بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه لرستان

دانشکده علوم پایه

گروه ریاضی

عنوان

نامساوی هرمیت – هادامارد در فضاهای با خمیدگی نامثبت

نگارش

فاطمه رضایی

استاد راهنما

دکتر علی بارانی

استاد مشاور

دکتر امیر قاسم غضنفری

پایان نامه کارشناسی ارشد

در رشته ریاضی محض

بهمن ماه ۱۳۹۲

تقدیم به روح پاک مادرم . . .

ای آنکه یاد او برای یاد کنندگان شرافت و بزرگی است و ای آنکه سپاسگزاری او، سپاسگزاران را پیروزی است و ای آنکه فرمانبرداری او فرمانبرداران را رهایی است . . .

دلهای ما را به یاد خود از هر یادی و زبانهامان را به سپاس خود از هر سپاسی و اندامهامان را به طاعت خود از هر طاعتی باز آر و اگر برای ما فراغتی از کارها مقدر نموده باشی، پس آن را به سلامتی قرار ده که در آن گناهی ما را در نیابد و خستگی به ما رو نیاورد تا فرشتگان نویسنده ی بدیها با نامه ی خالی از یاد گناهامان و نویسندگان نیکیها، از ما بر اثر آنچه از نیکیهامان نوشته اند شادمان برگردند و هنگامیکه روزهای زندگانی ما سپری شد و اوقات عمرمان بسر رسید و دعوت تو که از آن و از پذیرفتنش چاره ای نیست ما را احضار نماید، بر پایان آنچه نویسندگان کردارهامان برای ما میشمارند، توبه ی پذیرفته شده قرار ده که پس از آن ما را بر گناهی که بجا آورده و نافرمانی که کرده ایم، باز نداری و روزی که به حساب بندگانت رسیدگی مینمایی در برابر گواهان پرده ای که به آن پوشانده ای، از روی کار ما بر مدار . . . !

تویی که به هر که تو را بخواند مهربان و به هر که تو را آواز دهد روا کننده ای . . .

بر خود لازم می دانم از زحمات بی دریغ استاد راهنمای عزیزم جناب آقای دکتر بارانی تشکر کنم که در تمام مراحل این پایان نامه چراغ راه من بوده اند و نوشتن این پایان نامه بدون کمک ایشان امکان پذیر نبود. همچنین از استاد مشاورم آقای دکتر غضنفری که زحمت مشاوره ام را به عهده داشتند نیز تشکر می کنم.

و نیز از دوستان عزیزم صدیقه حیدری، فتانه غیاثوند، شهناز امرایی و زینب حسن زاده که هر کدام به طریقی مرا یاری نموده اند، کمال تشکر را دارم؛ دستانشان را به گرمی می فشارم و امیدوارم همیشه موفق باشند.

چکیده

نام خانوادگی: رضایی	**نام:** فاطمه	
عنوان پایان‌نامه: نامساوی هرمیت-هادامارد در فضاهای با خمیدگی نامثبت		
استاد راهنما: دکتر علی بارانی		
استاد مشاور: دکتر امیرقاسم غضنفری		
درجه تحصیلی: کارشناسی ارشد	**رشته:** ریاضی محض	**گرایش:** آنالیز
محل تحصیل: دانشگاه لرستان	**دانشکده:** علوم پایه	
تاریخ فارغ التحصیلی: ۱۳۹۲	**تعداد صفحه:** ۸۵	
کلید واژه ها: نامساوی هرمیت-هادامارد، فضای NPC ،فضای با خمیدگی نامثبت، نقاط فرین، مرکز جرم، تحدب ژئودزیکی، فضای هادامارد، نامساوی واریانس، نامساوی ینسن، مقدار میانگین		

چکیده: ابتدا فضاهای متریک با انحنای نامثبت(NPC) را معرفی می کنیم و سپس در مورد مرکز جرم اندازه های احتمال روی چنین فضاهایی بحث می کنیم. هم چنین چند نوع از نامساوی هرمیت-هادامارد را برای توابع محدب در فضای با انحنای نامثبت سرتاسری ارائه می دهیم. در مبحث مرکزجرم اندازه های احتمال در فضای NPC، نتایج مهمی نظیر نامساوی ینسن و خاصیت L^1-انقباضی بیان و ثابت می شود و در آخر مرکزجرم تصاویر، L^2-فضاها و فضاهای هیلبرت را بیان می کنیم. در این پایان نامه، قضیه کرین-میلمن را نیز در فضای برداری توپولوژیکی و فضای NPCسرتاسری بیان و ثابت می کنیم.

فهرست مطالب

پیش گفتار

توابع محدب نقش مهمی را در شاخه های مختلف ریاضیات ایفا می کنند و به ویژه در مباحث بهینه سازی از اهمیت خاصی برخوردار هستند؛ به عنوان مثال یک تابع محدب(اکید) روی یک مجموعه باز بیش از یک مینیمم ندارد؛ هم چنین اگر f یک تابع محدب تعریف شده روی $I = [a, b]$ باشد، داریم:

$$f(\frac{a+b}{۲}) \leq \frac{f(a)+f(b)}{۲}.$$

یکی از مهمترین نامساوی هایی که توجه بسیاری از ریاضیدانان را در چند دهه اخیر به خود جلب کرده است، نامساوی معروف «هرمیت-هادامارد» [۱] است. فرض کنیم f یک تابع محدب انتگرال پذیر روی بازه $I = [a, b]$ باشد. در این صورت:

$$f(\frac{a+b}{۲}) \leq \frac{۱}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{۲},$$

به عنوان نامساوی هرمیت-هادامارد شناخته شده است. این نامساوی که در سال **۱۸۸۳** توسط هرمیت ارائه شد و در سال **۱۸۹۳** توسط هادامارد ثابت شد، تقریبی از مقدار میانگین تابع محدب f به ما می دهد و از این جهت که دیدگاهی را برای «نامساوی ینسن» [۲] فراهم می کند، حائز اهمیت است.
از طرف دیگر مطالعه فضاهای با خمیدگی نامثبت با کار «هادامارد» در سال های آخر قرن گذشته آغاز شد

---

[۱] Hermite-Hadamard

[۲] Jensen inequality

و «کارتان» [۳] ۲۰ سال پس از او در این وادی قدم نهاد. اما شالوده نظریه فضاهای متریک با انحنای از بالا کراندار، ۵۰ سال پس از کارتان، با کار «الکساندروف» [۴] و «بوزمن» [۵] بنا نهاده شد.

انحنای نامثبت در نظریه الکساندرو (NPC) بیان می کند که مثلث های ژئودزی به اندازه کافی کوچک در فضای متریک درونی (N,d) حداقل به اندازه مثلث های اقلیدسی متناظر هستند.

این پایان نامه نمونه هایی از نامساوی هرمیت-هادامارد را برای توابع محدبی که روی یک فضای متریک با انحنای نامثبت سرتاسری تعریف شده اند، بررسی می کند. نظریه فضای NPC دید قابل توجهی را در این موضوع، بر اساس وجود نقطه میانی، ارایه می دهد که در آن $\frac{(a+b)}{۲}$ نقطه میانی پاره خطی است که a را به b وصل می کند. مقدار میانگین f ، انتگرال $fo\alpha_{a,b}$ (تذکر ۱.۴.۱) روی بازه $[۰ , ۱]$ است و در این فضاها، مفهومی از تابع محدب نیز وجود دارد.

فصل اول این پایان نامه به تعریف فضای NPC سرتاسری و چند مثال از این فضا، نامساوی هرمیت-هادامارد و بسیاری تعاریف مورد نیاز دیگر اختصاص داده شده است. در فصل دوم به بیان ویژگی های فضای NPC مانند تحدب و تعامد و انقباض و ... در قالب قضیه می پردازیم و سپس تعمیم های نامساوی هرمیت-هادامارد را روی این فضا بیان می کنیم.

در فصل سوم هم به بیان مرکز جرم و تعیین آن در فضاهای هیلبرت، $L^۲-$ فضاها و ... می پردازیم.

---

[۳] Cartan

[۴] Alexandrov

[۵] Busemann

فصل ۱

تعاریف و مفاهیم مقدماتی

۱.۱ تعاریف اولیه

تعریف ۱.۱.۱. فرض کنید X یک مجموعه ی ناتهی باشد. تابع حقیقی $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}^+$ را یک متر روی X گوییم هرگاه برای هر $x, y, z \in X$ ، در شرایط زیر صدق کند:

(i) $x = y$ اگر و تنها اگر $d(x, y) = ۰$،

(ii) $d(x, y) = d(y, x)$،

(iii) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

مجموعه X را با متر d یک فضای متریک گوییم و آن را با (X, d) نمایش می دهیم.

تعریف ۲.۱.۱. دنباله ی $\{x_n\}_{n=۱}^{\infty}$ در فضای متریک X را کشی نامیم، هرگاه برای هر $\varepsilon > ۰$ ، N ی موجود باشد به قسمی که برای $m, n > N$ داشته باشیم: $d(x_m, x_n) < \varepsilon$.

تعریف ۳.۱.۱. فضای متریک (X, d) را کامل(تام) گوییم هرگاه هر دنباله کشی در X همگرا باشد.

تعریف ۴.۱.۱. مجموعه ناتهی V را همراه با عمل دوتایی جمع و ضرب اسکالر زیر،

$$+ : V \times V \longrightarrow V \quad , \quad \cdot : F \times V \longrightarrow V$$

یک فضای برداری روی میدان F می نامیم اگر شرایط زیر برقرار باشد:
عمل جمع با این تعریف که به ازای هر x و y در V ، $x + y \in V$ و:

(i) $x + y = y + x$،

(ii) $x + (y + z) = (x + y) + z$،

(iii) بردار یکتای ۰ موجود است به طوری که به ازای هر $x \in V$ ، $x + ۰ = x$،

(iv) به ازای هر بردار $x \in V$ ، بردار $-x$ وجود دارد به طوری که، $x + (-x) = ۰$.

و عمل ضرب با این تعریف که به ازای بردارهای $x, y \in V$ و اسکالر $\alpha, \beta \in F$ ، شرایط زیر برقرار باشد:

(i) $1 \cdot x = x$،

(ii) $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$،

(iii) $\alpha(x+y) = \alpha x + \beta y$،

(iv) $(\alpha+\beta)x = \alpha x + \beta x$.

فضای برداری V روی میدان F را با (V, F) نمایش می دهیم.

تعریف ۵.۱.۱. فرض کنیم X یک فضای برداری حقیقی یا مختلط باشد. تابع $P : X \longrightarrow \mathbb{R}$ را یک نیم نرم گویند، هرگاه:

(i) به ازای هر $x, y \in X$ داشته باشیم: $P(x+y) \leq P(x) + P(y)$ ،

(ii) به ازای هر $x \in X$ و هر اسکالر α : $P(\alpha x) =\mid \alpha \mid P(x)$.

با استفاده از (ii) واضح است که $P(0) = 0$ ؛ اگر علاوه بر این، از $P(x) = 0$ نتیجه شود که $x = 0$ ، آن گاه P را یک نرم روی X نامند.

اگر X یک فضای نرم دار باشد و برای هر $x, y \in X$ ، قرار دهیم:

$$d(x,y) =\| x - y \|,$$

آن گاه به سادگی دیده می شود که d یک متر روی X است و لذا هر فضای نرم دار، یک فضای متریک است.

تعریف ۶.۱.۱. فرض کنید X یک فضای برداری، و $\| \cdot \|$ یک نرم روی X باشد. اگر X با متر تولید شده توسط نرم، یک فضای کامل باشد آن گاه $(X, \| \cdot \|)$ را یک فضای «باناخ» [1] گویند.

تعریف ۷.۱.۱. فضای برداری حقیقی(یا مختلط) X ، یک فضای ضرب داخلی نامیده می شود، اگر به هر زوج از بردارهای $x, y \in X$ ، یک عدد حقیقی(یا مختلط) $\langle x, y \rangle$ نسبت داده شود.

[1] Banach

$\langle x, y\rangle$ را ضرب داخلی یا ضرب اسکالر گویند و دارای خواص زیر است:
$\langle\cdot,\cdot\rangle : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ (یا $\langle\cdot,\cdot\rangle : X \times X \longrightarrow \mathbb{C}$)

(i) $\langle y, x\rangle = \overline{\langle x, y\rangle}$ ،

(ii) $\langle x+y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$ ،

(iii) $\langle \alpha x, z\rangle = \alpha\langle x, z\rangle$ ،

(iv) $\langle x, x\rangle \geq ۰ \qquad \forall x \in X$ ،

(v) $\langle x, x\rangle = ۰ \Rightarrow x = ۰$ ،

که در آن α اسکالری در $\mathbb{R}$ یا $\mathbb{C}$ است.

اگر فضای ضرب داخلی X نسبت به نرم $\| x \| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$ کامل باشد، آن را فضای «هیلبرت» [۲] می نامیم و با H نمایش می دهیم.

تعریف ۸.۱.۱. مجموعه $\mathcal{M}$ از زیرمجموعه های مجموعه M را که در ویژگی های زیر صدق می کند، یک $\sigma-$ جبر گویند:

(i) $M \in \mathcal{M}$،

(ii) اگر $A \in \mathcal{M}$ ، آن گاه $A^{\complement} \in \mathcal{M}$،

(iii) اگر $A_i \in \mathcal{M} \quad \forall i = ۱, ۲, \ldots$ ، آن گاه $\bigcup_{i=۱}^{\infty} A_i \in \mathcal{M}$.

کوچک ترین $\sigma-$ جبر $\mathcal{B}$ که شامل همه ی بازه های باز (a, b) و $(-\infty \leq a < b \leq \infty)$ می باشد، $\sigma-$ جبر« بورل » [۳] می نامیم و مجموعه $A \in \mathcal{B}$ ، مجموعه بورل نامیده می شود.

---

[۲] Hilbert

[۳] Borel

تعریف ۹.۱.۱. فرض کنیم M مجموعه ای با یک $\sigma-$ جبر مانند $\mathcal{M}$ باشد. یک اندازه (اندازه احتمال) روی $\mathcal{M}$ (یا به طور خلاصه روی M در صورتی که $\mathcal{M}$ معلوم باشد)، تابعی چون $\mathbb{P}:\mathcal{M}\longrightarrow[0,\infty]$ است به قسمی که:

(i) $\mathbb{P}(\emptyset)=0$

(ii) اگر $\{E_i\}_1^\infty$ دنباله ای از مجموعه های مجزا در $\mathcal{M}$ باشد، آن گاه:

$$\mathbb{P}(\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i)=\sum_{i=1}^{\infty}\mathbb{P}(E_i).$$

$(M,\mathcal{M})$ یک فضای اندازه پذیر نامیده می شود و مجموعه های واقع در $\mathcal{M}$ ، مجموعه های اندازه پذیر نامیده می شوند. اگر $\mathbb{P}$ یک اندازه روی $(M,\mathcal{M})$ باشد، آن گاه $(M,\mathcal{M},\mathbb{P})$ را یک فضای اندازه می نامیم.

تعریف ۱۰.۱.۱. فرض کنید $1\leq p\leq\infty$ و $(M,\mathcal{M},\mathbb{P})$ یک فضای اندازه باشد. مجموعه ی همه ی توابع اندازه پذیر از M به $\mathbb{C}$ یا $\mathbb{R}$ که:

$$\|f\|_p=\left(\int_M\mid f\mid^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}<\infty,$$

را فضای L^p می نامند و به صورت $L^p(M,\mathcal{M},\mathbb{P})$ نمایش می دهند.

برای $p=2$ ، فضای L^2 فقط شامل فضای هیلبرت می باشد، که :

$$\langle f,g\rangle=\int_M f(x)\overline{g(x)}d\mu(x).$$

تعریف ۱۱.۱.۱. اندازه δ_x روی مجموعه X (با هر $\sigma-$ جبر از زیرمجموعه های X) را که برای هر $x\in X$ و هر زیرمجموعه (اندازه پذیر) $A\subseteq X$ به صورت زیر تعریف می شود، اندازه دیراک گوییم:

$$\delta_x(A)=1_A(x)=\begin{cases}0 & x\notin A\\ 1 & x\in A\end{cases}$$

که تابع 1_A ، همان تابع اندیکاتور است.

تعریف ۱.۱.۱۲. فرض کنید $(M,\mathcal{M})$ یک فضای اندازه پذیر باشد و (N,d) یک فضای متریک باشد. نگاشت $f:M\longrightarrow N$ اندازه پذیر نامیده می شود اگر و فقط اگر برای $\sigma-$ جبر $\mathcal{M}$ روی M و $\sigma-$ جبر بورل $\mathcal{B}(N)$ روی N ، اندازه پذیر باشد؛ یا به طور معادل ،

$$\forall N'\in\mathcal{B}(N):\qquad f^{-1}(N')\in\mathcal{M}.$$

تذکر ۱.۱.۱. نگاشت $f:M\longrightarrow N$ اندازه پذیر ضعیف است اگر و فقط اگر اندازه پذیر باشد و دارای برد متناهی باشد؛ به عبارت دیگر، اگر و فقط اگر یک تجزیه از M به مجموعه های مجزای $M_i\in\mathcal{M}$ موجود باشد به طوری که f روی هر M_i ثابت باشد.
این نگاشت، اندازه پذیر قوی نامیده می شود اگر و فقط اگر حد(نقطه به نقطه)یک دنباله از نگاشت های اندازه پذیر ضعیف باشد، به طور معادل، اگر و فقط اگر اندازه پذیر باشد و دارای برد جدایی پذیر $f(M)$ باشد.

تعریف ۱.۱.۱۳. فرض کنیم (N,d) و (M,d') دو فضای متریک باشند. تابع f را نیز به صورت $f:N\longrightarrow M$ در نظر می گیریم. در این صورت، f یک انقباض نامیده می شود اگر یک ثابت مانند $k<1$ موجود باشد، به طوری که:

$$\forall x,y\in M,\qquad d'(f(x),f(y))\leq kd(x,y).$$

تعریف ۱.۱.۱۴. بستار مجموعه $\{x\in X: f(x)\neq 0\}$ را ساپورت f یا محمل f می نامیم و با $supp(f)$ نمایش می دهیم.

تعریف ۱.۱.۱۵. فرض کنیم X یک فضای متریک باشد و $f:X\longrightarrow\overline{\mathbb{R}}$. حد پایینی تابع f در نقطه a به صورت زیر تعریف می شود:

$$\liminf_{x\longrightarrow a}:=\lim_{r\longrightarrow 0} inf\{f(x)|x\in dom(f)\cap B_r(a)\},$$

که در آن $B_r(a)$ ، گوی به مرکز a و شعاع r می باشد.
هم چنین، حد بالایی تابع $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ در نقطه a به صورت زیر تعریف می شود:

$$\limsup_{x \longrightarrow a} f(x) := \lim_{r \longrightarrow ۰} sup\{f(x)|x \in dom(f) \cap B_r(a)\}.$$

تعریف ۱۶.۱.۱. فرض کنید X یک فضای متریک باشد. تابع $f : X \longrightarrow [-\infty, +\infty)$ را نیم پیوسته بالایی در $x_۰ \in X$ گوییم هرگاه به ازای هر $\varepsilon > ۰$ ، $\delta > ۰$ وجود داشته باشد، به قسمی که برای $y \in B(x_۰, \delta)$ داشته باشیم : $f(y) \leq f(x_۰) + \varepsilon$.
f روی X نیم پیوسته بالایی است هرگاه f در هر نقطه X نیم پیوسته بالایی باشد.

تعریف ۱۷.۱.۱. فرض کنید X یک فضای متریک باشد. تابع $f : X \longrightarrow (-\infty, +\infty]$ را نیم پیوسته پایینی در $x_۰$ گوییم هرگاه به ازای هر $\varepsilon > ۰$ ، $\delta > ۰$ وجود داشته باشد به قسمی که برای $y \in B(x_۰, \delta)$ داشته باشیم : $f(y) \geq f(x_۰) - \varepsilon$.
f روی X نیم پیوسته پایینی است هرگاه f در هر نقطه X نیم پیوسته پایینی باشد.

به عبارت دیگر، تابع $f : X \longrightarrow (-\infty, +\infty]$ نیم پیوسته پایینی در $x_۰ \in X$ است اگر و فقط اگر، برای هر دنباله ی $(x_n) \subset X$ که $x_n \longrightarrow x_۰$ ، داشته باشیم:

$$\liminf_{n \longrightarrow \infty} f(x_n) \geq f(x_۰).$$

هم چنین تابع $f : X \longrightarrow [-\infty, +\infty)$ نیم پیوسته بالایی در $x_۰ \in X$ است اگر و فقط اگر، برای هر دنباله ی $(x_n) \subset X$ که $x_n \longrightarrow x_۰$ ، داشته باشیم:

$$\limsup_{n \longrightarrow \infty} f(x_n) \leq f(x_۰).$$

تعریف ۱۸.۱.۱. فرض کنیم S یک مجموعه بسته باشد. تابع فاصله از مجموعه بسته S ، به صورت زیر

تعریف می شود:

$$d_S(x) = inf\{d(x,y)|y \in S\},$$

واضح است که $d_S(x)$ تابعی محدب است اگر و فقط اگر S محدب باشد.

تعریف ۱۹.۱.۱. فرض کنید S زیرمجموعه ای از فضای برداری X باشد. غلاف محدب مجموعه S که با $conv(S)$ نشان داده می شود، عبارت است از اشتراک تمام مجموعه های محدبی که مشتمل بر S هستند. به عبارت دیگر،

$$conv(S) = \left\{ \sum_{i=1}^{m} \lambda_i x_i : m \in \mathbb{N}, x_1, ..., x_m \in S, (\lambda_1, ..., \lambda_m) \in \Delta_{m-1} \right\},$$

که در آن

$$\Delta_{m-1} := \left\{ \lambda_1, ..., \lambda_m \in [0,1] : \sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1 \right\}.$$

به عنوان مثال، برای $S = \{x_1 = (0,1), x_2 = (1,0)\}$ ، غلاف محدب آن به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} conv(S) &= \{tx_1 + (1-t)x_2 | t \in [0,1]\} \\ &= \{t(0,1) + (1-t)(1,0) | t \in [0,1]\} \\ &= \{(1-t,t) \quad t \in [0,1]\}. \end{aligned}$$

لذا نمودار $x + y = 1$ با ابتدا و انتها در x_1 و x_2 ، غلاف محدب مجموعه ی S است.

تعریف ۲۰.۱.۱. فرض کنیم K یک زیرمجموعه محدب از فضای برداری $\mathbb{R}^n$ باشد. به زیرمجموعه ی ناتهی $S \subseteq K$ ، مجموعه ی نقاط فرینه K گفته می شود، اگر هیچ نقطه ای از S یک نقطه میانی از یک پاره خط با نقاط انتهایی در K نباشد؛ به عبارت دیگر، اگر S یک مجموعه محدب ناتهی در $\mathbb{R}^n$ باشد، بردار $x \in S$

یک نقطه فرینه در S است اگر به ازای $x_۱, x_۲ \in S$ و $t \in (۰, ۱)$ ، $x = tx_۱ + (۱ - t)x_۲$ آن گاه:

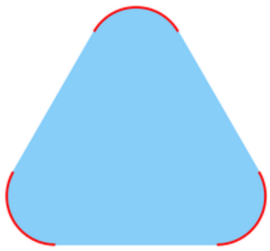
$$x = x_۱ = x_۲$$

مجموعه نقاط فرینه S را با $Ext(S)$ نمایش می دهند.

مثال ۱.۱.۱. برای مجموعه $S = \{(x_۱, x_۲) : x_۱^۲ + x_۲^۲ \leq ۱\}$ ، مجموعه نقاط فرینه آن به صورت زیر است:

$$E = \{(x_۱, x_۲) : x_۱^۲ + x_۲^۲ = ۱\}.$$

مثال ۲.۱.۱. در شکل زیر، مجموعه نقاط روی رئوس که به صورت پررنگ مشخص شده اند، مجموعه نقاط



فرینه روی مثلث می باشند.

تذکر ۲.۱.۱. با توجه به دو مثالی که در فوق مطرح شد، می توان دریافت که هر نقطه مرزی لزوماً یک نقطه فرینه نیست.

تعریف ۲۱.۱.۱. برای تابع حقیقی مقدار f با دامنه S ، $argmin_{x\in S}f(x)$ را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$argmin_{x\in S}f(x) = \{x \in S : f(x) = \min_{y\in S} f(y)\}.$$

واضح است که این مجموعه محدب است اگر و فقط اگر f محدب باشد.

تعریف ۲۲.۱.۱. فرض کنیم $g : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$. در این صورت g را یک فرم دوخطی روی فضای برداری

V گویند هرگاه، g نسبت به هر دو مؤلفه خطی باشد؛ یعنی:

$$g(\alpha v_1 + \beta v_2, w) = \alpha g(v_1, w) + \beta g(v_2, w),$$
$$g(v, \alpha w_1 + \beta w_2) = \alpha g(v, w_1) + \beta g(v, w_2).$$

تذکر ۳.۱.۱. فرض کنیم M یک خمینه باشد و $p \in M$. مجموعه همه توابع C^∞ که دامنه آن ها مجموعه بازی مانند U است که شامل p باشد را با $C^\infty(P)$ نمایش می دهیم.

تعریف ۲۳.۱.۱. فضای مماس بر خمینه M در نقطه $p \in M$ ، را با T_pM نمایش می دهیم و آن را مجموعه توابعی مانند $X_p : C^\infty(P) \longrightarrow \mathbb{R}$ گوییم که $\forall f, g \in C^\infty(P)$ ، دارای خواص زیر هستند:

۱. $X_p(\alpha f + \beta g) = \alpha X_p(f) + \beta X_p(g)$ ،

۲. $X_p(fg) = g(p)X_p(f) + f(p)X_p(g)$.

تعریف ۲۴.۱.۱. یک میدان روی یک خمینه مانند M ، تابعی است که برای هر $p \in M$ یک فرم دوخطی مانند $g_p : T_pM \times T_pM \longrightarrow \mathbb{R}$ تعریف می کند؛ به عبارت دیگر:

$$p \longmapsto g_p : T_pM \times T_pM \longrightarrow \mathbb{R}.$$

تعریف ۲۵.۱.۱. خمینه M را که روی آن یک میدان از فرم های دوخطی متقارن و معین مثبت مانند g وجود داشته باشد، یک خمینه ریمانی می نامیم و آن را به صورت (M, g) نمایش می دهیم که در آن، g متر ریمانی است. به عبارت دیگر اگر M یک خمینه ریمانی باشد، متر ریمانی g روی M ، نگاشت دیفرانسیل پذیر $g_p : T_pM \times T_pM \longrightarrow \mathbb{R}$ است، به طوری که:

(i) $g_p(aX_1 + bX_2, Y) = ag_p(X_1, Y) + bg_p(X_2, Y)$ ،

(ii) $g_p(X, Y) = g_p(Y, X)$ ،

(iii) $g_p(X, X) > 0 \quad \forall X \neq 0$ ،