بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه بین المللی امام خمینی

IMAM KHOMEINI
INTERNATIONAL UNIVERSITY

وزارت علوم ، تحقیقات و فناوری

دانشگاه بین المللی امام خمینی (ره)

دانشکده علوم پایه ، گروه فیزیک

پایان نامه برای دریافت درجه کارشناسی ارشد

در رشته فیزیک اتمی و مولکولی

عنوان :

تقریب زدن ماتریس چگالی میدان تابشی به روش بیشینه درست نمائی

استاد راهنما :

دکتر محمد رضا بذرافکن

استاد مشاور :

دکتر الهه نحوی فرد

نگارنده :

سیمین رئیسی

خرداد ماه ۱۳۸۷

تقدیم به

آنان که مرا یار شدند...

چکیده

نمایش توابع توزیع شبه احتمال **s**- پارامتری شده حالت های کوانتومی میدان تابشی را مرور می کنیم . نشان می دهیم که توموگرام های اپتیکی ، که می توانند با استفاده از آشکارسازی همموداین اندازه گیری شوند ، حالت کوانتومی میدان تابشی را از طریق تبدیل معکوس رادون تعیین می کنند . نشان می دهیم که روش بیشینه درست نمایی اعمال شده بر نمودارهای ستونی بدست آمده از آزمایش های همموداین ، می تواند حالت کوانتومی را در مدل به کار رفته در مساله ما تعیین کند . این روش را روی نمودارهای ستونی تولید شده به وسیله رایانه (متناظر با آشکارسازی همموداین) اعمال می کنیم و حالت های کوانتومی را برآورد می نماییم .

لغات کلیدی : ماتریس چگالی ، تابع شبه احتمال ، آشکارسازی همموداین ، تبدیل رادون ، اندازه گیری حالت کوانتومی ، روش بیشینه درست نمایی .

حمد و سپاس بیکران مهربانی را که حتی دمی ، دریای بی انتهای لطفش را از من دریغ نساخت و حضور همواره اش آرامش بخش قلب و روشنی بخش زندگی ام بوده و همیشه بهتر از آن که می خواستم و لایقش بودم ارزانی ام داشته است.

از اساتید بسیار عزیز و گرانقدرم جناب آقای دکتر محمد رضا بذر افکن و سرکار خانم دکتر الهه نحوی فرد که علاوه بر نمایان ساختن دریچه ای از زیبایی های دنیای فیزیک ، به من درس انسانیت و بزرگواری نیز دادند ، بسیار سپاسگزارم و همواره به خاطر هدیه بزرگی که ارزانی ام داشته اند ، خود را مدیون آنها می دانم .

از پدر و مادر عزیز و مهربانم که گرمای بی دریغ وجودشان مایه دلگرمی ام و دعای خیر و تشویق هایشان تکیه گاه و روشنی بخش راهم بوده و خواهد بود و همواره خویشتن را مرهون فضائل و کمالات روحی و اخلاقی آنها می دانم ؛ کمال تشکر و سپاسگزاری را دارم .

از دوست و همراه راست پیمان زندگی ام ، همسر مهربان و با محبتم ، که یاری صمیمانه و وصف ناپذیرش مایه امید و تلاشم بود و مشکلات را بر من هموار ساخت ، صمیمانه متشکرم .

از خواهر با صفا و مهربانم و برادرهای خوب و عزیزم که همواره باعث شادی و دلگرمی من بوده اند خالصانه سپاسگزارم.

فهرست مطالب

فهرست شکل ها

فصل اول

کوانتش میدان الکترومغناطیسی در فضای آزاد

۱-۱ معادلات ماکسول در خلا

در الکترودینامیک کلاسیک حالت میدان الکترومغناطیسی در فضای تهی بوسیله میدان الکتریکی $\vec{E}(\vec{r},t)$ و میدان مغناطیسی $\vec{H}(\vec{r},t)$ توصیف می شود. تحول زمانی این میدانها نیز بوسیله معادلات ماکسول :

$$\vec{\nabla}.\vec{D} = 0, \qquad (۱-۱-۱) \qquad \vec{\nabla}.\vec{B} = 0, \qquad (۲-۱-۱)$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} + \frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = 0, \qquad (۳-۱-۱) \qquad \vec{\nabla}\times\vec{H} - \frac{\partial\vec{D}}{\partial t} = \vec{0}, \qquad (۴-۱-۱)$$

معین می گردد. در این معادلات $\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E}$ بردار جابجایی الکتریکی و $\vec{B} = \mu_0\vec{H}$ بردار چگالی شار مغناطیسی است. در فیزیک کلاسیک یک میدان در واقع یک سیستم با بی نهایت درجه آزادی است. هر یک از این درجات آزادی بوسیله کمیت های اسکالر و پیوسته ای توصیف می شوند. برای توصیف میدان الکترومغناطیسی بوسیله درجات آزادی غیر مقید از پتانسیل اسکالر $\phi(\vec{r},t)$ و پتانسیل برداری $\vec{A}(\vec{r},t)$، که بنا به تعریف با روابط زیر به میدان های الکتریکی و مغناطیسی مربوط هستند استفاده می کنیم :

$$\vec{E}(\vec{r},t) \equiv -\vec{\nabla}\phi(\vec{r},t) - \frac{\partial\vec{A}(\vec{r},t)}{\partial t} \qquad \vec{B} \equiv \vec{\nabla}\times\vec{A}(\vec{r},t) \qquad (۵-۱-۱)$$

با این تعریف دو معادله (۱-۱-۲) و (۱-۱-۳) بطور اتوماتیک برقرار خواهند بود و معادلات (۱-۱-۱) و (۱-۱-۴) به معادلات مشتقات جزئی زیر برای $(\phi,\vec{A})$ منجر می شوند :

$$\nabla^2\vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = \vec{\nabla}\left[\frac{1}{c^2}\frac{\partial\phi}{\partial t} + \vec{\nabla}.\vec{A}\right] \quad , \qquad \nabla^2\phi + \frac{\partial}{\partial t}(\vec{\nabla}.\vec{A}) = 0 \qquad (۶-۱-۱)$$

۱-۲ ناوردائی پیمانه ای معادلات ماکسول

همواره یک کلاس از پتانسیل های $(\varphi, \vec{A})$ چنان وجود دارد که معادلات (۱-۱-۵) را به ازای یک $\vec{E}$ و $\vec{B}$ داده شده برقرار می کنند. در واقع به سادگی می توان نشان داد که پتانسیل های $\phi' = \phi - \frac{\partial \lambda}{\partial t}$ و $\vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla}\lambda$ که در آنها $\lambda(\vec{r},t)$ یک تابع دلخواه از فضا و زمان است منجر به میدان های الکتریکی و مغناطیسی مشابه می شوند. بنابراین ما می توانیم پتانسیل ها را طوری انتخاب کنیم که به بدست آوردن درجات آزادی مستقل و غیر مقید منجر شود. در این جا تابع اسکالر $\lambda(x,y,z,t)$ نقش پارامتر تبدیل بین جفت پتانسیل $(\phi, \vec{A})$ و جفت پتانسیل $(\phi', \vec{A}')$ را بازی می کند.

۱-۳ معادلات موج در پیمانه کولن

پیمانه کولن بوسیله شرط $\vec{\nabla}.\vec{A}(\vec{r},t) = 0$ تعریف می شود. در پیمانه کولن معادلات موج (۱-۱-۶) به شکل زیر ساده خواهند شد

$$\begin{cases} \nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = \vec{\nabla}\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial \phi}{\partial t}\right) \\ \nabla^2 \phi = 0 \end{cases}$$

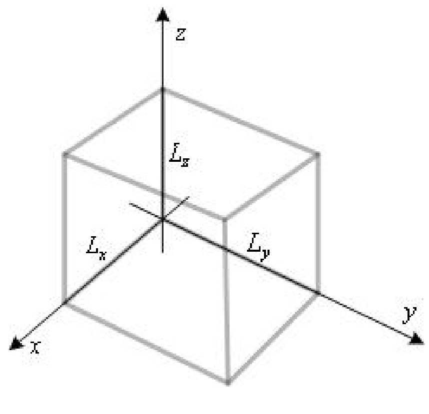
معادله دوم نشان می دهد که $\phi(\vec{r},t)$ با حل معادله لاپلاس بدست می آید. لذا $\varphi(\vec{r},t)$ ها جزء درجات آزادی میدان محسوب نمی شوند. درجات آزادی میدان الکترومغناطیسی در پیمانه کولن در واقع همان مولفه های میدان $\vec{A}$ در نقاط مختلف فضا هستند. البته خود این مولفه ها با قید $\vec{\nabla}.\vec{A} = 0$ به یکدیگر پیوند دارند. در فضای تهی در غیاب چشمه های بار و جریان تحت شرایط مرزی مناسب جواب معادله $\nabla^2\varphi = 0$ تابع $\varphi(\vec{r},t) = 0$ خواهند بود. در این حالت پتانسیل برداری $\vec{A}$ در معادله موج کلاسیک $\nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = 0$ صدق می کند. بجز شرط $\vec{\nabla}.\vec{A} = 0$ هیچ قید دیگری برآن وجود ندارد. اگر در مثال میدان الکترومغناطیسی در فضای تهی و بی کران بجای کار با مولفه های $\vec{A}$ در نقاط مختلف فضا به عنوان درجات آزادی با مولفه های تبدیل فوریه مکانی پتانسیل برداری یعنی $\vec{A}(\vec{k},t)$ که بوسیله رابطه زیر تعریف می شوند :

$$\vec{A}(\vec{r},t)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int \vec{A}(\vec{k},t)\, e^{i\vec{k}.\vec{r}} d^3k$$

کار کنیم شرط پیمانه کولن به رابطه $\vec{k}.\vec{A}(\vec{k},t)=0$ تبدیل می شود. این شرط معنی هندسی ساده ای دارد. در هر نقطه از فضای فوریه مولفه شعاعی $\vec{A}(\vec{k},t)$ صفر است. لذا درجات آزادی مستقل همان مولفه هایی از $\vec{A}(\vec{k},t)$ هستند که بر $\vec{k}$ عمودند. به این دلیل گاهی به پیمانه کولن پیمانه عرضی نیز گفته می شود.

۴-۱ بسط میدان الکترومغناطیسی بر حسب امواج تخت

اغلب مناسب است که میدان الکترومغناطیسی را بر حسب امواج تخت بسط داد. این کار هم به دلایل فیزیکی و هم ریاضی مفید است. میدان الکترومغناطیسی درون کاواکی مکعب مستطیل شکل که یالهای آن در امتداد محورهای مختصات z,y,x بوده و به ترتیب برابر L_x و L_y و L_z باشند را در نظر بگیرید. فرض می شود درون کاواک هیچ چشمه بار یا جریان وجود ندارد. به عنوان شرایط مرزی، شرایط مرزی پریودیک را در نظر می گیریم. یعنی برای هر مولفه $\alpha(\vec{r})$ از هر میدان $\alpha(\vec{r})=\alpha(\vec{r}+L_x\hat{x})$ و $\alpha(\vec{r})=\alpha(\vec{r}+L_y\hat{y})$ و $\alpha(\vec{r})=\alpha(\vec{r}+L_z\hat{z})$ البته نهایتا قرار می دهیم



شکل (۱-۱)
کاواک مستطیل شکل

($j = x, y, z \;,\; L_j \to \infty$). همــانطور کــه دیــدیم پتانــسیل بــرداری $\vec{A}$ در معادلــه مــوج کلاســیک

$\nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = 0$ صدق می کند. فرض می کنیم جواب معادله موج کلاسیک با شرایط مرزی پریودیک به صورت

$e^{\pm i(\vec{k}.\vec{r} - \Omega_{\vec{k}} t)}$ باشد که در این رابطه $\vec{k}$ بردار موج و $\Omega_{\vec{k}}$ فرکانس مشخصه هر مد است. علامت مثبت برای موج پیش رونده وعلامت منفی برای موج پس رونده در نظر گرفته شده است.

بنا به تعریف $\frac{\Omega_{\vec{k}}^2}{c^2} \equiv k^2$، لذا تک تک جملات مذکور معادله موج کلاسیک را ارضا می کند و در نتیجه ترکیب خطی آنها نیز معادله موج کلاسیک را ارضا می کند. بنابراین بسط مناسب برای پتانسیل برداری به صورت برهم نهشی از امواج تخت که در همه سوها هم به جلو و هم به عقب می روند به فرم زیر است :

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \sum_{\vec{k},\sigma} \sqrt{\frac{\hbar}{2\Omega_{\vec{k}}\varepsilon_0 V}}\; \hat{e}_{\vec{k}\sigma} \left[\; a_{\vec{k}\sigma} e^{i(\vec{k}.\vec{r} - \Omega_{\vec{k}} t)} + a^*_{\vec{k}\sigma} e^{-i(\vec{k}.\vec{r} - \Omega_{\vec{k}} t)} \right] \qquad (۱-۴-۱)$$

که در آن $V = L_x L_y L_z$ حجم هر مد است و $a_{\vec{k}\sigma}$و $a^*_{\vec{k}\sigma}$ ضرایب بسط می باشند. برای هر مد $(\vec{k},\sigma)$ ، $\vec{k}$ بردار موج و $\hat{e}_{\vec{k}\sigma}$ بردار یکه ای است که راستای آن قطبش مد را معلوم می کند. برای هرمد دو راستای متعامد قطبش انتخاب می شود $\sigma = 1,2$ که هر دو بر بردار موج $\vec{k}$عمود هستند. $\Omega_{\vec{k}}$ فرکانس مشخصه هر مد است و بنا به تعریف $\Omega_{\vec{k}}^2 \equiv c^2 k^2$ لذا تک تک جملات بسط مذکور معادله هلمهولتز را برای پتانسیل برداری ارضاء می کنند. ضمنا $\hat{e}_{\vec{k}\sigma} \cdot \vec{k} = 0$ و ($\sigma = 1,2$) لذا شرط پیمانه کولن $\vec{\nabla}.\,\vec{A} = 0$ نیز برقرار خواهد بود. چون شرط مرزی پریودیک مقادیر بردار موج $\vec{k}$ را در فضای فوریه محدود به نقاط شبکه ای درآن فضا می کند که با رابطه

$$\vec{k}_l = 2\pi\left(\frac{l_x}{L_x}\hat{x} + \frac{l_y}{L_y}\hat{y} + \frac{l_z}{L_z}\hat{z}\right) \qquad (l_x, l_y, l_z) \in Z^3$$

معرفی می شوند؛ لذا هر مد می تواند با چهار اندیس (l_x, l_y, l_z, σ) یا بطور اختصار (l,σ) معرفی شود.

۵-۱ هامیلتونی میدان الکترومغناطیسی

هامیلتونی میدان الکترومغناطیسی در غیاب چشمه های بار و جریان به فرم

$$H = \int d^3x \left[\frac{1}{2}\varepsilon_0 \left| \vec{E}(\vec{r},t) \right|^2 + \frac{1}{2}\mu_0 \left| \vec{H}(\vec{r},t) \right|^2 \right] \qquad (۱-۵-۱)$$

است. فرم تابعی این هامیلتونی بر حسب $a_{\vec{k}\sigma}$ و $a^*_{\vec{k}\sigma}$ با جایگذاری مناسب به شکل زیر بدست می آید :

$$\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = i\sum_{\vec{k},\sigma} \sqrt{\frac{\hbar\Omega_{\vec{k}}}{2\varepsilon_0 V}}\ \hat{e}_{\vec{k}\sigma} \left(a_{\vec{k}\sigma} e^{i\left(\vec{k}\cdot\vec{r} - \Omega_{\vec{k}} t\right)} - a^*_{\vec{k}\sigma} e^{-i\left(\vec{k}\cdot\vec{r} - \Omega_{\vec{k}} t\right)} \right) \qquad (۲-۵-۱)$$

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu_0}\vec{B} = \frac{1}{\mu_0}\vec{\nabla}\times\vec{A} = i\sum_{\vec{k},\sigma} \sqrt{\frac{\hbar\Omega_{\vec{k}}}{2\mu_0 V}}\ (\hat{k}\times\hat{e}_{\vec{k}\sigma}) \left[a_{\vec{k}\sigma} e^{i(\vec{k}.\vec{r} - \Omega_{\vec{k}} t)} - a^*_{\vec{k}\sigma} e^{-i(\vec{k}.\vec{r} - \Omega_{\vec{k}} t)} \right]$$

در نتیجه ؛

$$\vec{E} = i\sum_{\vec{k},\sigma} \sqrt{\frac{\hbar\Omega_{\vec{k}}}{2\varepsilon_0 V}}\ \hat{e}_{\vec{k}\sigma} \left(a_{\vec{k}\sigma}(t)\, e^{i\vec{k}.\vec{r}} - a^*_{\vec{k}\sigma}(t)\, e^{-i\vec{k}.\vec{r}} \right)$$

$$\vec{H} = i\sum_{\vec{k},\sigma} \sqrt{\frac{\hbar\Omega_{\vec{k}}}{2\mu_0 V}}\ (\hat{k}\times\hat{e}_{\vec{k}\sigma}) \left[a_{\vec{k}\sigma}(t)\, e^{i\vec{k}.\vec{r}} - a^*_{\vec{k}\sigma}(t)\, e^{-i\vec{k}.\vec{r}} \right] \qquad (۳-۵-۱)$$

که در آن $a_{\vec{k}\sigma}(t) = a_{\vec{k}\sigma}(0)\, e^{-i\Omega_{\vec{k}} t}$, $a^*_{\vec{k}\sigma}(t) = a^*_{\vec{k}\sigma}(0)\, e^{i\Omega_{\vec{k}} t}$. با جایگذاری $\vec{E}$ و $\vec{H}$ در رابطه هامیلتونی و استفاده از روابط تعامد زیر :

$$\int d^3x \left[\hat{e}_{l\sigma} e^{-i\vec{k}_l.\vec{r}} \right] . \left[\hat{e}_{l'\sigma'} e^{+i\vec{k}_{l'}.\vec{r}} \right] = V\ \delta_{l,l'}\,\delta_{\sigma,\sigma'}$$

$$\int d^3x \left[\vec{\nabla}\times\hat{e}_{l\sigma} e^{-i\vec{k}_l.\vec{r}} \right] . \left[\vec{\nabla}\times\hat{e}_{l'\sigma'} e^{+i\vec{k}_{l'}.\vec{r}} \right] = V\ \frac{\Omega_l^2}{c^2}\ \delta_{l,l'}\,\delta_{\sigma,\sigma'}$$

هامیلتونی به صورت زیر ساده می شود :

$$H = \frac{\hbar}{4}\sum_{\vec{k},\sigma} \Omega_{\vec{k}} \left[a_{\vec{k}\sigma} a^*_{\vec{k}\sigma} + a^*_{\vec{k}\sigma} a_{\vec{k}\sigma} + a_{\vec{k}\sigma} a^*_{\vec{k}\sigma} + a^*_{\vec{k}\sigma} a_{\vec{k}\sigma} \right]$$

$$H = \sum_{\vec{k},\sigma} \frac{\hbar\Omega_{\vec{k}}}{2} \left[a^*_{\vec{k}\sigma} a_{\vec{k}\sigma} + a_{\vec{k}\sigma} a^*_{\vec{k}\sigma} \right]$$

حال اگر تعریف کنیم؛

$$\begin{cases} a_l \equiv \dfrac{1}{\sqrt{2\hbar\Omega_l}} \left(\Omega_l q_l(t) + i p_l(t) \right) \\ a^*_l \equiv \dfrac{1}{\sqrt{2\hbar\Omega_l}} \left(\Omega_l q_l(t) - i p_l(t) \right) \end{cases}$$

که در آن $q_l(t)$ مختصات و $p_l = \dot{q}_l(t)$ تکانه ها می باشد، هامیلتونی بر حسب این مختصات و تکانه ها به صورت زیر در می آید :

$$H\left(q_{l\sigma}, p_{l\sigma}\right) = \sum_{l,\sigma} \left(\frac{1}{2} p^2_{l\sigma} + \frac{1}{2} \Omega^2_l q^2_{l\sigma} \right)$$

همانطوری که مشاهده می کنیم هامیلتونی میدان الکترومغناطیسی برابر جمع هامیلتونی های

$$H_l(q_{l\sigma}, p_{l\sigma}) = \frac{1}{2} \Omega^2_l q^2_{l\sigma} + \frac{1}{2} p^2_{l\sigma}$$

برای مدهای میدان است. هر یک از این جملات هامیلتونی شبیه هامیلتونی یک نوسانگر هارمونیک یک بعدی به جرم واحد $M = 1$ و فرکانس طبیعی $\Omega_{\vec{k}}$ است. معادلات کانونیک هامیلتون که از عبارت بالا نتیجه می شود، یعنی معادلات درجه یک

$$\dot{q}_{l\sigma} = \frac{\partial H}{\partial p_{l\sigma}} = p_{l\sigma}, \qquad \dot{p}_{l\sigma} = -\frac{\partial H}{\partial q_{l\sigma}} = -{\Omega_l}^2 q_{l\sigma}$$

برای p_l و q_l به معادله دیفرانسیل مرتبه دوم $\ddot{q}_l = -\Omega^2_l q_l$ که معادله دیفرانسیل درست حرکت برای q_l است منجر می شوند.

۱-۶ کوانتیزه کردن هامیلتونی میدان

در مکانیک کوانتومی حالت میدان می تواند بوسیله یک تابع "موج " بی نهایت متغیره در فضای "مکان " یا متناظر آن یک تابع "موج" در فضای "تکانه" توصیف شود. در نمایش شرودینگر نظیر هر مختصه q_l یک عملگر $\hat{q}_l$ و نظیر هر تکانه p_l یک عملگر $\hat{p}_l$ وجود دارد که در رابطه جابجاگری $[\hat{q}_l\,,\hat{p}_{l'}] = i\,\hbar\delta_{l,\,l'}$ صدق می کنند. عملگر هامیلتونی رفتار تحول زمانی حالت را معین می کند. هامیلتونی کوانتومی نظیر نوسانگر مد l ام برابر عبارت زیر خواهد بود :

$$\hat{H} = \frac{1}{2}\hat{p}_l^{\,2} + \frac{1}{2}\Omega_l^{\,2}\,\hat{q}_l^{\,2}$$

همانطور که در مکانیک کوانتومی معمول است عملگر های خلق و فنای مد lام را به شکل زیر تعریف می کنیم :

$$\hat{a}_l = \frac{1}{\sqrt{2\hbar\Omega_l}}(\Omega_l\,\hat{q}_l + i\hat{p}_l) \quad , \quad \hat{a}_l^{\dagger} = \frac{1}{\sqrt{2\hbar\Omega_l}}(\Omega_l\,\hat{q}_l - i\hat{p}_l) \qquad (۱-۶-۱)$$

بطور معکوس **:**

$$\hat{q}_l = \sqrt{\frac{\hbar}{2\Omega_l}}\;(\hat{a}_l + \hat{a}_l^{\dagger}) \quad , \quad \hat{p}_l = -i\sqrt{\frac{\hbar\Omega_l}{2}}\;(\hat{a}_l - \hat{a}_l^{\dagger})$$

هامیلتونی مد lام میدان الکترومغناطیسی برابر

$$\hat{H}_l = \frac{\hbar\Omega_l}{2}\;(\hat{a}_l^{\dagger}\hat{a}_l + \hat{a}_l\hat{a}_l^{\dagger}) \qquad (۱-۶-۲)$$

است. رابطه جابجاگری عملگر های خلق و فنا بسادگی از رابطه جابجاگری $[\hat{q}_l\,,\hat{p}_{l'}] = i\,\hbar\delta_{l,\,l'}$ بدست می آید **:**

$$[\hat{a}_l,\hat{a}_{l'}] = 0 \quad , \quad [\hat{a}_l^{\dagger},\hat{a}_{l'}^{\dagger}] = 0 \quad , \quad [\hat{a}_l,\hat{a}_{l'}^{\dagger}] = \delta_{l\,l'} \qquad (۱-۶-۳)$$

هامیلتونی نظیر مد lام را می توان با استفاده از رابطه $[\hat{a}_l\,,\hat{a}_l^{\dagger}] = 1$ به شکل زیر ساده کرد :

$$\hat{H}_l = \frac{\hbar\Omega_l}{2}(\hat{a}_l^{\dagger}\hat{a}_l + \hat{a}_l\hat{a}_l^{\dagger}) \qquad \text{و} \qquad \hat{a}_l\hat{a}_l^{\dagger} = 1 + \hat{a}_l^{\dagger}\hat{a}_l$$

$$\hat{H}_l = \frac{\hbar\,\Omega_l}{2}\{\,2\hat{a}_l^{\dagger}\hat{a}_l + 1\,\} = \hbar\,\Omega_l\,(\,\hat{a}_l^{\dagger}\hat{a}_l + \frac{1}{2}\,) \qquad (۱-۶-۴)$$

لذا هامیلتونی کل میدان بر حسب عملگر های خلق و فنای مدهای مختلف آن عبارت است از :

$$\hat{H} = \sum_{l} \hbar \Omega_l \hat{a}_l^{\dagger} \hat{a}_l + \hat{H}_0 \qquad (۵-۶-۱)$$

که در آن : $\hat{H}_0 = \sum_l \frac{1}{2} \hbar\ \Omega_l$ است. حضور جمله $\hat{H}_0$ در واقع نتیجه رابطه جابجاگری $[\hat{a}_l , \hat{a}_l^{\dagger}] = 1$ است. $\hat{H}_0$ در واقع جمع انرژی نقطه صفر همه نوسانگرهای نظیر مدهای مختلف میدان است.

۷-۱ عملگر پتانسیل برداری

اکنون به عملگر پتانسیل برداری می پردازیم و این عملگر را در نمایش هایزنبرگ با استفاده از جایگزینی های $a_{l\sigma}^{*}(t) \to \hat{a}_{l\sigma}^{\dagger}(t)$ و $a_{l\sigma}(t) \to \hat{a}_{l\sigma}(t)$ به فرم زیر می نویسیم :

$$\hat{\vec{A}}(\vec{r},t) = \sum_{l,\sigma} \sqrt{\frac{\hbar}{2\ \Omega_l\ \varepsilon_0 V}}\ \hat{e}_{l\sigma}\ [\hat{a}_{l\sigma}(t) e^{i\vec{k}.\vec{r}} + h.c\ ] \qquad (۱-۷-۱)$$

قابل ذکر است در نمایش هایزنبرگ $\hat{a}_l(t) = e^{\frac{i\hat{H}t}{\hbar}}\ \hat{a}_l(0)\ e^{\frac{-i\hat{H}t}{\hbar}}$ لذا روابط جابجاگری بین $\hat{a}_l(t)$ و $\hat{a}_{l'}^{\dagger}(t)$ ها مشابه روابط بین آنها در نمایش شرودینگر است. چون $\frac{d}{dt}\hat{a}_l(t) = \frac{i}{\hbar}[\hat{H}\ , \hat{a}_l(t)]$ است لذا :

$$\frac{d}{dt}\hat{a}_l(t) = \frac{i}{\hbar}\left[\sum_{l'} \hbar\ \Omega_{l'}\, \hat{a}_{l'}^{\dagger} \hat{a}_{l'}\ ,\ \hat{a}_{l'}\right] = \frac{i}{\hbar}\ \hbar\ \Omega_l \left[\hat{a}_l^{\dagger}\hat{a}_l\ ,\ \hat{a}_l\ \right]$$

$$\frac{d}{dt}\hat{a}_l(t) = -i\ \ \Omega_l\, \hat{a}_l(t)$$

جواب این معادله دیفرانسیل که رابطه بین نمایش هایزنبرگ و شرودینگر عملگر ها را معین می کند به شرح زیر است :

$$\hat{a}_l(t) = \hat{a}_l(0)\ \ e^{-i\Omega_l t} \qquad \Leftrightarrow \qquad \hat{a}_l^{\dagger}(t) = \hat{a}_l^{\dagger}(0)\ \ e^{+i\Omega_l t}$$

۱-۸ روابط جا بجا گری برای میدانهای الکترومغناطیسی در خلاء و در زمان های مساوی

روابط جابجا گری بین مشاهده پذیرها به مساله اندازه گیری سازگار این مشاهده پذیرها مربوط است. همچنین این روابط آماده سازی یا تحقیق فیزیکی معادلات سیستم مورد بحث را به مجموعه ای خاص محدود می کنند. مشاهده پذیر های میدان الکترومغناطیسی $\hat{\vec{E}}(\vec{r},t)$ و $\hat{\vec{B}}(\vec{r},t)=\mu_0\hat{\vec{H}}(\vec{r},t)$ هستند. عملگر میدان الکتریکی و مغناطیسی در نمایش هایزنبرگ بسادگی از روابط $\hat{\vec{E}}=-\dfrac{\partial\hat{\vec{A}}}{\partial t}$ و $\hat{\vec{H}}=\dfrac{1}{\mu_0}\vec{\nabla}\times\hat{\vec{A}}$ بدست می آیند. با توجه به فرم $\hat{\vec{A}}$ و روابط جابجاگری عملگر های خلق و فنا داریم؛

$$\hat{\vec{E}}(\vec{r},t)=i\sum_{\vec{k}\sigma}\sqrt{\frac{\hbar\Omega_{\vec{k}}}{2\varepsilon_0 V}}\,\hat{e}_{\vec{k}\sigma}\left[\hat{a}_{\vec{k}\sigma}(t)\,e^{i\vec{k}.\vec{r}}-\hat{a}^{\dagger}_{\vec{k}\sigma}(t)\,e^{-i\vec{k}.\vec{r}}\right] \qquad (۱-۸-۱)$$

$$\hat{\vec{B}}(\vec{r},t)=\vec{\nabla}\times\hat{\vec{A}}=i\sum_{\vec{k}\sigma}\sqrt{\frac{\hbar\mu_0\Omega_{\vec{k}}}{2V}}\left(\hat{k}\times\hat{e}_{\vec{k}\sigma}\right)\left[\hat{a}_{\vec{k}\sigma}(t)\,e^{i\vec{k}.\vec{r}}-\hat{a}^{\dagger}_{\vec{k}\sigma}(t)\,e^{-i\vec{k}.\vec{r}}\right] \qquad (۲-۸-۱)$$

در رابطه آخر $\hat{k}$ بردار یکه در راستای $\vec{k}$ است. آشکارا فرم شرودینگری هر یک از این عملگر ها با جای گذاری $\hat{a}_{l\sigma}(t)\rightarrow\hat{a}_{l\sigma}$ بدست خواهد آمد. فرم روابط جابجاگری بین عملگر های همزمان مستقل از نمایش(شرودینگر یا هایزنبرگ) است. روابط جابجاگری بین مولفه های میدانها را می توان با استفاده از روابط جابجاگری بین عملگر های خلق و فنا محاسبه کرد. برای مثال $\left[\hat{A}_i(\vec{r}),\hat{D}_j(\vec{r}')\right]$ را محاسبه می کنیم. $\hat{A}_i(\vec{r})$ مولفه i ام عملگر پتانسیل برداری در نمایش شرودینگر مربوط به نقطه $\vec{r}$است و $\hat{D}_j(r')=\varepsilon_0\hat{E}_j(\vec{r}')$ مولفه j ام عملگر جابجایی الکتریکی در نقطه دیگر $\vec{r}'$ می باشد.

$$[\hat{A}_i(\vec{r}),\hat{D}_j(\vec{r}')]=\sum_{\vec{k},\sigma}\sum_{\vec{k}',\sigma'}\sqrt{\frac{\hbar}{2\Omega_{\vec{k}}\varepsilon_0 V}}\ (\hat{e}_{\vec{k}\sigma})_i\ \times\ldots$$

$$\ldots\times\left[(\hat{a}_{\vec{k}\sigma}e^{i\vec{k}.\vec{r}}+\hat{a}^{\dagger}_{\vec{k}\sigma}e^{-i\vec{k}.\vec{r}})\ ,\ (\hat{a}_{\vec{k}'\sigma'}e^{ik'.r'}-\hat{a}^{\dagger}_{\vec{k}'\sigma'}e^{-i\vec{k}'.\vec{r}'})\right]\ (\hat{e}_{\vec{k}'\sigma'})_j\,(i\,\varepsilon_0)\sqrt{\frac{\hbar\,\Omega_{\vec{k}}}{2\,\varepsilon_0 V}}$$