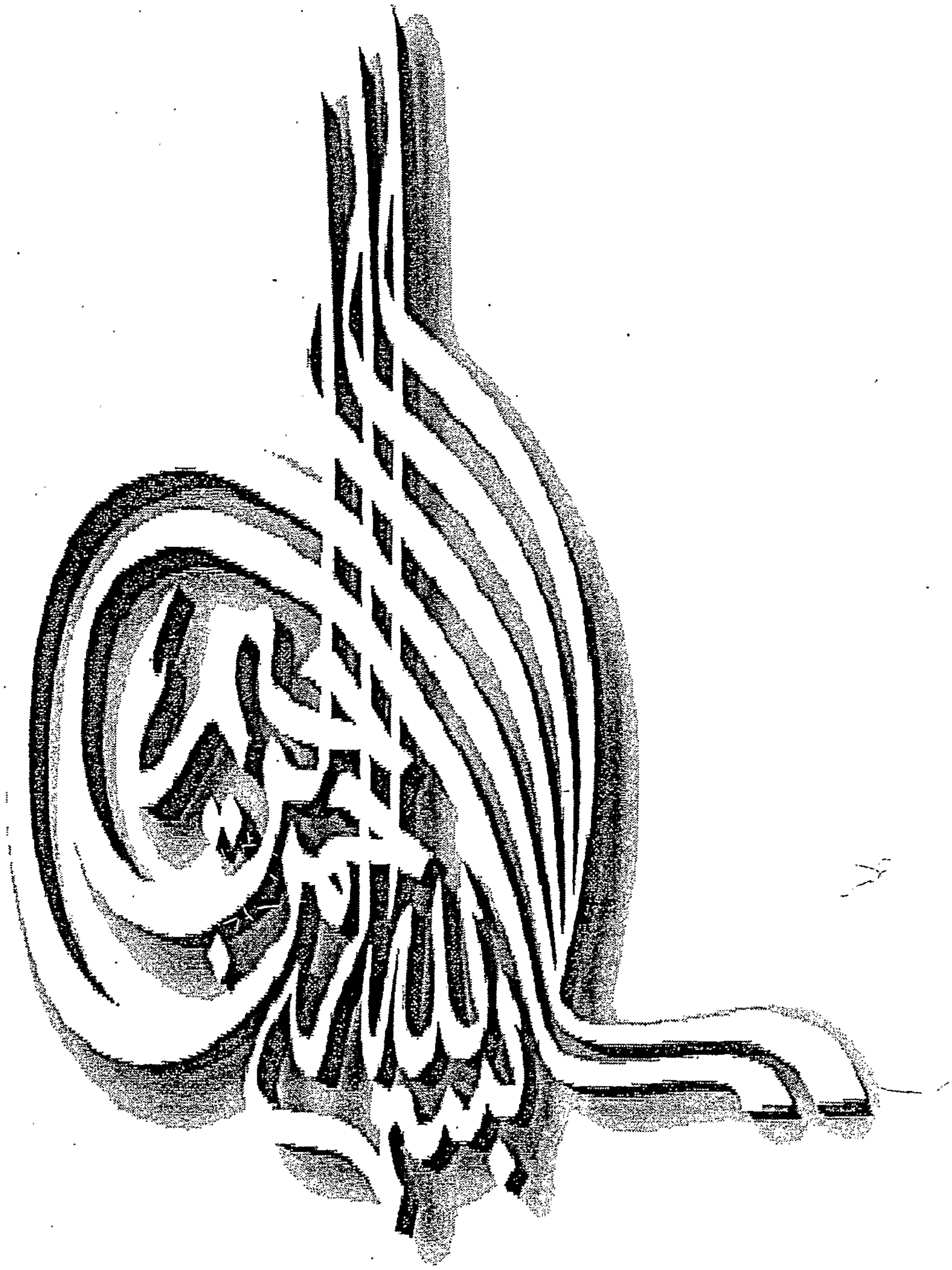

دانشگاه تربیت مدرس

دانشکده علوم پایه

پایان نامه دوره کارشناسی ارشد ریاضی کاربردی

حل معادلات دیفرانسیل با استفاده از شبکه‌های عصبی پیشرو

توسط

ربابه محمدزاده

استاد راهنما

دکتر سید محمد حسینی

اسفند ماه ۱۳۸۷

دانشگاه تربیت مدرس

دانشکده علوم پایه

بسمه تعالی

تاییدیه اعضای هیات داوران حاضر در جلسه دفاع از پایان‌نامه کارشناسی‌ارشد

عضای هیئت داوران نسخهٔ نهایی پایان‌نامه خانم **ربابه محمدزاده** رشته **ریاضی (کاربردی)** تحت عنوان:«**حل معادلات دیفرانسیل با استفاده از شبکه‌های عصبی پیشرو**» از نظر فرم و محتوا بررسی نموده و آنرا برای اخذ درجهٔ کارشناسی‌ارشد مورد تائید قرار دادند.

اعضای هیأت داوران	نام و نام خانوادگی	رتبه علمی	امضاء
۱- استاد راهنما	دکتر سیدمحمد حسینی	استاد	
۲- استاد ناظر داخلی	دکتر محمد باقری	استادیار	
۳- استاد ناظر داخلی	دکتر اسماعیل بابلیان	استاد	
٤- استاد ناظر خارجی	دکتر جلیل رشیدی‌نیا	دانشیار	
۵- نماینده تحصیلات تکمیلی	دکتر محمد باقری	استادیار	

بسمه‌تعالی

آیین‌نامهٔ چاپ پایان‌نامه (رساله)های دانشجویان دانشگاه تربیت مدرّس

نظر به اینکه چاپ و انتشار پایان‌نامه (رساله)های تحصیلی دانشجویان دانشگاه تربیت مدرّس، مبیّن بخشی از فعالیتهای علمی - پژوهشی دانشگاه است بنابراین به منظور آگاهی و رعایت حقوق دانشگاه، دانش‌آموختگان این دانشگاه نسبت به رعایت موارد ذیل متعهد می‌شوند:

مادّهٔ ۱ در صورت اقدام به چاپ پایان‌نامه (رساله)ی خود، مراتب را قبلاً به طور کتبی به «دفتر نشر آثار علمی» دانشگاه اطلاع دهد.

مادّهٔ ۲ در صفحهٔ سوم کتاب (پس از برگ شناسنامه)، عبارت ذیل را چاپ کند:

«کتاب حاضر، حاصل پایان‌نامهٔ کارشناسی ارشد/رسالهٔ دکتری نگارنده در رشتهٔ ریاضی کاربردی *است که در سال* ۱۳۸۷ *در دانشکدهٔ* علوم پایه *دانشگاه تربیت مدرّس به راهنمایی سرکار خانم/جناب آقای دکتر* سید محمد حسینی*، مشاورهٔ سرکار خانم/جناب آقای دکتر* — *و مشاورهٔ سرکار خانم/جناب آقای دکتر* — *از آن دفاع شده است.»*

مادّهٔ ۳ به منظور جبران بخشی از هزینه‌های انتشارات دانشگاه، تعداد یک درصد شمارگان کتاب (در هر نوبت چاپ) را به «دفتر نشر آثار علمی» دانشگاه اهدا کند. دانشگاه می‌تواند مازاد نیاز خود را به نفع مرکز نشر در معرض فروش قرار دهد.

مادّهٔ ۴ در صورت عدم رعایت مادّهٔ ۳، ۵۰٪ بهای شمارگان چاپ‌شده را به عنوان خسارت به دانشگاه تربیت مدرّس، تأدیه کند.

مادّهٔ ۵ دانشجو تعهد و قبول می‌کند در صورت خودداری از پرداخت بهای خسارت، دانشگاه می‌تواند خسارت مذکور را از طریق مراجع قضایی مطالبه و وصول کند؛ به علاوه به دانشگاه حق می‌دهد به منظور استیفای حقوق خود، از طریق دادگاه، معادل وجه مذکور در مادّهٔ ۴ را از محلّ توقیف کتابهای عرضه‌شدهٔ نگارنده برای فروش، تأمین نماید.

مادّهٔ ۶ اینجانب رباب محمدزاده دانشجوی رشته ریاضی کاربردی مقطع کارشناسی ارشد تعهد فوق و ضمانت اجرایی آن را قبول کرده، به آن ملتزم می‌شوم.

نام و نام خانوادگی: رباب محمدزاده

تاریخ و امضا:

۸۸/۴/۲۴

آیین‌نامه حق مالکیت مادی و معنوی در مورد نتایج پژوهشهای علمی

دانشگاه تربیت مدرس

مقدمه:

با عنایت به سیاست‌های پژوهشی و فناوری دانشگاه در راستای تحقق عدالت وکرامت انسانها که لازمه شکوفایی علمی و فنی است و رعایت حقوق مادی و معنوی دانشگاه و پژوهشگران، لازم است اعضای هیأت‌علمی، دانشجویان، دانش‌آموختگان و دیگر همکاران طرح، در مورد نتایج پژوهشهای علمی که تحت عناوین پایان‌نامه، رساله و طرحهای تحقیقاتی با هماهنگی دانشگاه انجام شده است، موارد زیر را رعایت نمایند:

ماده ۱- حق نشر و تکثیر پایان‌نامه/رساله و درآمدهای حاصل از آنها متعلق به دانشگاه می‌باشد ولی حقوق معنوی پدیدآورندگان محفوظ خواهد بود.

ماده ۲- انتشار مقاله یا مقالات مستخرج از پایان‌نامه / رساله به صورت چاپ در نشریات علمی و یا ارائه در مجامع علمی باید به نام دانشگاه بوده و با تایید استاد راهنمای اصلی، یکی از اساتید راهنما، مشاور و یا دانشجوی مسئول مکاتبات مقاله باشد. ولی مسئولیت علمی مقاله مستخرج از پایان‌نامه و رساله به عهده اساتید راهنما و دانشجو می‌باشد.

تبصره: در مقالاتی که پس از دانش‌آموختگی بصورت ترکیبی از اطلاعات جدید و نتایج حاصل از پایان‌نامه/رساله نیز منتشر می‌شود نیز باید نام دانشگاه درج شود.

ماده ۳- انتشار کتاب و یا نرم‌افزار و یا آثار ویژه حاصل از نتایج پایان‌نامه / رساله و تمامی طرحهای تحقیقاتی کلیه واحدهای دانشگاه اعم از دانشکده‌ها، مراکز تحقیقاتی، پژوهشکده‌ها، پارک علم و فناوری و دیگر واحدها باید با مجوز کتبی صادره از معاونت پژوهشی دانشگاه و براساس آئین‌نامه‌های مصوب انجام شود.

ماده ٤- ثبت اختراع و تدوین دانش فنی و یا ارائه یافته‌ها در جشنواره‌های ملی، منطقه‌ای و بین‌المللی که حاصل نتایج مستخرج از پایان‌نامه/رساله و تمامی طرح‌های تحقیقاتی دانشگاه باید با هماهنگی استاد راهنما یا مجری طرح از طریق معاونت پژوهشی دانشگاه انجام گیرد.

ماده ٥- این آیین‌نامه در ٥ ماده و یک تبصره در تاریخ ۸۷/٤/۱ در شورای پژوهشی و در تاریخ ۸۷/٤/۲۳ در هیأت‌رئیسه دانشگاه به تایید رسید و در جلسه مورخ ۸۷/۷/۱۵ شورای دانشگاه به تصویب رسیده و از تاریخ تصویب در شورای دانشگاه لازم‌الاجرا است.

رضا محمدزاده

۸۸/٥/۲٤

چکیده

در این پایان‌نامه، برای حل عددی معادلات دیفرانسیل جزئی از شبکه‌های تابع پایه شعاعی بر مبنای روش هم‌مکانی استفاده شده است که ویژگی بارز این روش، عدم نیاز به شبکه‌بندی دامنه مساله می‌باشد. در این راستا، برای تقریب تابع و مشتقاتش روش‌های شبکه تابع پایه شعاعی مستقیم و شبکه تابع پایه شعاعی غیرمستقیم به کار می‌روند. در کار حاضر، تمرکز اصلی بر بررسی معادلات دیفرانسیل بیضوی (خطی) دوبعدی با استفاده از روش شبکه تابع پایه شعاعی غیرمستقیم (یک‌بعدی) می‌باشد. بدین منظور، روش مذکور با روش شبکه دکارتی ترکیب شده است. به منظور ارزیابی دقت و کارایی مناسب این روش، مسایل مقدار مرزی از دو دیدگاه بالا بودن مرتبه معادله حاکم و نامنظم بودن دامنه مطالعه می‌شوند. این مطالعه نشان می‌دهد روش شبکه تابع پایه شعاعی غیرمستقیم (یک‌بعدی) دقیق‌تر از روش شبکه تابع پایه شعاعی مستقیم عمل می‌کند. همچنین، روش شبکه تابع پایه شعاعی غیرمستقیم را می‌توان برای حل عددی معادلات وابسته به زمان به کار برد.

واژه‌های کلیدی : شبکه تابع پایه شعاعی، روش هم‌مکانی، معادلات دیفرانسیل جزئی، روش شبکه دکارتی، دامنه نامنظم، روش IRBFN، معادله KdV.

فهرست مندرجات

لیست اشکال

لیست جداول

مقدمه

معادلات دیفرانسیل جزئی از مدلبندی ریاضی مسایل فیزیک و مهندسی حاصل می‌شوند. لیکن، امکان ارائه یک جواب تحلیلی برای این نوع معادلات همواره مقدور نمی‌باشد. بنابراین، پژوهشگران علوم و مهندسی برای حل این مساله به روش‌های گسسته‌سازی عددی روی آورده‌اند. روش تفاضلات متناهی، روش اجزاء متناهی، روش حجم متناهی و روش اجزاء مرزی از روش‌های قوی در حل عددی مسایل مقدار مرزی در مکانیک کوانتومی هستند. اما این روش‌ها برای احراز مرتبه بالایی از دقت، به شبکه‌بندی‌های چگال‌تری نیاز دارند. از طرف دیگر، روش طیفی، روش کوادراتور دیفرانسیلی و روش شبکه توابع پایه شعاعی (RBFN) در دسته روش‌های مرتبه بالا قرار می‌گیرند که می‌توانند با گسسته‌سازی درشت دامنه تحت بررسی، منجر به نتایجی دقیق گردند. مفهوم استفاده از شبکه RBF در حل PDE، نخستین بار در سال ۱۹۹۰ توسط کانزا[۱] مطرح شد. مشخصه بارز روش‌های بر مبنای شبکه‌های عصبی این است که نیاز به شبکه‌بندی ندارند. این روش‌ها، برای نمایش جواب از تقریبات بر پایه RBFN از مکانیسم هم‌مکانی استفاده می‌کنند.

تفاوت روش‌های هم‌مکانی طیفی با روش RBFN در این است که در روش طیفی، صفرهای توابع پایه‌ای (چندجمله‌ای چبیشف) به عنوان نقاط هم‌مکانی انتخاب می‌شوند؛ در حالی که در روش RBFN، این نقاط به طور تصادفی انتخاب می‌شوند. به‌عبارت دیگر، روش‌های RBFN برای به‌کارگیری نسبتاً آسان هستند. به‌ویژه، در بررسی مسایل مقدار مرزی با نواحی هندسی پیچیده و یا با

[1] Kansa

معادلات دیفرانسیلی حاکم شامل عملگرهای پیچیده می‌توان از این روش‌ها استفاده نمود.

شبکه‌های RBF را می‌توان به عنوان یک روش تقریب‌زننده سراسری بررسی کرد. مادیچ [۲] و نلسون [۳] نشان دادند که روش درونیاب RBF با استفاده از توابع چندربعی همگرایی نمایی به دست می‌دهد. در بیست سال اخیر، این روش به طور وسیعی در حل معادلات دیفرانسیل جزئی کاربرد یافته است. در ادامه روش متداول RBFN مشتق‌یافته یا مستقیم [۴] (DRBFN)، مایی—دوی [۵] و ترن—کنگ [۶] در سال ۱۹۹۸ روش جدید RBFN انتگرال‌یافته یا غیرمستقیم [۷] (IRBFN) را برای تقریب تابع و مشتقات آن به منظور حل معادلات دیفرانسیل ارائه کردند. آنها نشان دادند روش پیشنهادی از دقت مطلوبی برخوردار است.

مرجع اصلی این پایان‌نامه، مقاله [۲۰] می‌باشد. فصل اول به بیان برخی تعاریف و قضایای مقدماتی می‌پردازد. در فصل دوم، به بیان مفهوم شبکه عصبی و معرفی شبکه RBF و مطالعه کاربرد آن در حوزه درونیابی و تقریب توابع پرداخته می‌شود. بدین منظور، روش‌های DRBFN و IRBFN معرفی می‌شوند و تأثیر عوامل مؤثر بر کارایی آنها، در بخش پایانی فصل با ذکر چند مثال عددی بررسی می‌شود. فصل سوم به نحوه پیاده‌سازی روش‌های مذکور، در حل معادلات دیفرانسیل می‌پردازد. در این فصل سعی شده، روش شبکه RBF برای حل مسایل بیضوی خطی دوبعدی در نواحی نامنظم و با مراتب بالا، به ساده‌ترین و تا حد توان جامع‌ترین شکل ممکن مورد بررسی قرار گیرد؛ بدین منظور برای به‌کارگیری این روش‌ها، از معادله پواسون دوبعدی و معادله دوهمساز به عنوان ساده‌ترین انواع PDE بیضوی خطی استفاده شده است و در انتهای فصل به تجزیه و تحلیل چند مثال عددی پرداخته شده است. در فصل چهارم، ایده جدید به‌کارگیری روش IRBFN در بررسی

[۲] Madych

[۳] Nelson

[۴] Differentiated/Direct radial basis function network

[۵] Mia-Duy

[۶] Tran-Cong

[۷] Integrated/Indirect radial basis function network

مسایل مقدار مرزی وابسته به زمان گنجانده شده است. معادله خاص مطرح شده در این فصل، معادله غیرخطی مرتبه سه KdV می‌باشد که با پیشنهاد دو رویکرد گسسته‌سازی بررسی می‌گردد.

لازم به ذکر است همه نتایج عددی و محاسباتی موجود در این پایان‌نامه، با استفاده از نرم‌افزار MATLAB شبیه‌سازی شده‌اند.

فصل ۱

پیشنیازها

۱.۱ مقدمه

در این فصل، بعضی از تعاریف و مفاهیم اساسی آنالیز ریاضی و نظریه معادلات دیفرانسیل را که پیشنیاز فصل‌های بعد است، بیان خواهیم کرد.

۲.۱ تعاریف و مفاهیم

تعریف ۱.۱ می‌گوییم تابع $f : I \subseteq R \to R$ از رده C^k است هرگاه f، f'، ... و $f^{(k)}$ روی I موجود و پیوسته باشند. به طور مشابه، $f : D \subseteq R^n \to R$ از رده C^k است هرگاه تمام مشتقات جزئی آن از مرتبه کوچکتر یا مساوی k روی D موجود و پیوسته باشند. اگر تابعی دارای مشتقات پیوسته از هر مرتبه‌ای باشد می‌گوییم از رده C^∞ است [۳۴].

تعریف ۲.۱ فرض کنید X یک فضای برداری باشد، تابع حقیقی $\|.\| : X \to R$ یک نرم روی X می‌باشد، هرگاه برای هر $x, y \in X$ و $a \in R$ داشته باشیم [۳۳]: