳$، با توجه به [2]، راس —بحرانی است و با توجه به لم ۵.۲ نقطه—بحرانی کلی می باشد.

۴) گراف $C_۸\langle ۱, ۴\rangle$ گرافی است با راس های $\{v_۰, v_۱, ..., v_۷\}$ و یالهای $\{v_iv_{i+j(mod ۸)} \quad | \; i \in \{۰, ۱, ..., ۷\}, \quad j \in \{۱, ۴\}\}$ با توجه به [2]، ۳—راس بحرانی است و با توجه به لم ۵.۲ نقطه— بحرانی کلی می باشد.

تعریف ۶.۲ یک راس در یک گراف قابل استفاده است اگر متعلق به حداقل یک MDS از G باشد اگر هر راس از گراف قابل استفاده باشد، آنگاه گراف را قابل استفاده می نامند.

لم ۷.۲ اگر G یک گراف باشد و v یک راس بحرانی باشد، آنگاه هر عضو از $N[v]$، قابل استفاده است.

اثبات: اگر S یک MDS از $G - v$ باشد و $u \in N(v)$ آنگاه $S \cup \{u\}$ و $S \cup \{v\}$ یک MDS از G هستند. □