

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ



وزارت علوم ، تحقیقات و فناوری  
دانشگاه بین المللی امام خمینی (ره)  
دانشکده علوم پایه ، گروه فیزیک

پایان نامه برای دریافت درجه کارشناسی ارشد  
در رشته فیزیک اتمی و مولکولی

عنوان :

# تقریب زدن ماتریس چگالی میدان تابشی به روش بیشینه درست نمایی

استاد راهنما :

دکتر محمد رضا بذرافکن

استاد مشاور :

دکتر الهه نحوی فرد

نگارنده :

سیمین رئیسی

خرداد ماه ۱۳۸۷

**تقدیم به**

**آنان که مرا یار شدند . . .**

## چکیده

نمایش توابع توزیع شبه احتمال  $S$ - پارامتری شده حالت های کوانتومی میدان تابشی را مرور می کنیم . نشان می دهیم که توموگرام های اپتیکی ، که می توانند با استفاده از آشکارسازی هموداین اندازه گیری شوند ، حالت کوانتومی میدان تابشی را از طریق تبدیل معکوس رادون تعیین می کنند . نشان می دهیم که روش بیشینه درست نمایی اعمال شده بر نمودارهای ستونی بدست آمده از آزمایش های هموداین ، می تواند حالت کوانتومی را در مدل به کار رفته در مساله ما تعیین کند . این روش را روی نمودارهای ستونی تولید شده به وسیله رایانه (متناظر با آشکارسازی هموداین ) اعمال می کنیم و حالت های کوانتومی را برآورد می نماییم .

لغات کلیدی : ماتریس چگالی ، تابع شبه احتمال ، آشکارسازی هموداین ، تبدیل رادون ، اندازه گیری حالت کوانتومی ، روش بیشینه درست نمایی .

حمد و سپاس بیکران مهربانی را که حتی دمی ، دریای بی انتهای لطفش را از من دریغ نساخت و حضور همواره اش آرامش بخش قلب و روشنی بخش زندگی ام بوده و همیشه بهتر از آن که می خواستم و لایقش بودم ارزانی ام داشته است.

از اساتید بسیار عزیز و گرانقدرم جناب آقای دکتر محمد رضا بذرافکن و سرکار خانم دکتر الهه نحوی فرد که علاوه بر نمایان ساختن دریچه ای از زیبایی های دنیای فیزیک ، به من درس انسانیت و بزرگواری نیز دادند ، بسیار سپاسگزارم و همواره به خاطر هدیه بزرگی که ارزانی ام داشته اند ، خود را مدیون آنها می دانم .  
از پدر و مادر عزیز و مهربانم که گرمای بی دریغ وجودشان مایه دلگرمی ام و دعای خیر و تشویق هایشان تکیه گاه و روشنی بخش راهم بوده و خواهد بود و همواره خویشتن را مرهون فضائل و کمالات روحی و اخلاقی آنها می دانم ؛  
کمال تشکر و سپاسگزاری را دارم .

از دوست و همراه راست پیمان زندگی ام ، همسر مهربان و با محبتم ، که یاری صمیمانه و وصف ناپذیرش مایه امید و تلاشم بود و مشکلات را بر من هموار ساخت ، صمیمانه متشکرم .

از خواهر با صفا و مهربانم و برادرهای خوب و عزیزم که همواره باعث شادی و دلگرمی من بوده اند خالصانه سپاسگزارم.

## فهرست مطالب

کوانتش میدان الکترومغناطیسی در فضای آزاد .....	۱
۱-۱ معادلات ماکسول در خلا .....	۱
۲-۱ نوردائی پیمانه ای معادلات ماکسول .....	۲
۳-۱ معادلات موج در پیمانه کولن .....	۲
۴-۱ بسط میدان الکترومغناطیسی بر حسب امواج تخت .....	۳
۵-۱ هامیلتونی میدان الکترومغناطیسی .....	۵
۶-۱ کوانیترزه کردن هامیلتونی میدان .....	۷
۷-۱ عملگر پتانسیل برداری .....	۸
۸-۱ روابط جا بجا گری برای میدانهای الکترومغناطیس در خلاء و در زمان های .....	۹
۲ حالت های همدوس میدان کوانتومی الکترومغناطیسی .....	۱۲
۱-۲ مقدمه .....	۱۲
۲-۲ حالت همدوس برای میدان تک مد .....	۱۴
۳-۲ حالت همدوس به عنوان حالت خلاء انتقال یافته .....	۱۶
۴-۲ میدان الکتریکی در حالت همدوس $ \alpha\rangle$ .....	۱۷
۵-۲ ویژگی فوق کامل بودن حالت های همدوس .....	۲۰
۳ توصیف حالت های کوانتومی میدان بوسیله توابع شبه احتمال .....	۲۳
۱-۳ بسط های مرتب یک عملگر .....	۲۳
۲-۳ نمادهای یک عملگر .....	۲۶

- ۳-۳ نمایش گلاوبر-سودارشان عملگر چگالی  $P(\alpha)$  ..... ۳۱
- ۴-۳ تابع توزیع شبه احتمال ویگنر ..... ۳۴
- ۵-۳ تابع شبه احتمال  $Q(\alpha)$  هوسی می-کانو ..... ۴۱

#### ۴ آشکار سازی هموداین اپتیکی ..... ۴۴

- ۱-۴ تیغه شکافنده موج ..... ۴۴
- ۲-۴ شکافنده موج متقارن ..... ۴۶
- ۳-۴ توصیف کوانتومی رفتار باریکه شکاف ..... ۴۸
- ۴-۴ تبدیل حالت‌های کوانتومی به وسیله باریکه شکاف ..... ۴۹
- ۵-۴ آمار شمارگان فوتون در پورت های خروجی ..... ۵۵
- ۶-۴ آشکارسازی هموداین ..... ۶۰
- ۷-۴ بررسی آشکارسازی هموداین از دیدگاه مکانیک کوانتومی ..... ۶۸
- ۸-۴ اندازه گیری توموگرام اپتیکی تابع ویگنر ..... ۷۴

#### ۵ تبدیل رادون Radon transform ..... ۸۴

- ۱-۵ تبدیل رادون برای توابع دو متغیره ..... ۸۴
- ۲-۵ خواص اساسی تبدیل تابع رادون ..... ۸۸
- ۳-۵ رابطه تبدیل رادون و تبدیل انتگرال فوریه ..... ۹۱
- ۴-۵ معکوس سازی تبدیل رادون به روش تبدیل انتگرالی ..... ۹۵
- ۵-۵ توموگرام اپتیکی چند حالت کوانتومی میدان تک مد ..... ۹۷

۶ روش بیشینه درست نمائی برای استنتاج توابع توزیع احتمال ..... ۱۰۱

۱-۶ توابع توزیع احتمال و توابع توزیع فراوانی ..... ۱۰۱

۲-۶ ویژگی های یک تابع توزیع احتمال  $P(x)$  ..... ۱۰۴

۳-۶ تقریب گر ها ..... ۱۰۵

۴-۶ روش بیشینه درست نمائی ..... ۱۰۷

۵-۶ تقریب گر بیشینه درست نمائی ..... ۱۱۱

۷ بازسازی تابع ویگنر از توموگرام اپتیکی بوسیله روش بیشینه درست نمائی ..... ۱۱۳

۱-۷ طرح کلی مسئله ..... ۱۱۳

۲-۷ عملگر چرخش در فضای فاز ..... ۱۱۳

۳-۷ متوسط فازی توموگرام اپتیکی و تابع توزیع تعداد فوتونها ..... ۱۱۶

۴-۷ اثر ضریب بهره آشکارساز در اندازه گیری هموداین ..... ۱۱۸

۵-۷ محاسبه تابع توزیع احتمال تعداد فوتونها با روش بیشینه درست نمائی ..... ۱۲۰

۶-۷ روش تکرار برای بدست آوردن  $\hat{\rho}$  بیشینه کننده تابع درست نمائی ..... ۱۲۲

۷-۷ محاسبه  $\rho_{n,n}$  ها برای چند حالت کوانتومی میدان تک مد ..... ۱۲۶

۸-۷ محاسبه تابع ویگنر در نقاط مختلف فضای فاز ..... ۱۳۳

۹-۷ محاسبه تابع شبه احتمال ویگنر با استفاده از روش بیشینه درست نمائی برای چند حالت کوانتومی میدان. ۱۳۸

مراجعه ..... ۱۴۳



## فهرست شکل ها

- شکل (۱-۱) کاواک مستطیل شکل ..... ۳
- شکل (۱-۲) رفتار توزیع پواسونی برای  $|\alpha| = |1+i|$  ..... ۱۵
- شکل (۲-۲) رفتار توزیع پواسونی برای  $|\alpha| = 10$  ..... ۱۵
- شکل (۳-۲) تابع توزیع میدان در فازهای مختلف در حالت همدوس ..... ۱۹
- شکل (۱-۳) تابع ویگنر  $W(\xi, \pi)$  را می توان مشابه تابع توزیع همزمان مکان و تکانه در مکانیک آماری کلاسیک دانست. ..... ۴۱
- شکل (۱-۴) تیغه شکافنده موج ..... ۴۴
- شکل (۲-۴) تیغه شکافنده موج که در آن دامنه امواج تخت ورودی  $a_1$  و  $a_2$  و دامنه امواج خروجی نظیر  $a_1$  و  $a_2$  هستند. ..... ۴۶
- شکل (۳-۴) تیغه شکافنده موج که در آن حالت ورودی یک حالت حاصل ضربی با مولفه های همدوس به شکل  $|\Psi_{in}\rangle = |\beta_0\rangle_1 |\gamma_0\rangle_2$  است. ..... ۵۲
- شکل (۴-۴) تیغه شکافنده موج که در آن حالت ورودی یک حالت حاصل ضربی با مولفه های همدوس به شکل  $|\Psi_{in}\rangle = |\beta_0\rangle_1 |\gamma_0\rangle_2$  است و از خروجی (۱) حالت همدوس  $\left| \frac{\beta_0 - \gamma_0}{\sqrt{2}} \right\rangle_1$  و از خروجی (۲) حالت همدوس  $\left| \frac{\beta_0 + \gamma_0}{\sqrt{2}} \right\rangle_2$  بیرون می آید. ..... ۵۳
- شکل (۵-۴) تیغه شکافنده موج که در آن ورودی  $1'$  دارای یک حالت دلخواه  $\hat{\rho}$  با تابع گلاوبر-سودارشان  $P(\beta)$  باشد ولی ورودی  $2'$  یک حالت همدوس داشته باشد. ..... ۵۵
- شکل (۶-۴) یک تیغه شکافنده موج متقارن و بدون اتلاف  $50 : 50$  ..... ۵۶
- شکل (۷-۴) سطح  $K(\beta)$  برای پارامترهای  $n_1 = n_2 = 3, \alpha = 0$  ..... ۵۸
- شکل (۸-۴) سطح  $K(\beta)$  برای پارامترهای  $n_1 = n_2 = 3, \alpha = 1$  ..... ۵۹
- شکل (۹-۴) سطح  $K(\beta)$  برای پارامترهای  $n_1 = n_2 = 3, \alpha = 2$  ..... ۵۹
- شکل (۱۰-۴) سطح  $K(\beta)$  برای پارامترهای  $n_1 = n_2 = 3, \alpha = 3$  ..... ۶۰
- شکل (۱۱-۴) آشکارساز هموداین تیغه شکافنده موج متقارن و بدون اتلاف  $50 : 50$  ..... ۶۱
- شکل (۱۲-۴) تابع توزیع احتمال  $W(\mathcal{E}_{0r}, \mathcal{E}_{0i})$  در صفحه مختلط  $\mathcal{E}_{0r}, \mathcal{E}_{0i}$  ..... ۶۲
- شکل (۱۳-۴) تابع  $W(\mathcal{E}_0)$  در دستگاه مختصات چرخیده به اندازه  $\varphi$  در جهت مثبت مثلثاتی ..... ۶۲
- شکل (۱۴-۴) ورودی  $1'$  آشکارساز هموداین دارای فازوری تصادفی با تابع توزیع گوسی دو بعدی است. ..... ۶۳
- شکل (۱۵-۴) یک موج کاملاً هارمونیک برای ورودی  $e_2(t)$  آشکارساز هموداین ..... ۶۵
- شکل (۱۶-۴) نمودار تابع توزیع چگالی احتمال  $p(e_1; \varphi)$  برای تابع توزیع فازور  $W(\mathcal{E})$  ..... ۶۶
- شکل (۱۷-۴) نمودار تابع توزیع چگالی احتمال  $p(e_1; \varphi)$  برای تابع توزیع فازور  $W(a_1)$  ..... ۶۶
- شکل (۱۸-۴) نمودار تابع توزیع چگالی احتمال  $p(e_2; \varphi)$  برای تابع توزیع فازور  $W(a_2)$  ..... ۶۷
- شکل (۱۹-۴) سطح  $K_{n_{21}}(\alpha, \beta)$  با پارامترهای  $n_{21} = 2, \alpha = 0$  ..... ۷۲
- شکل (۲۰-۴) سطح  $K_{n_{21}}(\alpha, \beta)$  با پارامترهای  $n_{21} = 2, \alpha = 0.5$  ..... ۷۲
- شکل (۲۱-۴) سطح  $K_{n_{21}}(\alpha, \beta)$  با پارامترهای  $n_{21} = 2, \alpha = 10$  ..... ۷۳

- شکل (۴-۲۲) نمودار تابع توزیع احتمال  $W(n_{21}, \alpha)$  را برای حالت کوانتومی مورد بحث و مقدار داده شده پارامتر  $\alpha = 10 + 0i$  نشان می دهد. ..... ۷۴
- شکل (۵-۱) توصیف خط  $L$ ؛  $\hat{\xi}(\phi)$  بردار یک عمود بر خط  $L$  و  $p \geq 0$  فاصله عمودی خط  $L$  از مبدا مختصات ..... ۸۵
- شکل (۵-۲) تبدیل فوریه دو بعدی  $\tilde{f}(\bar{k})$  در نقطه  $\hat{\xi} \bar{k} = s$  برابر است با تبدیل فوریه یک بعدی شعاعی (نسبت به متغیر  $p$ ) از تبدیل رادون  $\check{f}(p, \hat{\xi})$  در جهت  $\hat{\xi}$  ..... ۹۲
- شکل (۵-۳) می توان تبدیل معکوس رادون را بوسیله عمل تبدیل فوریه انجام داد. .... ۹۳
- شکل (۶-۱) نتایج یک آزمایش شامل  $m = 10$  اندازه گیری مستقل  $x$  که به وسیله کامپیوتر شبیه سازی شده است و به وسیله روش بیشینه درست نمائی مقدار  $\tau$  حدس زده شده است. بازه  $0 \leq x \leq 10$  به بازه های  $\Delta x = 0.1$  تقسیم شده است و هیستوگرام نشان داده شده فراوانی نسبی  $x$  های موجود در بازه ها را نمایش می دهد. .... ۱۰۹
- شکل (۶-۲) نتایج یک آزمایش شامل  $m = 50$  اندازه گیری مستقل  $x$  که به وسیله کامپیوتر شبیه سازی شده است. مشاهده می شود تابع درست نمائی  $L(\tau)$  دارای قله تیز تری خواهد شد. .... ۱۱۰
- شکل (۶-۳) نمودار برای 5000 آزمایش نمودار فراوانی  $\bar{\tau}$  های بدست آمده را نشان می دهد. .... ۱۱۱
- شکل (۷-۱) در نقطه ماکزیمم (در صورت وجود) باید  $\frac{\partial L}{\partial \bar{y}}$  و  $\frac{\partial \Phi}{\partial \bar{y}}$  موازی شوند. .... ۱۲۳
- شکل (۷-۲) روش تکرار؛ اگر چه  $\bar{y}^{(i)}$  آشکارا اکسترمم مقید نیست ولی اگر بر سطح کره و در جهت مؤلفه ای از  $\frac{\partial L}{\partial \bar{y}}$  که موازی سطح کره است (و لذا بر  $\frac{\partial \Phi}{\partial \bar{y}}$  عمود است) پیش برویم به نقطه  $\bar{y}^*$  یعنی نقطه اکسترمم مقید نزدیک می شویم. .... ۱۲۴
- شکل (۷-۳) هیستوگرام بهنجار  $HW_{\eta}(\mathcal{E}_i; \theta_j)$  برای حالت خلاء فشرده ( $\zeta = 0.8$ ) که بوسیله کامپیوتر تولید شده است. فرض شده است که تعداد اندازه گیری ها به ازاء هر فاز  $\theta_j$  برابر  $M = 15000$  باشد و ضریب بهره آشکارساز  $\eta = 0.85$  در نظر گرفته شده است. .... ۱۲۷
- شکل (۷-۴) هیستوگرام بهنجار  $H \bar{P}_{\eta}(\mathcal{E}_i)$  برای حالت خلاء فشرده ( $\zeta = 0.8$ ) ..... ۱۲۷
- شکل (۷-۵) تابع توزیع فراوانی فوتونها در حالت خلاء فشرده ( $\zeta = 0.8$ ) ..... ۱۲۸
- شکل (۷-۶) هیستوگرام بهنجار شده  $HW_{\eta}(\mathcal{E}_i; \theta_j)$  برای حالت همدوس ( $\alpha = 2$ ) که با کامپیوتر تولید شده است. تعداد اندازه گیری ها در هر فاز نوسانگر محلی برابر  $M = 15000$  در نظر گرفته شده است و ضریب بهره  $\eta = 0.85$  است. .... ۱۲۹
- شکل (۷-۷) هیستوگرام بهنجار شده  $H \bar{P}_{\eta}(\mathcal{E}_i)$  برای حالت همدوس ( $\alpha = 2$ ) ..... ۱۳۰
- شکل (۷-۸) تابع توزیع فراوانی فوتونها در حالت همدوس ( $\alpha = 2$ ) ..... ۱۳۰
- شکل (۷-۹) هیستوگرام بهنجار شده  $HW_{\eta}(\mathcal{E}_i; \theta_j)$  برای  $n = 2$  که با کامپیوتر تولید شده است. تعداد اندازه گیری ها در هر فاز نوسانگر محلی برابر  $M = 15000$  در نظر گرفته شده است و ضریب بهره  $\eta = 0.85$  است. .... ۱۳۱
- شکل (۷-۱۰) هیستوگرام بهنجار شده  $H \bar{P}_{\eta}(\mathcal{E}_i)$  برای حالت  $n = 2$  ..... ۱۳۲
- شکل (۷-۱۱) تابع توزیع فراوانی فوتونها در حالت  $n = 2$  ..... ۱۳۲
- شکل (۷-۱۲) تابع ویگنر بازسازی شده به روش بیشینه درست نمائی برای حالت خلاء فشرده ( $\zeta = 0.8$ ) ..... ۱۳۹

- شکل (۷-۱۳) تابع ویگنر بازسازی شده به روش بیشینه درست نمائی برای حالت همدوس  $|\alpha = 1+i\rangle$  ..... ۱۴۰
- شکل (۷-۱۴) تابع ویگنر بازسازی شده به روش بیشینه درست نمائی برای حالت فوک  $|n = 1\rangle$ . در این نمودار فقط مقطع  $(\xi, 0)$  نمایش داده شده است. .... ۱۴۱
- شکل (۷-۱۵) تابع ویگنر بازسازی شده به روش بیشینه درست نمائی برای حالت فوک  $|n = 2\rangle$  ..... ۱۴۲

## فصل اول

### کوانتش میدان الکترومغناطیسی در فضای آزاد

#### ۱-۱ معادلات ماکسول در خلا

در الکتروپنامیک کلاسیک حالت میدان الکترومغناطیسی در فضای تهی بوسیله میدان الکتریکی  $\vec{E}(\vec{r}, t)$  و میدان مغناطیسی  $\vec{H}(\vec{r}, t)$  توصیف می شود. تحول زمانی این میدانها نیز بوسیله معادلات ماکسول :

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{D} &= 0, & (1-1-1) & \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, & (2-1-1) \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} &= 0, & (3-1-1) & \quad \vec{\nabla} \times \vec{H} - \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \vec{0}, & (4-1-1) \end{aligned}$$

معین می گردد. در این معادلات  $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}$  بردار جابجایی الکتریکی و  $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$  بردار چگالی شار مغناطیسی است. در فیزیک کلاسیک یک میدان در واقع یک سیستم با بی نهایت درجه آزادی است. هر یک از این درجات آزادی بوسیله کمیت های اسکالر و پیوسته ای توصیف می شوند. برای توصیف میدان الکترومغناطیسی بوسیله درجات آزادی غیر مقید از پتانسیل اسکالر  $\phi(\vec{r}, t)$  و پتانسیل برداری  $\vec{A}(\vec{r}, t)$ ، که بنا به تعریف با روابط زیر به میدان های الکتریکی و مغناطیسی مربوط هستند استفاده می کنیم :

$$\vec{E}(\vec{r}, t) \equiv -\vec{\nabla} \phi(\vec{r}, t) - \frac{\partial \vec{A}(\vec{r}, t)}{\partial t} \quad \vec{B} \equiv \vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{r}, t) \quad (5-1-1)$$

با این تعریف دو معادله (۲-۱-۱) و (۳-۱-۱) بطور اتوماتیک برقرار خواهند بود و معادلات (۱-۱-۱) و (۴-۱-۱) به معادلات مشتقات جزئی زیر برای  $(\phi, \vec{A})$  منجر می شوند :

$$\nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = \vec{\nabla} \left[ \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{A} \right], \quad \nabla^2 \phi + \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) = 0 \quad (6-1-1)$$

## ۲-۱ نوردائی پیمانه ای معادلات ماکسول

همواره یک کلاس از پتانسیل های  $(\phi, \vec{A})$  چنان وجود دارد که معادلات (۱-۱-۵) را به ازای یک  $\vec{E}$  و  $\vec{B}$  داده شده برقرار می کنند. در واقع به سادگی می توان نشان داد که پتانسیل های  $\phi' = \phi - \frac{\partial \lambda}{\partial t}$  و  $\vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla} \lambda$  که در آنها  $\lambda(\vec{r}, t)$  یک تابع دلخواه از فضا و زمان است منجر به میدان های الکتریکی و مغناطیسی مشابه می شوند. بنابراین ما می توانیم پتانسیل ها را طوری انتخاب کنیم که به بدست آوردن درجات آزادی مستقل و غیر مقید منجر شود. در این جا تابع اسکالر  $\lambda(x, y, z, t)$  نقش پارامتر تبدیل بین جفت پتانسیل  $(\phi, \vec{A})$  و جفت پتانسیل  $(\phi', \vec{A}')$  را بازی می کند.

## ۳-۱ معادلات موج در پیمانه کولن

پیمانه کولن بوسیله شرط  $\vec{\nabla} \cdot \vec{A}(\vec{r}, t) = 0$  تعریف می شود. در پیمانه کولن معادلات موج (۱-۱-۶) به شکل زیر ساده خواهند شد

$$\begin{cases} \nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = \vec{\nabla} \left( \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) \\ \nabla^2 \phi = 0 \end{cases}$$

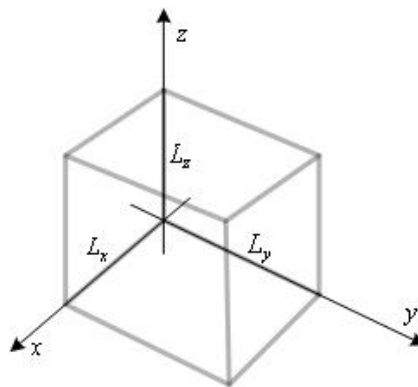
معادله دوم نشان می دهد که  $\phi(\vec{r}, t)$  با حل معادله لاپلاس بدست می آید. لذا  $\phi(\vec{r}, t)$  ها جزء درجات آزادی میدان محسوب نمی شوند. درجات آزادی میدان الکترومغناطیسی در پیمانه کولن در واقع همان مولفه های میدان  $\vec{A}$  در نقاط مختلف فضا هستند. البته خود این مولفه ها با قید  $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$  به یکدیگر پیوند دارند. در فضای تهی در غیاب چشمه های بار و جریان تحت شرایط مرزی مناسب جواب معادله  $\nabla^2 \phi = 0$  تابع  $\phi(\vec{r}, t) = 0$  خواهند بود. در این حالت پتانسیل برداری  $\vec{A}$  در معادله موج کلاسیک  $\nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = 0$  صدق می کند. بجز شرط  $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$  هیچ قید دیگری بر آن وجود ندارد. اگر در مثال میدان الکترومغناطیسی در فضای تهی و بی کران بجای کار با مولفه های  $\vec{A}$  در نقاط مختلف فضا به عنوان درجات آزادی با مولفه های تبدیل فوریه مکانی پتانسیل برداری یعنی  $\vec{A}(\vec{k}, t)$  که بوسیله رابطه زیر تعریف می شوند :

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \vec{A}(\vec{k}, t) e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} d^3k$$

کار کنیم شرط پیمانه کولن به رابطه  $\vec{k} \cdot \vec{A}(\vec{k}, t) = 0$  تبدیل می شود. این شرط معنی هندسی ساده ای دارد. در هر نقطه از فضای فوریه مولفه شعاعی  $\vec{A}(\vec{k}, t)$  صفر است. لذا درجات آزادی مستقل همان مولفه هایی از  $\vec{A}(\vec{k}, t)$  هستند که بر  $\vec{k}$  عمودند. به این دلیل گاهی به پیمانه کولن پیمانه عرضی نیز گفته می شود.

### ۴-۱ بسط میدان الکترومغناطیسی بر حسب امواج تخت

اغلب مناسب است که میدان الکترومغناطیسی را بر حسب امواج تخت بسط داد. این کار هم به دلایل فیزیکی و هم ریاضی مفید است. میدان الکترومغناطیسی درون کاواکی مکعب مستطیل شکل که یالهای آن در امتداد محورهای مختصات  $x, y, z$  بوده و به ترتیب برابر  $L_x$  و  $L_y$  و  $L_z$  باشند را در نظر بگیرید. فرض می شود درون کاواک هیچ چشمه بار یا جریان وجود ندارد. به عنوان شرایط مرزی، شرایط مرزی پریودیک را در نظر می گیریم. یعنی برای هر مولفه  $\alpha(\vec{r})$  از هر میدان  $\alpha(\vec{r}) = \alpha(\vec{r} + L_x \hat{x})$  و  $\alpha(\vec{r}) = \alpha(\vec{r} + L_y \hat{y})$  و  $\alpha(\vec{r}) = \alpha(\vec{r} + L_z \hat{z})$  البته نهایتاً قرار می دهیم



شکل (۱-۱)  
کاواک مستطیل شکل

( $j = x, y, z$  ,  $L_j \rightarrow \infty$ ) همانطور که دیدیم پتانسیل برداری  $\vec{A}$  در معادله موج کلاسیک

$$\nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = 0$$

صدق می کند. فرض می کنیم جواب معادله موج کلاسیک با شرایط مرزی پریودیک به صورت

$e^{\pm i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \Omega_{\vec{k}} t)}$  باشد که در این رابطه  $\vec{k}$  بردار موج و  $\Omega_{\vec{k}}$  فرکانس مشخصه هر مد است. علامت مثبت برای موج پیش رونده و علامت منفی برای موج پس رونده در نظر گرفته شده است.

بنا به تعریف  $k^2 \equiv \frac{\Omega_{\vec{k}}^2}{c^2}$ ، لذا تک تک جملات مذکور معادله موج کلاسیک را ارضا می کند و در نتیجه ترکیب خطی آنها

نیز معادله موج کلاسیک را ارضا می کند. بنابراین بسط مناسب برای پتانسیل برداری به صورت برهم نهشی از امواج تخت که در همه سوها هم به جلو و هم به عقب می روند به فرم زیر است :

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \sum_{\vec{k}, \sigma} \sqrt{\frac{\hbar}{2\Omega_{\vec{k}} \epsilon_0 V}} \hat{e}_{\vec{k}\sigma} \left[ a_{\vec{k}\sigma} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \Omega_{\vec{k}} t)} + a_{\vec{k}\sigma}^* e^{-i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \Omega_{\vec{k}} t)} \right] \quad (1-4-1)$$

که در آن  $V = L_x L_y L_z$  حجم هر مد است و  $a_{\vec{k}\sigma}^*$  و  $a_{\vec{k}\sigma}$  ضرایب بسط می باشند. برای هر مد  $(\vec{k}, \sigma)$ ، بردار موج و

بردار یکه ای است که راستای آن قطبش مد را معلوم می کند. برای هرمد دو راستای متعامد قطبش انتخاب می شود

$\sigma = 1, 2$  که هر دو بر بردار موج  $\vec{k}$  عمود هستند.  $\Omega_{\vec{k}}$  فرکانس مشخصه هر مد است و بنا به تعریف  $\Omega_{\vec{k}}^2 \equiv c^2 k^2$  لذا

تک تک جملات بسط مذکور معادله هلمهولتز را برای پتانسیل برداری ارضاء می کنند. ضمناً  $\hat{e}_{\vec{k}\sigma} \cdot \vec{k} = 0$  و

$(\sigma = 1, 2)$  لذا شرط پیمانه کولن  $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$  نیز برقرار خواهد بود. چون شرط مرزی پریودیک مقادیر بردار موج  $\vec{k}$  را

در فضای فوریه محدود به نقاط شبکه ای در آن فضا می کند که با رابطه

$$\vec{k}_l = 2\pi \left( \frac{l_x}{L_x} \hat{x} + \frac{l_y}{L_y} \hat{y} + \frac{l_z}{L_z} \hat{z} \right) \quad (l_x, l_y, l_z) \in Z^3$$

معرفی می شوند؛ لذا هر مد می تواند با چهار اندیس  $(l_x, l_y, l_z, \sigma)$  یا بطور اختصار  $(l, \sigma)$  معرفی شود.

## ۵-۱ هامیلتونی میدان الکترومغناطیسی

هامیلتونی میدان الکترومغناطیسی در غیاب چشمه های بار و جریان به فرم

$$H = \int d^3x \left[ \frac{1}{2} \epsilon_0 |\vec{E}(\vec{r}, t)|^2 + \frac{1}{2} \mu_0 |\vec{H}(\vec{r}, t)|^2 \right] \quad (۱-۵-۱)$$

است. فرم تابعی این هامیلتونی بر حسب  $a_{\vec{k}\sigma}$  و  $a_{\vec{k}\sigma}^*$  با جایگذاری مناسب به شکل زیر بدست می آید :

$$\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = i \sum_{\vec{k}, \sigma} \sqrt{\frac{\hbar \Omega_{\vec{k}}}{2\epsilon_0 V}} \hat{e}_{\vec{k}\sigma} (a_{\vec{k}\sigma} e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \Omega_{\vec{k}}t)} - a_{\vec{k}\sigma}^* e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \Omega_{\vec{k}}t)}) \quad (۲-۵-۱)$$

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \vec{B} = \frac{1}{\mu_0} \vec{\nabla} \times \vec{A} = i \sum_{\vec{k}, \sigma} \sqrt{\frac{\hbar \Omega_{\vec{k}}}{2\mu_0 V}} (\hat{k} \times \hat{e}_{\vec{k}\sigma}) \left[ a_{\vec{k}\sigma} e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \Omega_{\vec{k}}t)} - a_{\vec{k}\sigma}^* e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \Omega_{\vec{k}}t)} \right]$$

در نتیجه ؛

$$\vec{E} = i \sum_{\vec{k}, \sigma} \sqrt{\frac{\hbar \Omega_{\vec{k}}}{2\epsilon_0 V}} \hat{e}_{\vec{k}\sigma} \left( a_{\vec{k}\sigma}(t) e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} - a_{\vec{k}\sigma}^*(t) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} \right)$$

$$\vec{H} = i \sum_{\vec{k}, \sigma} \sqrt{\frac{\hbar \Omega_{\vec{k}}}{2\mu_0 V}} (\hat{k} \times \hat{e}_{\vec{k}\sigma}) \left[ a_{\vec{k}\sigma}(t) e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} - a_{\vec{k}\sigma}^*(t) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} \right] \quad (۳-۵-۱)$$

که در آن  $a_{\vec{k}\sigma}(t) = a_{\vec{k}\sigma}(0) e^{-i\Omega_{\vec{k}}t}$  ،  $a_{\vec{k}\sigma}^*(t) = a_{\vec{k}\sigma}^*(0) e^{i\Omega_{\vec{k}}t}$  با جایگذاری  $\vec{E}$  و  $\vec{H}$  در رابطه

هامیلتونی و استفاده از روابط تعامد زیر :

$$\int d^3x \left[ \hat{e}_{l\sigma} e^{-i\vec{k}_l\cdot\vec{r}} \right] \cdot \left[ \hat{e}_{l'\sigma'} e^{+i\vec{k}_{l'}\cdot\vec{r}} \right] = V \delta_{l,l'} \delta_{\sigma,\sigma'}$$

$$\int d^3x \left[ \vec{\nabla} \times \hat{e}_{l\sigma} e^{-i\vec{k}_l\cdot\vec{r}} \right] \cdot \left[ \vec{\nabla} \times \hat{e}_{l'\sigma'} e^{+i\vec{k}_{l'}\cdot\vec{r}} \right] = V \frac{\Omega_{l'}^2}{c^2} \delta_{l,l'} \delta_{\sigma,\sigma'}$$

هامیلتونی به صورت زیر ساده می شود :

$$H = \frac{\hbar}{4} \sum_{\vec{k}, \sigma} \Omega_{\vec{k}} \left[ a_{\vec{k}\sigma} a_{\vec{k}\sigma}^* + a_{\vec{k}\sigma}^* a_{\vec{k}\sigma} + a_{\vec{k}\sigma} a_{\vec{k}\sigma}^* + a_{\vec{k}\sigma}^* a_{\vec{k}\sigma} \right]$$



$$H = \sum_{\vec{k}, \sigma} \frac{\hbar \Omega_{\vec{k}}}{2} \left[ a_{\vec{k}\sigma}^* a_{\vec{k}\sigma} + a_{\vec{k}\sigma} a_{\vec{k}\sigma}^* \right]$$

حال اگر تعریف کنیم؛

$$\begin{cases} a_l \equiv \frac{1}{\sqrt{2\hbar\Omega_l}} (\Omega_l q_l(t) + i p_l(t)) \\ a_l^* \equiv \frac{1}{\sqrt{2\hbar\Omega_l}} (\Omega_l q_l(t) - i p_l(t)) \end{cases}$$

که در آن  $q_l(t)$  مختصات و  $p_l = \dot{q}_l(t)$  تکانه ها می باشد، هامیلتونی بر حسب این مختصات و تکانه ها به صورت زیر در می آید :

$$H(q_{l\sigma}, p_{l\sigma}) = \sum_{l,\sigma} \left( \frac{1}{2} p_{l\sigma}^2 + \frac{1}{2} \Omega_l^2 q_{l\sigma}^2 \right)$$

همانطوری که مشاهده می کنیم هامیلتونی میدان الکترومغناطیسی برابر جمع هامیلتونی های

$$H_l(q_{l\sigma}, p_{l\sigma}) = \frac{1}{2} \Omega_l^2 q_{l\sigma}^2 + \frac{1}{2} p_{l\sigma}^2$$

برای مدهای میدان است. هر یک از این جملات هامیلتونی شبیه هامیلتونی یک نوسانگر هارمونیک یک بعدی به جرم واحد  $M = 1$  و فرکانس طبیعی  $\Omega_{\vec{k}}$  است. معادلات کانونیک هامیلتون که از عبارت بالا نتیجه می شود، یعنی معادلات درجه یک

$$\dot{q}_{l\sigma} = \frac{\partial H}{\partial p_{l\sigma}} = p_{l\sigma}, \quad \dot{p}_{l\sigma} = -\frac{\partial H}{\partial q_{l\sigma}} = -\Omega_l^2 q_{l\sigma}$$

برای  $p_l$  و  $q_l$  به معادله دیفرانسیل مرتبه دوم  $\ddot{q}_l = -\Omega_l^2 q_l$  که معادله دیفرانسیل درست حرکت برای  $q_l$  است منجر می شوند.

## ۶-۱ کوانتیزه کردن هامیلتونی میدان

در مکانیک کوانتومی حالت میدان می تواند بوسیله یک تابع "موج" بی نهایت متغیره در فضای "مکان" یا متناظر آن یک تابع "موج" در فضای "تکانه" توصیف شود. در نمایش شرودینگر نظیر هر مختصه  $q_l$  یک عملگر  $\hat{q}_l$  و نظیر هر تکانه  $p_l$  یک عملگر  $\hat{p}_l$  وجود دارد که در رابطه جابجایی  $[\hat{q}_l, \hat{p}_{l'}] = i\hbar\delta_{ll'}$  صدق می کنند. عملگر هامیلتونی رفتار تحول زمانی حالت را معین می کند. هامیلتونی کوانتومی نظیر نوسانگر مد  $l$  ام برابر عبارت زیر خواهد بود :

$$\hat{H} = \frac{1}{2}\hat{p}_l^2 + \frac{1}{2}\Omega_l^2 \hat{q}_l^2$$

همانطور که در مکانیک کوانتومی معمول است عملگر های خلق و فنا ی مد  $l$  ام را به شکل زیر تعریف می کنیم :

$$\hat{a}_l = \frac{1}{\sqrt{2\hbar\Omega_l}}(\Omega_l \hat{q}_l + i\hat{p}_l) \quad , \quad \hat{a}_l^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2\hbar\Omega_l}}(\Omega_l \hat{q}_l - i\hat{p}_l) \quad (۱-۶-۱)$$

بطور معکوس :

$$\hat{q}_l = \sqrt{\frac{\hbar}{2\Omega_l}} (\hat{a}_l + \hat{a}_l^\dagger) \quad , \quad \hat{p}_l = -i\sqrt{\frac{\hbar\Omega_l}{2}} (\hat{a}_l - \hat{a}_l^\dagger)$$

هامیلتونی مد  $l$  ام میدان الکترومغناطیسی برابر

$$\hat{H}_l = \frac{\hbar\Omega_l}{2} (\hat{a}_l^\dagger \hat{a}_l + \hat{a}_l \hat{a}_l^\dagger) \quad (۲-۶-۱)$$

است. رابطه جابجایی عملگر های خلق و فنا بسادگی از رابطه جابجایی  $[\hat{q}_l, \hat{p}_{l'}] = i\hbar\delta_{ll'}$  بدست می آید :

$$[\hat{a}_l, \hat{a}_{l'}] = 0 \quad , \quad [\hat{a}_l^\dagger, \hat{a}_{l'}^\dagger] = 0 \quad , \quad [\hat{a}_l, \hat{a}_{l'}^\dagger] = \delta_{ll'} \quad (۳-۶-۱)$$

هامیلتونی نظیر مد  $l$  ام را می توان با استفاده از رابطه  $[\hat{a}_l, \hat{a}_l^\dagger] = 1$  به شکل زیر ساده کرد :

$$\hat{H}_l = \frac{\hbar\Omega_l}{2} (\hat{a}_l^\dagger \hat{a}_l + \hat{a}_l \hat{a}_l^\dagger) \quad \text{و} \quad \hat{a}_l \hat{a}_l^\dagger = 1 + \hat{a}_l^\dagger \hat{a}_l$$

$$\hat{H}_l = \frac{\hbar\Omega_l}{2} \{ 2\hat{a}_l^\dagger \hat{a}_l + 1 \} = \hbar\Omega_l \left( \hat{a}_l^\dagger \hat{a}_l + \frac{1}{2} \right) \quad (۴-۶-۱)$$

لذا هامیلتونی کل میدان بر حسب عملگر های خلق و فنا ی مدهای مختلف آن عبارت است از :

$$\hat{H} = \sum_l \hbar \Omega_l \hat{a}_l^\dagger \hat{a}_l + \hat{H}_0 \quad (5-6-1)$$

که در آن:  $\hat{H}_0 = \sum_l \frac{1}{2} \hbar \Omega_l$  است. حضور جمله  $\hat{H}_0$  در واقع نتیجه رابطه جابجایی  $[\hat{a}_l, \hat{a}_l^\dagger] = 1$  است.  $\hat{H}_0$  در واقع جمع انرژی نقطه صفر همه نوسانگرهای نظیر مدهای مختلف میدان است.

### ۷-۱ عملگر پتانسیل برداری

اکنون به عملگر پتانسیل برداری می پردازیم و این عملگر را در نمایش هایزنبرگ با استفاده از جایگزینی های

$$a_{l\sigma}(t) \rightarrow \hat{a}_{l\sigma}(t) \quad \text{و} \quad a_{l\sigma}^*(t) \rightarrow \hat{a}_{l\sigma}^\dagger(t)$$

: به فرم زیر می نویسیم :

$$\hat{A}(\vec{r}, t) = \sum_{l,\sigma} \sqrt{\frac{\hbar}{2 \Omega_l \epsilon_0 V}} \hat{e}_{l\sigma} [\hat{a}_{l\sigma}(t) e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} + h.c.] \quad (1-7-1)$$

قابل ذکر است در نمایش هایزنبرگ  $\hat{a}_l(t) = e^{\frac{i\hat{H}t}{\hbar}} \hat{a}_l(0) e^{-\frac{-i\hat{H}t}{\hbar}}$  لذا روابط جابجایی بین  $\hat{a}_l(t)$  و  $\hat{a}_l^\dagger(t)$  ها

مشابه روابط بین آنها در نمایش شرودینگر است. چون  $\frac{d}{dt} \hat{a}_l(t) = \frac{i}{\hbar} [\hat{H}, \hat{a}_l(t)]$  است لذا :

$$\frac{d}{dt} \hat{a}_l(t) = \frac{i}{\hbar} \left[ \sum_{l'} \hbar \Omega_{l'} \hat{a}_{l'}^\dagger \hat{a}_{l'}, \hat{a}_l \right] = \frac{i}{\hbar} \hbar \Omega_l [\hat{a}_l^\dagger \hat{a}_l, \hat{a}_l]$$

$$\frac{d}{dt} \hat{a}_l(t) = -i \Omega_l \hat{a}_l(t)$$

جواب این معادله دیفرانسیل که رابطه بین نمایش هایزنبرگ و شرودینگر عملگرها را معین می کند به شرح زیر است :

$$\hat{a}_l(t) = \hat{a}_l(0) e^{-i\Omega_l t} \quad \Leftrightarrow \quad \hat{a}_l^\dagger(t) = \hat{a}_l^\dagger(0) e^{+i\Omega_l t}$$

## ۸-۱ روابط جابجا گری برای میدانهای الکترومغناطیسی در خلاء و در زمان های مساوی

روابط جابجا گری بین مشاهده پذیرها به مساله اندازه گیری سازگار این مشاهده پذیرها مربوط است. همچنین این روابط آماده سازی یا تحقیق فیزیکی معادلات سیستم مورد بحث را به مجموعه ای خاص محدود می کنند. مشاهده پذیر های میدان الکترومغناطیسی  $\hat{E}(\vec{r}, t)$  و  $\hat{B}(\vec{r}, t) = \mu_0 \hat{H}(\vec{r}, t)$  هستند. عملگر میدان الکتریکی و مغناطیسی در نمایش هایزنبرگ بسادگی از روابط  $\hat{E} = -\frac{\partial \hat{A}}{\partial t}$  و  $\hat{H} = \frac{1}{\mu_0} \vec{\nabla} \times \hat{A}$  بدست می آیند. با توجه به فرم  $\hat{A}$  و روابط جابجا گری عملگر های خلق و فنا داریم؛

$$\hat{E}(\vec{r}, t) = i \sum_{\vec{k}\sigma} \sqrt{\frac{\hbar \Omega_{\vec{k}}}{2 \epsilon_0 V}} \hat{e}_{\vec{k}\sigma} \left[ \hat{a}_{\vec{k}\sigma}(t) e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} - \hat{a}_{\vec{k}\sigma}^\dagger(t) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} \right] \quad (1-8-1)$$

$$\hat{B}(\vec{r}, t) = \vec{\nabla} \times \hat{A} = i \sum_{\vec{k}\sigma} \sqrt{\frac{\hbar \mu_0 \Omega_{\vec{k}}}{2V}} (\hat{k} \times \hat{e}_{\vec{k}\sigma}) \left[ \hat{a}_{\vec{k}\sigma}(t) e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} - \hat{a}_{\vec{k}\sigma}^\dagger(t) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} \right] \quad (2-8-1)$$

در رابطه آخر  $\hat{k}$  بردار یکه در راستای  $\vec{k}$  است. آشکارا فرم شرودینگری هر یک از این عملگر ها با جای گذاری  $\hat{a}_{l\sigma}(t) \rightarrow \hat{a}_{l\sigma}$  بدست خواهد آمد. فرم روابط جابجا گری بین عملگر های همزمان مستقل از نمایش (شرودینگر یا هایزنبرگ) است. روابط جابجا گری بین مولفه های میدانها را می توان با استفاده از روابط جابجا گری بین عملگر های خلق و فنا محاسبه کرد. برای مثال  $[\hat{A}_i(\vec{r}), \hat{D}_j(\vec{r}')] = \hat{A}_i(\vec{r}) \hat{D}_j(\vec{r}') - \hat{D}_j(\vec{r}') \hat{A}_i(\vec{r})$  را محاسبه می کنیم. مولفه  $i$  ام عملگر پتانسیل برداری در نمایش شرودینگر مربوط به نقطه  $\vec{r}$  است و  $\hat{D}_j(\vec{r}') = \epsilon_0 \hat{E}_j(\vec{r}')$  مولفه  $j$  ام عملگر جابجایی الکتریکی در نقطه دیگر  $\vec{r}'$  می باشد.

$$[\hat{A}_i(\vec{r}), \hat{D}_j(\vec{r}')] = \sum_{\vec{k}, \sigma} \sum_{\vec{k}', \sigma'} \sqrt{\frac{\hbar}{2 \Omega_{\vec{k}} \epsilon_0 V}} (\hat{e}_{\vec{k}\sigma})_i \times \dots$$

$$\dots \times \left[ (\hat{a}_{\vec{k}\sigma} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} + \hat{a}_{\vec{k}\sigma}^\dagger e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}}), (\hat{a}_{\vec{k}'\sigma'} e^{i\vec{k}'\cdot\vec{r}'} - \hat{a}_{\vec{k}'\sigma'}^\dagger e^{-i\vec{k}'\cdot\vec{r}'}) \right] (\hat{e}_{\vec{k}'\sigma'})_j (i \epsilon_0) \sqrt{\frac{\hbar \Omega_{\vec{k}'}}{2 \epsilon_0 V}}$$