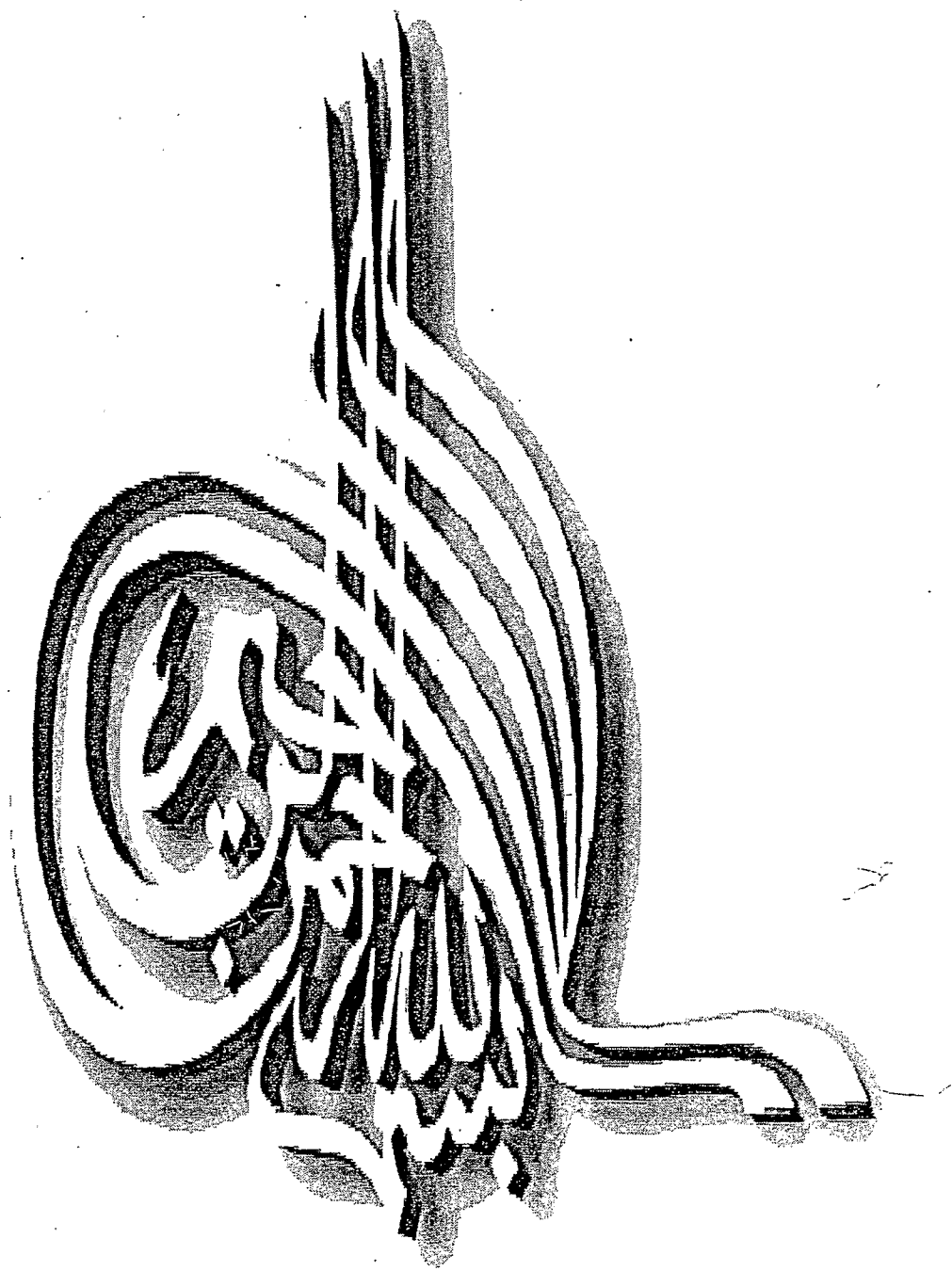
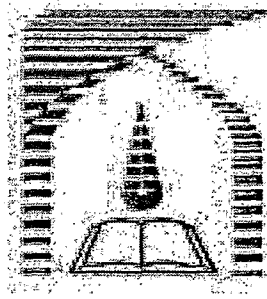


1192A



1121A - 2 - 1982



دانشگاه تربیت مدرس

دانشکده علوم پایه

پایان نامه دوره کارشناسی ارشد ریاضی کاربردی

حل معادلات دیفرانسیل با استفاده از

شبکه‌های عصبی پیشرو

توسط

ربابه محمدزاده

استاد راهنما

دکتر سید محمد حسینی

تأیید استاد راهنما
تعمیر مدارک

۱۳۸۸/۱۶/۱۶

۱۱۶۳۸۰

اسفند ماه ۱۳۸۷








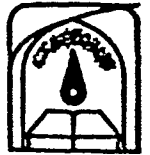
دانشکده علوم پایه

بسمه تعالی

تاییدیه اعضای هیات داوران حاضر در جلسه دفاع از پایان نامه کارشناسی ارشد

عضای هیئت داوران نسخه نهایی پایان نامه خانم ربابه محمدزاده رشته ریاضی (کاربردی) تحت عنوان: «حل معادلات دیفرانسیل با استفاده از شبکه های عصبی پیشرو» از نظر فرم و محتوا بررسی نموده و آنرا برای اخذ درجه کارشناسی ارشد مورد تأیید قرار دادند.

اعضای هیات داوران	نام و نام خانوادگی	رتبه علمی	امضاء
۱- استاد راهنما	دکتر سیدمحمد حسینی	استاد	
۲- استاد ناظر داخلی	دکتر محمد باقری	استادیار	
۳- استاد ناظر داخلی	دکتر اسماعیل بابلیان	استاد	
۴- استاد ناظر خارجی	دکتر جلیل رشیدی نیا	دانشیار	
۵- نماینده تحصیلات تکمیلی	دکتر محمد باقری	استادیار	



بسمه تعالی

آیین‌نامه چاپ پایان‌نامه (رساله)‌های دانشجویان دانشگاه تربیت مدرس

نظر به اینکه چاپ و انتشار پایان‌نامه (رساله)‌های تحصیلی دانشجویان دانشگاه تربیت مدرس، مبین بخشی از فعالیتهای علمی - پژوهشی دانشگاه است بنابراین به منظور آگاهی و رعایت حقوق دانشگاه، دانش‌آموختگان این دانشگاه نسبت به رعایت موارد ذیل متعهد می‌شوند:

ماده ۱ در صورت اقدام به چاپ پایان‌نامه (رساله)ی خود، مراتب را قبلاً به طور کتبی به «دفتر نشر آثار علمی» دانشگاه اطلاع دهد.

ماده ۲ در صفحه سوم کتاب (پس از برگ شناسنامه)، عبارت ذیل را چاپ کند:
«کتاب حاضر، حاصل پایان‌نامه کارشناسی ارشد / رساله دکتری نگارنده در رشته ریاضی کاربردی است که در سال ۱۳۸۷ در دانشکده علوم پایه دانشگاه تربیت مدرس به راهنمایی سرکار خانم / جناب آقای دکتر سید محمد حسینی، مشاوره سرکار خانم / جناب آقای دکتر _____ و مشاوره سرکار خانم / جناب آقای دکتر _____ از آن دفاع شده است.»

ماده ۳ به منظور جبران بخشی از هزینه‌های انتشارات دانشگاه، تعداد یک درصد شمارگان کتاب (در هر نوبت چاپ) را به «دفتر نشر آثار علمی» دانشگاه اهدا کند. دانشگاه می‌تواند مازاد نیاز خود را به نفع مرکز نشر در معرض فروش قرار دهد.

ماده ۴ در صورت عدم رعایت ماده ۳، ۵۰٪ بهای شمارگان چاپ شده را به عنوان خسارت به دانشگاه تربیت مدرس، تأدیه کند.

ماده ۵ دانشجوی تعهد و قبول می‌کند در صورت خودداری از پرداخت بهای خسارت، دانشگاه می‌تواند خسارت مذکور را از طریق مراجع قضایی مطالبه و وصول کند؛ به علاوه به دانشگاه حق می‌دهد به منظور استیفای حقوق خود، از طریق دادگاه، معادل وجه مذکور در ماده ۴ را از محل توقیف کتابهای عرضه شده نگارنده برای فروش، تأمین نماید.

ماده ۶ اینجانب ریاضی محمدزاده دانشجوی رشته ریاضی کاربردی مقطع کارشناسی ارشد تعهد فوق و ضمانت اجرایی آن را قبول کرده، به آن ملتزم می‌شوم.

نام و نام خانوادگی: ریاضی محمدزاده

تاریخ و امضا:

۸۸، ۸، ۲۴

آیین‌نامه حق مالکیت مادی و معنوی در مورد نتایج پژوهشهای علمی

دانشگاه تربیت مدرس

مقدمه:

با عنایت به سیاست‌های پژوهشی و فناوری دانشگاه در راستای تحقق عدالت و کرامت انسانها که لازمه شکوفایی علمی و فنی است و رعایت حقوق مادی و معنوی دانشگاه و پژوهشگران، لازم است اعضای هیأت علمی، دانشجویان، دانش‌آموختگان و دیگر همکاران طرح، در مورد نتایج پژوهشهای علمی که تحت عناوین پایان‌نامه، رساله و طرحهای تحقیقاتی با هماهنگی دانشگاه انجام شده است، موارد زیر را رعایت نمایند:

ماده ۱- حق نشر و تکثیر پایان‌نامه/رساله و درآمدهای حاصل از آنها متعلق به دانشگاه می‌باشد ولی حقوق معنوی پدیدآورندگان محفوظ خواهد بود.

ماده ۲- انتشار مقاله یا مقالات مستخرج از پایان‌نامه / رساله به صورت چاپ در نشریات علمی و یا ارائه در مجامع علمی باید به نام دانشگاه بوده و با تایید استاد راهنمای اصلی، یکی از اساتید راهنما، مشاور و یا دانشجوی مسئول مکاتبات مقاله باشد. ولی مسئولیت علمی مقاله مستخرج از پایان‌نامه و رساله به عهده اساتید راهنما و دانشجو می‌باشد.

تبصره: در مقالاتی که پس از دانش‌آموختگی بصورت ترکیبی از اطلاعات جدید و نتایج حاصل از پایان‌نامه/رساله نیز منتشر می‌شود نیز باید نام دانشگاه درج شود.

ماده ۳- انتشار کتاب و یا نرم‌افزار و یا آثار ویژه حاصل از نتایج پایان‌نامه / رساله و تمامی طرحهای تحقیقاتی کلیه واحدهای دانشگاه اعم از دانشکده‌ها، مراکز تحقیقاتی، پژوهشکده‌ها، پارک علم و فناوری و دیگر واحدها باید با مجوز کتبی صادره از معاونت پژوهشی دانشگاه و براساس آئین‌نامه‌های مصوب انجام شود.

ماده ۴- ثبت اختراع و تدوین دانش فنی و یا ارائه یافته‌ها در جشنواره‌های ملی، منطقه‌ای و بین‌المللی که حاصل نتایج مستخرج از پایان‌نامه/رساله و تمامی طرحهای تحقیقاتی دانشگاه باید با هماهنگی استاد راهنما یا مجری طرح از طریق معاونت پژوهشی دانشگاه انجام گیرد.

ماده ۵- این آیین‌نامه در ۵ ماده و یک تبصره در تاریخ ۸۷/۴/۱ در شورای پژوهشی و در تاریخ ۸۷/۴/۲۳ در هیأت‌رئیس دانشگاه به تایید رسید و در جلسه مورخ ۸۷/۷/۱۵ شورای دانشگاه به تصویب رسیده و از تاریخ تصویب در شورای دانشگاه لازم‌الاجرا است.

رئیس هیأت‌رئیس
۸۸، ۵، ۲۴

چکیده

در این پایان‌نامه، برای حل عددی معادلات دیفرانسیل جزئی از شبکه‌های تابع پایه شعاعی بر مبنای روش هم‌مکانی استفاده شده است که ویژگی بارز این روش، عدم نیاز به شبکه‌بندی دامنه مساله می‌باشد. در این راستا، برای تقریب تابع و مشتقاتش روش‌های شبکه تابع پایه شعاعی مستقیم و شبکه تابع پایه شعاعی غیرمستقیم به کار می‌روند. در کار حاضر، تمرکز اصلی بر بررسی معادلات دیفرانسیل بیضوی (خطی) دوبعدی با استفاده از روش شبکه تابع پایه شعاعی غیرمستقیم (یک‌بعدی) می‌باشد. بدین منظور، روش مذکور با روش شبکه دکارتی ترکیب شده است. به منظور ارزیابی دقت و کارایی مناسب این روش، مسایل مقدار مرزی از دو دیدگاه بالا بودن مرتبه معادله حاکم و نامنظم بودن دامنه مطالعه می‌شوند. این مطالعه نشان می‌دهد روش شبکه تابع پایه شعاعی غیرمستقیم (یک‌بعدی) دقیق‌تر از روش شبکه تابع پایه شعاعی مستقیم عمل می‌کند. همچنین، روش شبکه تابع پایه شعاعی غیرمستقیم را می‌توان برای حل عددی معادلات وابسته به زمان به کار برد.

واژه‌های کلیدی: شبکه تابع پایه شعاعی، روش هم‌مکانی، معادلات دیفرانسیل جزئی، روش شبکه دکارتی، دامنه نامنظم، روش IRBFN، معادله KdV.

فهرست مندرجات

۴	پیشینازها	۱
۴ مقدمه	۱.۱
۴ تعاریف و مفاهیم	۲.۱
۷ دسته‌بندی معادلات دیفرانسیل	۳.۱
۹ دستگاه معادلات خطی	۴.۱
۱۰ الگوریتم تجزیه مقادیر تکین	۵.۱
۱۱	مفهوم شبکه RBF و کاربرد آن در درونیابی و تقریب توابع	۲
۱۱ مقدمه	۱.۲

۱۲ مفهوم شبکه عصبی	۲.۲
۱۵ شبکه‌های تابع پایه شعاعی	۳.۲
۱۷ دسته‌بندی توابع پایه شعاعی	۱.۳.۲
۱۸ پارامتر پهنای تابع پایه شعاعی	۲.۳.۲
۱۹ کاربرد RBF در درونیابی	۴.۲
۲۳ کاربرد شبکه‌های RBF در نظریه تقریب	۵.۲
۲۶ تقریب مستقیم	۱.۵.۲
۲۸ تقریب غیرمستقیم	۲.۵.۲
۲۹ نتایج عددی	۶.۲
۴۰	۳ حل معادلات دیفرانسیل با استفاده از توابع پایه شعاعی	
۴۰ مقدمه	۱.۳
۴۱ کاربرد RBF در حل معادلات دیفرانسیل معمولی	۲.۳
۴۴ کاربرد RBF در حل معادلات PDE بیضوی	۳.۳

۴۷	پیاده‌سازی روش RBFN مستقیم	۱.۳.۳
۴۸	پیاده‌سازی روش RBFN غیرمستقیم	۲.۳.۳
۵۰	حل PDE مرتبه دو با روش IRBF یک‌بعدی	۴.۳
۵۰	فرمولبندی یک‌بعدی	۱.۴.۳
۵۲	ماتریس واگردانی	۲.۴.۳
۵۳	فرمولبندی دو‌بعدی	۳.۴.۳
۵۴	حل PDE با مرتبه بالا توسط روش IRBFN یک‌بعدی	۵.۳
۵۶	فرمولبندی یک‌بعدی	۱.۵.۳
۵۶	ماتریس واگردانی	۲.۵.۳
۵۸	فرمولبندی دو‌بعدی	۳.۵.۳
۶۰	کاربرد IRBF یک‌بعدی در حل معادله پواسون با شرایط مرزی دیریکله و نویمان	۶.۳
۶۱	رویکرد ۱	۱.۶.۳
۶۲	رویکرد ۲	۲.۶.۳
۶۴	نتایج عددی	۷.۳
۶۴	حل مسایل ODE با استفاده از شبکه RBF	۱.۷.۳
۶۶	حل مسایل PDE با دامنه‌های منظم با شبکه RBF	۲.۷.۳
۶۷	حل مسایل PDE با دامنه‌های نامنظم با شبکه RBF	۳.۷.۳

۸.۳ نتیجه‌گیری ۷۲

۴ تعمیم روش IRBFN به حل معادلات غیرخطی وابسته به زمان ۸۰

۱.۴ مقدمه ۸۰

۲.۴ گسسته‌سازی معادله KdV ۸۱

۳.۴ نتایج عددی ۸۵

۴.۴ نتیجه‌گیری ۹۰

لیست اشکال

۱۵ ۱.۳.۲ ساختار یک شبکه RBF.

۳۰ ۲.۶.۲ نمایش نقاط آموزشی، تابع اصلی مثال ۱ و تقریب آن با روش مستقیم.

۲.۶.۲ مقایسه خطاهای نسبی حاصل از روش‌های $DRBFN$ و $IRBFN$ در تقریب

تابع و مشتقات مراتب بالاتر برای مثال ۳. ۳۵

۴.۶.۲ نمودار فرم تحلیلی و فرم تقریبی حاصل از روش $DRBFN$ برای برخی

مشتقات تابع در مثال ۳. ۳۷

۵.۶.۲ نمودار فرم تحلیلی و فرم تقریبی حاصل از روش ۸ - $IRBFN$ برای برخی

مشتقات تابع در مثال ۳. ۳۷

۲۸ ۶.۶.۲ تأثیر مرتبه روش $IRBFN$ بر دقت جواب در مثال ۳.

۳۸ ۷.۶.۲ تأثیر مرتبه روش $IRBFN$ بر دقت جواب در مثال ۳

۳۹ ۸.۶.۲ تأثیر افزایش پارامتر β و تعداد مراکز در بهبود تقریب مشتق مرتبه ۶ در مثال ۳

۱.۳.۳ گسسته‌سازی دامنه نامنظم؛ نمایش نقاط مرزی و درونی به‌کاررفته در ساختار

۴۵ تقریب $RBFN$

۴۷ ۲.۳.۳ نمایش مرکزهای RBF و نقاط هم‌مکانی

۷۵ ۳.۴.۳ گسسته‌سازی دامنه منظم

۷۵ ۴.۶.۳ گسسته‌سازی دامنه نامنظم و نمایش شرایط مرزی دیریکله و نویمان

۵.۷.۳ مقایسه دقت و همگرایی حاصل از روش‌های $DRBFN$ و $IRBFN$ یک‌بعدی

۷۶ در حل ODE مرتبه ۴

۶.۷.۳ نمایش جواب دقیق و جواب‌های تقریبی حاصل از روش‌های $DRBFN$ و

۷۷ $IRBFN$ یک‌بعدی به ازای مقادیر مختلف β در حل ODE مرتبه ۲

۷.۷.۳ مقایسه دقت و همگرایی حاصل از روش‌های $DRBFN$ و $IRBFN$ یک‌بعدی

۷۷ در حل ODE مرتبه ۲

۸.۷.۲ مقایسه N_e متناظر با روش های DRBFN و IRBFN یک بعدی به ازای مقادیر

مختلف چگالی مرکز. ۷۸

۹.۷.۲ دقت و همگرایی حاصل از روش های DRBFN و IRBFN یک بعدی. ۷۸

۱۰.۷.۲ نمایش گسسته سازی دامنه مثال ۶. ۷۸

۱۱.۷.۲ نمایش گسسته سازی دامنه مثال ۷. ۷۹

۱۲.۷.۲ گسسته سازی دامنه نامنظم و نمایش شرایط مرزی دیریکله و نویمان. ۷۹

۱.۳.۴ خطای مطلق در $T=10s$ به ازای $dx=0.2$ ، $dt=0.001$ و $c=0.4$ در مثال ۱. ۹۲

۲.۳.۴ جواب تحلیلی و جواب تقریبی حاصل از رویکرد ۱ در $T=10s$ به ازای

$dx=0.2$ ، $dt=0.001$ و $c=0.4$ در مثال ۱. ۹۲

۳.۳.۴ خطای مطلق در $T=0.3s$ به ازای $dx=0.1$ ، $dt=0.00001$ و $c=0.2$ در

مثال ۲. ۹۳

۴.۳.۴ جواب تحلیلی و جواب تقریبی حاصل از رویکرد ۱ در $T=0.3s$ به ازای

$dx=0.1$ ، $dt=0.00001$ و $c=0.2$ در مثال ۲. ۹۳

۵.۳.۴ خطای مطلق در $T=5s$ به ازای $dx=0.2$ ، $dt=0.001$ و $c=0.4$ در مثال ۳.۳ . . ۹۴

۶.۳.۴ جواب تحلیلی و جواب تقریبی حاصل از رویکرد ۱ در $T=5s$ به ازای

۹۴ $dx=0.2$ ، $dt=0.001$ و $c=0.4$ در مثال ۳.۳ . . ۹۴

لیست جداول

۱.۶.۲ n_e حاصل از روش $DRBFN$ برای تقریب تابع و مشتقات تابع در مثال ۱ ۳۱

۲.۶.۲ مقایسه n_e حاصل از روش ۱ - $IRBFN$ با روش $DRBFN$ برای تابع اصلی

در مثال ۲ ۳۲

۳.۶.۲ مقایسه n_e حاصل از روش ۱ - $IRBFN$ با روش $DRBFN$ برای مشتق اول

تابع در مثال ۲ ۳۲

۴.۶.۲ مقایسه n_e حاصل از روش ۱ - $IRBFN$ با روش $DRBFN$ برای مشتق دوم

تابع در مثال ۲ ۳۲

۵.۶.۲ مقایسه n_e حاصل از روش‌های غیر مستقیم به ازای مرتبه‌های مختلف بر مبنای

چندربعی‌ها برای مثال ۲ ۳۳

- ۶.۶.۲ مقایسه n_e حاصل از روش‌های غیرمستقیم به ازای مرتبه‌های مختلف بر مبنای
 معکوس چندربعی‌ها برای مثال ۲ ۳۳
- ۱.۷.۳ (معادله پواسون با شرایط مرزی دیریکله در دامنه نامنظم): عدد شرطی و دقت
 حاصل از روش‌های DRBFN و IRBFN یک‌بعدی ۷۰
- ۲.۷.۳ (معادله دوهمساز با شرایط مرزی دیریکله): عدد شرطی و دقت حاصل از
 روش IRBFN یک‌بعدی ۷۱
- ۳.۷.۳ (معادله پواسون با شرایط مرزی دیریکله و نیومان): عدد حالت و دقت حاصل
 از روش $1D - IRBFN$ ۷۳
- ۱.۳.۴ نتایج عددی مثال ۱ در دامنه محاسباتی $[30, 80]$ به ازای $dx=0.2$ و
 $dt=0.001$ در چند تراز زمانی. ۸۷
- ۲.۳.۴ نتایج عددی مثال ۲ در دامنه محاسباتی $[-5, -15]$ به ازای $dx=0.1$ و
 $dt=0.00001$ در چند تراز زمانی. ۸۹
- ۳.۳.۴ نتایج عددی مثال ۳ در دامنه محاسباتی $[0, 40]$ به ازای $dx=0.2$ و
 $dt=0.001$ در چند تراز زمانی. ۹۱

مقدمه

معادلات دیفرانسیل جزئی از مدل‌بندی ریاضی مسایل فیزیک و مهندسی حاصل می‌شوند. لیکن، امکان ارائه یک جواب تحلیلی برای این نوع معادلات همواره مقدور نمی‌باشد. بنابراین، پژوهشگران علوم و مهندسی برای حل این مساله به روش‌های گسسته‌سازی عددی روی آورده‌اند. روش تفاضلات متناهی، روش اجزاء متناهی، روش حجم متناهی و روش اجزاء مرزی از روش‌های قوی در حل عددی مسایل مقدار مرزی در مکانیک کوانتومی هستند. اما این روش‌ها برای احراز مرتبه بالایی از دقت، به شبکه‌بندی‌های چگال‌تری نیاز دارند. از طرف دیگر، روش طیفی، روش کوادراتور دیفرانسیلی و روش شبکه توابع پایه شعاعی (RBFN) در دسته روش‌های مرتبه بالا قرار می‌گیرند که می‌توانند با گسسته‌سازی درشت دامنه تحت بررسی، منجر به نتایجی دقیق گردند. مفهوم استفاده از شبکه RBF در حل PDE، نخستین بار در سال ۱۹۹۰ توسط کانزا^۱ مطرح شد. مشخصه بارز روش‌های بر مبنای شبکه‌های عصبی این است که نیاز به شبکه‌بندی ندارند. این روش‌ها، برای نمایش جواب از تقریبات بر پایه RBFN از مکانیسم هم‌مکانی استفاده می‌کنند.

تفاوت روش‌های هم‌مکانی طیفی با روش RBFN در این است که در روش طیفی، صفرهای توابع پایه‌ای (چند جمله‌ای چبیشف) به عنوان نقاط هم‌مکانی انتخاب می‌شوند؛ در حالی که در روش RBFN، این نقاط به طور تصادفی انتخاب می‌شوند. به عبارت دیگر، روش‌های RBFN برای به‌کارگیری نسبتاً آسان هستند. به‌ویژه، در بررسی مسایل مقدار مرزی با نواحی هندسی پیچیده و یا با

^۱Kansa

معادلات دیفرانسیلی حاکم شامل عملگرهای پیچیده می‌توان از این روش‌ها استفاده نمود.

شبکه‌های RBF را می‌توان به عنوان یک روش تقریب‌زننده سراسری بررسی کرد. مادیچ^۲ و نلسون^۳ نشان دادند که روش درونیاب RBF با استفاده از توابع چنددربعی همگرایی نمایی به دست می‌دهد. در بیست سال اخیر، این روش به طور وسیعی در حل معادلات دیفرانسیل جزئی کاربرد یافته است. در ادامه روش متداول $RBFN$ مشتق‌یافته یا مستقیم^۴ ($DRBFN$)، مایی-دوی^۵ و ترن-کنگ^۶ در سال ۱۹۹۸ روش جدید $RBFN$ انتگرال‌یافته یا غیرمستقیم^۷ ($IRBFN$) را برای تقریب تابع و مشتقات آن به منظور حل معادلات دیفرانسیل ارائه کردند. آنها نشان دادند روش پیشنهادی از دقت مطلوبی برخوردار است.

مرجع اصلی این پایان‌نامه، مقاله [۲۰] می‌باشد. فصل اول به بیان برخی تعاریف و قضایای مقدماتی می‌پردازد. در فصل دوم، به بیان مفهوم شبکه عصبی و معرفی شبکه RBF و مطالعه کاربرد آن در حوزه درونیابی و تقریب توابع پرداخته می‌شود. بدین منظور، روش‌های $DRBFN$ و $IRBFN$ معرفی می‌شوند و تأثیر عوامل مؤثر بر کارایی آنها، در بخش پایانی فصل با ذکر چند مثال عددی بررسی می‌شود. فصل سوم به نحوه پیاده‌سازی روش‌های مذکور، در حل معادلات دیفرانسیل می‌پردازد. در این فصل سعی شده، روش شبکه RBF برای حل مسایل بیضوی خطی دوبعدی در نواحی نامنظم و با مراتب بالا، به ساده‌ترین و تا حد توان جامع‌ترین شکل ممکن مورد بررسی قرار گیرد؛ بدین منظور برای به‌کارگیری این روش‌ها، از معادله پواسون دوبعدی و معادله دوهم‌ساز به عنوان ساده‌ترین انواع PDE بیضوی خطی استفاده شده است و در انتهای فصل به تجزیه و تحلیل چند مثال عددی پرداخته شده است. در فصل چهارم، ایده جدید به‌کارگیری روش $IRBFN$ در بررسی

^۲Madych

^۳Nelson

^۴Differentiated/Direct radial basis function network

^۵Mia-Duy

^۶Tran-Cong

^۷Integrated/Indirect radial basis function network

مسائل مقدار مرزی وابسته به زمان گنجانده شده است. معادله خاص مطرح شده در این فصل، معادله غیرخطی مرتبه سه KdV می باشد که با پیشنهاد دورویکرد گسسته سازی بررسی می گردد. لازم به ذکر است همه نتایج عددی و محاسباتی موجود در این پایان نامه، با استفاده از نرم افزار MATLAB شبیه سازی شده اند.

فصل ۱

پیشنیازها

۱.۱ مقدمه

در این فصل، بعضی از تعاریف و مفاهیم اساسی آنالیز ریاضی و نظریه معادلات دیفرانسیل را که پیشنیاز فصل‌های بعد است، بیان خواهیم کرد.

۲.۱ تعاریف و مفاهیم

تعریف ۱.۱ می‌گوییم تابع $f : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ از رده C^k است هرگاه $f, f', \dots, f^{(k)}$ روی I موجود و پیوسته باشند. به طور مشابه، $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ از رده C^k است هرگاه تمام مشتقات جزئی آن از مرتبه کوچکتر یا مساوی k روی D موجود و پیوسته باشند. اگر تابعی دارای مشتقات پیوسته از هر مرتبه‌ای باشد می‌گوییم از رده C^∞ است [۲۴].

تعریف ۲.۱ فرض کنید X یک فضای برداری باشد، تابع حقیقی $\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R}$ یک نرم روی X می‌باشد، هرگاه برای هر $x, y \in X$ و $a \in \mathbb{R}$ داشته باشیم [۲۳]: