بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه تربیت مدرس

دانشکده علوم پایه

رسالهٔ دوره دکترای رشته ریاضی
(نظریه گروههای متناهی)

حاصلضرب گروهها

غلامرضا رضایی زاده

استادراهنما:
دکتر محمدرضا درفشه

اساتیدمشاور:
دکتر علی ایرانمنش
و
دکتر علیرضا جمالی

زمستان ۱۳۷۹

تأییدیه اعضای هیأت داوران حاضر در جلسه دفاع از رساله دکتری

اعضای هیئت داوران نسخهٔ نهایی رساله خانم / آقای غلامرضا رضائی‌زاده

تحت عنوان: **حاصلضرب گروهها**

را از نظر فرم و محتوات بررسی نموده و آنرا برای اخذ درجه درجه دکتری مورد تایید قرار دادند.

اعضای هیأت داوران	نام و نام خانوادگی	رتبهٔ علمی	امضاء
۱- استاد راهنما	آقای دکتر محمدرضا درفشه	استاد	
۲- استاد مشاور	آقای دکتر علیرضا جمالی	استاد	
۳- استاد مشاور	آقای دکتر علی ایرانمنش	استادیار	
۴- استاد ناظر	آقای دکتر علیرضا ذکائی	استادیار	
۵- استاد ناظر	آقای دکتر مهدی علائیان	استادیار	
۶- استاد ناظر	آقای دکتر علی‌اکبر محمدی	استاد	
۷- استاد ناظر	آقای دکتر احمد موسوی	استادیار	
۸- نماینده تحصیلات تکمیلی	آقای دکتر مجتبی منیری	استادیار	

بسمه‌تعالی

آیین‌نامهٔ چاپ پایان‌نامه (رساله)های دانشجویان دانشگاه تربیت مدرّس

نظر به اینکه چاپ و انتشار پایان‌نامه (رساله)های تحصیلی دانشجویان دانشگاه تربیت مدرّس، مبیّن بخشی از فعالیتهای علمی - پژوهشی دانشگاه است بنابراین به منظور آگاهی و رعایت حقوق دانشگاه، دانش‌آموختگان این دانشگاه نسبت به رعایت موارد ذیل متعهد می‌شوند:

مادّهٔ ۱ در صورت اقدام به چاپ پایان‌نامه (رساله)ی خود، مراتب را قبلاً به طور کتبی به «دفتر نشر آثار علمی» دانشگاه اطلاع دهد.

مادّهٔ ۲ در صفحهٔ سوم کتاب (پس از برگ شناسنامه)، عبارت ذیل را چاپ کند:

«کتاب حاضر، حاصل پایان‌نامهٔ کارشناسی ارشد/رسالهٔ دکتری نگارنده در رشتهٔ ... است که در سال ... در دانشکدهٔ ... دانشگاه تربیت مدرس به راهنمایی سرکار خانم/جناب آقای دکتر ...، مشاورهٔ سرکار خانم/جناب آقای دکتر ... و مشاورهٔ سرکار خانم/جناب آقای دکتر ... از آن دفاع شده است.»

مادّهٔ ۳ به منظور جبران بخشی از هزینه‌های انتشارات دانشگاه، تعداد یک درصد شمارگان کتاب (در هر نوبت چاپ) را به «دفتر نشر آثار علمی» دانشگاه اهدا کند. دانشگاه می‌تواند مازاد نیاز خود را به نفع مرکز نشر در معرض فروش قرار دهد.

مادّهٔ ۴ در صورت عدم رعایت مادّهٔ ۳، ۵۰٪ بهای شمارگان چاپ‌شده را به عنوان خسارت به دانشگاه تربیت مدرّس، تأدیه کند.

مادّهٔ ۵ دانشجو تعهد و قبول می‌کند در صورت خودداری از پرداخت بهای خسارت، دانشگاه می‌تواند خسارت مذکور را از طریق مراجع قضایی مطالبه و وصول کند؛ به علاوه به دانشگاه حق می‌دهد به منظور استیفای حقوق خود، از طریق دادگاه، معادل وجه مذکور در مادّهٔ ۴ را از محلّ توقیف کتابهای عرضه‌شدهٔ نگارنده برای فروش، تأمین نماید.

مادّهٔ ۶ اینجانب غلامرضا رضایی‌زاده دانشجوی رشته ریاضی مقطع دکتری تعهد فوق و ضمانت اجرایی آن را قبول کرده، به آن ملتزم می‌شوم.

نام و نام خانوادگی:

تاریخ و امضا: ۷۹/۱۲/۱۳

تــقــدیــم بــه :

پدر و مادر مهربانم، آنان که عامل اصلی موفقیت من در تحصیل وزندگی بوده اند و دلسوزانه در تمام دوران سخت زندگی یاری‌ام کرده اند و همیشه مرهون الطاف آنان هستم.

و تــقــدیــم بــه :

همسر ارجمندم که صبرش مکمل تلاش من بود وقطعاً بدون حمایتها وتشویقهای او انجــام ایــن کــار میسر نمی شد.

تشکر وقدردانی :

به منظور سپاس وعرض ارادت و به پیروی از کلام گرانقدر مولا امیرالمؤمنین (ع) :

"من علمنی حرفا فقد صیرنی عبدا"

برخود لازم می‌دانم یاد تمامی معلمین، دبیران واساتید عزیزم در کلیه مقاطع تحصیلی را گرامی بدارم. بالاخص از استاد فرزانه جناب آقای دکتر محمدرضا درفشه که راهنمایی اینجانب را در نوشتن این رساله پذیرفته و همیشه از تذکرات سودمند ایشان بهره برده ام صمیمانه سپاسگذاری می‌نمایم. از آقایان دکتر علی ایرانمنش و دکتر علیرضا جمالی که بعنوان اساتید مشاور قبول زحمت نموده اند قدردانی می‌کنم. همچنین از آقایان دکتر مجتبی منیری ، دکتر احمد موسوی، دکتر علی اکبرمحمدی، دکتر علیرضا ذکایی ودکتر مهدی علائیان که در جلسه دفاعیه بعنوان اعضای هیأت داوران شرکت نموده اند کمال امتنان را دارم.

چکیده:

یکی ازموضوعات جالب توجه درنظریه گروهها، بحث درمورد گروههای تجزیه پذیر می‌باشد. گروه G راتجزیه پذیرگویند اگر زیرگروههای محض از G مانند B،A موجود باشند بطوریکه G=AB . هرگاه B،A زیرگروههای ماکسیمال G باشند این تجزیه راماکسیمال می‌نامند. نمونه های بسیاری ازگروههایی که تجزیه پذیر نیستند وجود دارد.

اگرچه تجزیه ماکسیمال کلیه گروههای ساده متناهی پیداشده اند ولی تازمان نگارش این رساله شناسایی کلیه گروههای تجزیه پذیر بعنوان یک مسئله حل نشده مطرح است.

تعدادی ازمحققین تلاش خود راروی این موضوع متمرکز کرده اند که اگر B،A دارای خواص معینی (نظیر پوچتوانی ، حلپذیری، آبلی، دوری و......) باشند آنگاه درمورد G چه می‌توان گفت. وتعدادی دیگر به شناسایی گروههای تجزیه پذیر که عوامل تجزیه آنها یکریخت باگروه متناوب یامتقارن روی n حرف باشدپرداخته اند.

برای اولین بار درسال ۱۹۷۵ میلادی W.R.Scott کلیه گروههای متناهی تجزیه پذیر که یکی ازعوامل تجزیه آن باگروه متناوب A_5 یکریخت است راشناسایی کرد. درسال ۱۹۹۲ میلادی G.L. Walls مسئله رادرحالتی که یکی ازعوامل تجزیه باگروه متقارن S_5 یکریخت باشد وعامل دیگر درتجزیه ، زیرگروهی ساده باشد راحل کرد.

درادامه کارهای تحقیقاتی G.L.Walls دراین رساله ابتداکلیه گروههای تجزیه پذیر که یکی ازعوامل تجزیه با گروه متناوب A_6 یکریخت بوده وعامل دیگر باگروه متقارن S_n برای $n \geq ۵$ یکریخت است راشناسایی خواهیم کرد. سپس به شناسایی کلیه گروههای تجزیه پذیر G که یکی از عوامل تجزیه

باگروه متقارن S_6 یکریخت بوده وعامل دیگر، زیرگروهی ســاده از G مـی باشـد، خواهیـم پرداخـت. بـرای رسیدن به این اهداف مفاهیمی ازنظریه گروههای جایگشتی وبالاخص رده بنـد ی گروههـای جایگشـتی اولیـه بادرجات معین، مورد استفاده قرار می گیرد.

کلمات کلیدی: گروههای ســاده- تجزیـه- گروههـای مقـارن - گروههـای متنـاوب گروههـای جایگشـتی - گروههای اولیه.

فهرست مطالب

فصل اول

مقدمات

این فصل شامل سه بخش است. بخش اول به‌معرفی گروههای پوچتوان و حلپذیر اختصاص دارد. در بخش دوم به بحث در مورد حاصلضرب گروهها خواهیم پرداخت و سپس بخش سوم به مطالعه گروههای خطی اختصاص می‌یابد که این گروهها در فصول بعدی بطور مکرر مورد استفاده قرار می‌گیرند.

۱ـ۱ـ گروههای پوچتوان و حلپذیر

۱ـ۱ـ۱ـ تعریف: گروه G را حلپذیر گوئیم اگر دارای سری آبلی باشند یعنی سری زیر نرمالی به‌صورت

$$1 = G_0 \trianglelefteq G_1 \trianglelefteq \ldots \trianglelefteq G_n = G$$

موجود باشد بطوریکه خارج قسمتهای $\frac{G_{i+1}}{G_i}$ آبلی باشند.

در صورتیکه خارج قسمتهای $\frac{G_{i+1}}{G_i}$ دوری باشند گروه G را چند دوری (polycyclic) گویند. بعنوان مثال هر گروه آبلی G حلپذیر است و همچنین بعنوان اولین مثال از گروه غیر آبلی حلپذیر میتوان S_3 را نام برد.

اگر G حلپذیر باشد طول کوتاهترین سری آبلی G را طول حلپذیری G گوئیم. بنابراین طول حلپذیری G صفر است اگر و تنها اگر $|G| = 1$. همچنین گروههای با طول حلپذیری حداکثر ۱ همان گروههای آبلی‌اند.

۱ـ۱ـ۲ـ تعریف: یک گروه حلپذیر با طول حلپذیری ۲ را گروه فرا آبلی (metabelian) گوئیم.

خواص مقدماتی گروههای حلپذیر در لم زیر آمده است:

۱ـ۱ـ۳ـ لم: (a) هر زیرگروه و هر تصویر همریخت از یک گروه حلپذیر، حلپذیر است.

(b) فرض کنید N زیرگروه نرمال از G باشد بطوریکه N و G/N حلپذیر باشند آنگاه G حلپذیر است.

(c) حاصلضرب هر تعداد متناهی از گروههای حلپذیر، حلپذیر است.

اثبات: بدیهی است

۱ـ۱ـ۴ـ نتیجه: اگر $n \geq 5$، گروه متقارن S_n حلپذیر نیست.

۱ـ۱ـ۵ـ قضیه (P.Hall): فرض کنید G گروه حلپذیر متناهی از مرتبه mn باشد بطوریکه $(m,n) = 1$ در اینصورت:

(الف) G زیرگروهی از مرتبه m دارد.

(ب) هر دو زیرگروه مرتبه m از G با هم مزدوجند.

(ج) هر زیرگروه از G با مرتبهٔ k که $k|m$ در یک زیرگروه از G با مرتبهٔ m جای دارد.

اثبات: مراجعه شود به [۱۹] صفحه ۱۴۰.

قضیه مهم زیرکه به حدس برنساید معروف است و در سال ۱۹۶۳ توسط فیت (feit) و تامسون (Thompson) به‌اثبات رسید یکی از نتایج جالب درگروههای حلپذیر است.

۱ـ۱ـ۶ـ قضیه: هرگروه متناهی با مرتبه فرد حلپذیر است.

اثبات: مراجعه شود به ۲۹ .

تعدادی از خواص مهم گروههای حلپذیر در قضیه زیر آمده است:

۱ـ۱ـ۷ـ قضیه: (a) در هرگروه G حاصلضرب دو زیرگروه نرمال حلپذیر، حلپذیر است.

(b) هرگروه متناهی حلپذیر دارای سری زیر نرمال است بطوریکه خارج قسمتهای آن دوری با مرتبه عددی اول‌اند.

(c) فرض کنید G گروهی حلپذیر متناهی و N زیرگروه نرمال مینیمال G باشد آنگاه N آبلی مقدماتی است

یعنی $N \cong \mathbb{Z}_p \times \ldots \times \mathbb{Z}_p$.

(d) گروه حلپذیر G در شرط ماکسیمال صدق می‌کند اگر و تنها اگر G چند دوری (polycyclic) باشد.

۱-۱-۸- تعریف: گروه G را فوق حلپذیر (supersoluble) گوئیم اگر سری نرمالی داشته باشد که خارج قسمتهای آن دوری باشد در حقیقت گروههای فوق حلپذیر حالت خاصی از گروههای چند دوری هستند. واضح است که هر زیرگروه و هر خارج قسمت از یک گروه فوق حلپذیر، فوق حلپذیر است.

۱-۱-۹- تعریف: فرض کنید G گروهی متناهی از مرتبه $n = p_1^{\alpha_1} \ldots p_k^{\alpha_k}$ باشد که p_iها اعداد اول‌اند و $p_1 > \ldots > p_k$. سری نرمال $1 = H_0 < H_1 < \ldots < H_k = G$ را یک سری سیلو از G گوئیم هرگاه برای هر $i = 0, \ldots, k-1$ خارج قسمت $\frac{H_{i+1}}{H_i}$ یک p_{i+1}-زیرگروه سیلوی $\frac{G}{H_i}$ باشد.

۱-۱-۱۰- قضیه: (a) هر گروه فوق حلپذیر متناهی دارای یک سری سیلو می‌باشد.

(b) گروه متناهی G فوق حلپذیر است اگر و تنها اگر شاخص هر زیرگروه ماکسیمال G عددی اول باشد.

اثبات: مراجعه کنید به [۱۹] صفحه ۱۳۷ و ۱۴۸.

۱-۱-۱۱- تعریف: فرض کنید p عددی اول باشد و قرار می‌دهیم:

$C_{p^\infty} = \{z \in \mathbb{C}^* | \exists n \in \mathbb{N}_0, Z^{p^n} = 1\}$ در اینصورت C_{p^∞} تحت ضرب اعداد مختلط یک p-گروه آبلی نامتناهی است که هر زیرگروه واقعی آن متناهی است. C_{p^∞} را گروه شبه دوری (quasicyclic) گوئیم.

اکنون می‌توانیم ساختار گروههای حلپذیر که در شرط مینیمال صدق می‌کنند را شناسایی کنیم.

۱-۱-۱۲- قضیه: هر گروه حلپذیر که در شرط مینیمال صدق کند توسیع متناهی از یک حاصلضرب مستقیم تعداد متناهی گروههای شبه دوری می‌باشد.

اثبات: مراجعه کنید به [۱۹] صفحه ۱۳۸.

۱-۱-۱۳- قضیه(Burnside): فرض کنید G گروهی از مرتبه $p^\alpha q^\beta$ باشد که p, q اعداد اولند آنگاه G حلپذیر است.

اثبات: مراجعه شود به [۲] صفحه ۱۸۶.

۱ـ۱ـ۱۴ـ قضیه (Thompson): فرض کنید برای هر دو عضو x, y از G زیرگروه $< x, y >$ حلپذیر باشد آنگاه G حلپذیر است.

اثبات: به صفحه ۱۹۸ [۸] مراجعه کنید.

۱ـ۱ـ۱۵ـ قضیه (P.Hall): فرض کنید G گروهی با مرتبه $p_1^{\alpha_1} \dots p_t^{\alpha_t}$ باشد که p_iها اعداد اول متمایزند و برای هر $i \in \{1, \dots, t\}$ زیرگروه H_i از G موجود باشد بطوریکه $[G : H_i] = p_i^{\alpha_i}$ آنگاه G حلپذیر است.

اثبات: به صفحه ۶۲۶ [۸] مراجعه کنید.

در اثبات قضیه فوق از لمهای زیر که به تنهایی جالب توجه‌اند کمک گرفته می‌شود:

۱ـ۱ـ۱۶ـ لم: فرض کنید G گروهی حلپذیر با مرتبه بزرگتر از ۱ باشد آنگاه به‌ازای عددی اول مانند p، G دارای pـزیرگروه نرمال نابدیهی می‌باشد.

۱ـ۱ـ۱۷ـ لم: اگر G گروهی متناهی از مرتبهٔ $p_1^{\alpha_1} \dots p_t^{\alpha_t}$ باشد که p_iها اعداد اول متمایزند و فرض کنید H, K زیر گروههایی از G باشند بطوریکه برای هر $i \in \{1, \dots, t\}$ بدانیم $p_i^{\alpha_i}$ یکی از $|H|$ و یا $|K|$ را می‌شمارد آنگاه:

$$G = HK \quad , \quad |H \cap K| = (|H|, |K|)$$

۱ـ۱ـ۱۸ـ لم: فرض کنید G گروه متناهی حلپذیر باشد و M زیرگروه ماکسیمال G باشد آنگاه $[G : M]$ توانی از یک عدد اول است و برای هر عدد اول p که $|G|$ را بشمارد حداقل یک زیرگروه ماکسیمال M موجود است که $[G : M]$ توانی از p باشد.

اثبات: به صفحه ۱۴۱ [۱۹] مراجعه شود.

اکنون به‌تعریف گروه پوچتوان و ارتباط این گروهها با گروههای حلپذیر می‌پردازیم.

۱ـ۱ـ۱۹ـ تعریف: گروه G را پوچتوان گوئیم اگر دارای یک سری مرکزی باشد. یعنی سری نرمالی به‌صورت زیر داشته باشد:

$$1 = G_0 \leq G_1 \leq \ldots \leq G_n = G \ , \quad \frac{G_{i+1}}{G_i} \subseteq Z(\frac{G}{G_i})$$

طول کوتاهترین سری مرکزی G را کلاس پوچتوانی G می‌نامیم. یک گروه پوچتوان از کلاس ۰ دارای مرتبه ۱ می‌باشد و گروههای پوچتوان با کلاس حداکثر ۱ آبلی هستند. براحتی می‌توان نشان داد که هر گروه پوچتوان، حلپذیر است. اما عکس این مطلب درست نیست بعنوان مثال S_3 یک گروه حلپذیر و غیر پوچتوان است. برخی از نتایج مقدماتی درگروههای پوچتوان عبارتند از:

۱ـ۱ـ۲۰ـ لم: (a) هر pـگروه متناهی، پوچتوان است.

(b) هر زیرگروه و هر خارج قسمت از یک گروه پوچتوان، پوچتوان است.

(c) حاصلضرب مستقیم هر تعداد متناهی از گروههای پوچتوان، پوچتوان است.

(d) اگر G گروه پوچتوان و N زیرگروه نرمال نابدیهی G باشد[۲] آنگاه $N \cap Z(G) \neq 1$.

(e) اگر G گروه پوچتوان و $H \lneq G$ آنگاه $H \neq N_G(H)$.

(f) اگر G گروهی متناهی باشد آنگاه G پوچتوان است اگر و تنها اگر $G' \leq \Phi(G)$ که در اینجا $\Phi(G)$ زیرگروه فراتینی G است.

(g) اگر G گروه پوچتوان و N زیرگروه نرمال مینیمال از G باشد آنگاه $N \subseteq Z(G)$.

(h) اگر G گروه پوچتوان و N زیرگروه نرمال ماکسیمال آبلی از G باشد آنگاه $N = C_G(N)$.

(i) اگر G متناهی باشد $\Phi(G)$ پوچتوان است.

۱ـ۱ـ۲۱ـ تعریف: فرض کنید G یک گروه باشد. گوئیم G در شرط نرمال‌ساز صدق می‌کند در صورتیکه به‌ازاء هر زیرگروه واقعی H از G داشته باشیم: $H \subsetneqq N_G(H)$.

۱ـ۱ـ۲۲ـ تعریف: فرض کنید G گروه باشد و $H \leq G$. گوئیم H زیرگروه زیرنرمال G است هرگاه H در یک سری زیر نرمال از G ظاهر شود، در چنین حالتی می‌نویسیم $H \lhd\lhd G$.

۱ـ۱ـ۲۳ـ لم: فرض کنید G گروهی متناهی باشد آنگاه گزاره‌های زیر معادلند:

(a) G پوچتوان است.

(b) هر زیرگروه G زیرنرمال است؛

(c) G در شرط نرمالساز صدق می‌کند؛

(d) هر زیرگروه ماکسیمال G نرمال است؛

(e) G حاصلضرب مستقیم زیرگروههای سیلوی خود است.

اثبات: به صفحه ۱۳۰ [۲۷] مراجعه نمائید.

قضیه بعدی نقش مهمی در نظریه گروههای پوچتوان دارد.

۱ـ۱ـ۲۴ـ قضیه (Fitting): فرض کنید M, N دو زیرگروه نرمال پوچتوان ازگروه G باشند. اگر رده پوچتوانی M, N به‌ترتیب c, d باشد آنگاه MN پوچتوان از رده حداکثر $c + d$ است.

اثبات: به صفحه ۱۱۲ [۱۹] مراجعه شود.

در قضیه زیر ارتباطی بین گروههای فوق حلپذیر وگروههای پوچتوان برقرار می‌شود:

۱ـ۱ـ۲۵ـ قضیه: فرض کنید G گروهی فوق حلپذیر باشد آنگاه G' پوچتوان است.

اثبات: به صفحه ۱۳۷ [۱۹] مراجعه شود.

قضیه بعدی از جهاتی شبیه قضایای سیلو در نظریه گروههای متناهی می‌باشد. ابتدا به تعریف زیر توجه کنید:

۱ـ۱ـ۲۶ـ تعریف: فرض کنید G یک گروه و H زیرگروه G باشد.H را زیر گروه کارتر (carter) G می‌نامیم در صورتیکه H پوچتوان باشد و $H = N_G(H)$.

۱ـ۱ـ۲۷ـ قضیه (Carter): فرض کنید G گروه متناهی و حلپذیر باشد.آنگاه G حداقل یک زیرگروه کارتر دارد. و بعلاوه هر دو زیرگروه کارتر از G با هم مزدوجند.

اثبات: به صفحه ۱۴۲ [۱۹] مراجعه کنید.