بسم الله الرحمن الرحيم

دانشکده ریاضی و رایانه

گروه ریاضی

پایان نامه تحصیلی برای دریافت درجه کارشناسی ارشد

رشته ریاضی محض گرایش آنالیز

نگاشتهای کاملا مثبت و میانگین های ماتریسی

استاد راهنما :

دکتر عباس سالمی

مؤلف :

محمود مومنی بادامستان

مردادماه ۱۳۹

این پایان نامه به عنوان یکی از شرایط درجه کارشناسی ارشد به

بخش ریاضی

دانشکده ریاضی و رایانه

دانشگاه شهید باهنر کرمان

تسلیم شده است و هیچگونه مدرکی به عنوان فراغت از تحصیل دوره مزبور شناخته نمی شود

دانشجو :محمود مومنی بادامستان

استاد راهنما : دکتر عباس سالمی

استاد مشاور : دکتر حسین مومنایی

داور ۱ : دکتر محمود محسنی مقدم

داور۲ : دکتر غلامرضا آقاملایی

معاونت پژوهشی و تحصیلات تکمیلی دانشکده :

تقدیم به:

پدر و مادر مهربانم

و

همسر عزیزم

تشکر و قدردانی :

خدایا به من زیستنی عطا کن که در لحظه مرگ بر بی ثمری لحظه ای که برای زیستن گذشته است حسرت نخورم ومردنی عطا کن که بر بیهودگیش سوگوار نباشم. بگذار تا آن را،من خود انتخاب کنم اما چنان که تو دوست می داری. خدایاچگونه زیستن راتو به من بیاموز چگونه مردن را خود خواهم دانست.(قسمتی از نیایش دکتر علی شریعتی)

ضمن سپاس از ایزد حق تعالی که در ره دانش الطاف بی کرانش را بر من ارزانی نمود، لازم می بینم از استاد گرانقدر جناب آقای دکترعباس سالمی که افتخار شاگردی ایشان را داشته ودر طی سالیان اخیر از رهنمودها یشان بهره مند ودر محضرشان کسب دانش و اخلاق نموده ام صمیمانه تشکر کنم. انجام این پایان نامه بدون راهنمایی های ایشان میسر نبود. همچنین از اساتید بزرگواری که زحمت داوری این پایان نامه را بر عهده گرفته اند تشکر وقدردانیمی کنم.

همچنین ازکلیه کسانیکه مرادرانجام این پروژه یاری کرده اندتشکروقدردانی می نمایم.

با تشکر از حمایت های مالی قطب جبر خطی و بهینه سازی دانشگاه شهید باهنر کرمان

چکیده :

در این پایان نامه میانگین های ماتریسی را مورد توجه قرار می دهیم. همچنین به مطالعه نگاشت های مثبت و نگاشت های کاملا مثبت می پردازیم. ارتباط بین نگاشت های کاملا مثبت و میانگین های ماتریسی را بررسی می کنیم که این موضوع کاربردهای فراوانی در اطلاعات کوانتومی دارد.

کلمات کلیدی : تابع یکنوای ماتریسی، میانگین های ماتریسی، ضرب هادامارد، نگاشت های کاملا مثبت، میانگین لگاریتمی

مقدمه:

به خوبی مشخص می باشد که امروزه ماتریسها نقش اساسی در علوم مختلف از جمله ریاضیات ،آمار،فیزیک ،علوم مهندسی و دیگر علوم دارند.خصوصا شاخه ای از ریاضیات تحت عنوان "آنالیز ماتریسی" یک عرصه ی تحقیقاتی با کاربردهای فراوانی در زمینه هایی چون نظریه ی کنترل ،ریاضی فیزیک ، علوم مهندسی وغیره می باشد.

در فصل اول به بیان مقدمات و تعاریف اولیه می پردازیم. سپس در فصل دوم نگاشت های خطی مثبت و نگاشت های خطی کاملا مثبت را تعریف کرده و قضایا وخواص مربوط به آنها را بررسی می کنیم. در فصل سوم برای ماتریس های معین مثبت، میانگین های ماتریسی را تعریف می کنیم که این میانگین ها بر گرفته از توابع خاص روی میانگین های اعداد مثبت است. نهایتا در فصل آخر ارتباط موضوعات فوق را با نگاشت های کاملا مثبت بررسی می کنیم که این نگاشت های کاملا مثبت کاربردهای اساسی در علم کوانتوم و کانال ها ی کوانتومی دارد. مبحث کانال های کوانتومی که در محاسبات کوانتومی و اطلاعات کوانتومی کاربرد بسیار دارند در حقیقت نگاشت های خطی کاملا مثبت و رد پایا روی مجموعه تمام ماتریس های مثبت با رد ۱ هستند.

فهرست مطالب

عنوان صفحه

فصل اول

مقدمات و پیش نیازها

۱.۱- مقدمه

در ایـن فصـل پـیش نیازهـای لازم، تعـاریف و قضـایای مـورد نیـاز در فصـل هـای بعـدی بطـور خلاصـه و بـدون اثبـات ارائـه شـده اسـت. بـرای درک بهتـر مفـاهیم و قضـایا مـی توانیـد بـه کتاب آنالیز ماتریسی [16] مراجعه نمایید.

۲.۱- تعاریف و قضایا

تعریف ۱.۱. فرض کنیم V یک فضای برداری روی میدان F باشد. تابع $<.,.>: V\times V \to F$ یک ضرب داخلی است اگر برای همه $x, y, z \in V$ روابط زیر برقرار باشند :

۱) $< x, y > \geq 0$؛

۲) $< x, x > = 0$ اگر وتنها اگر $x = 0$؛

۳) $< x + y, z > = < x, z > + < y, z >$؛

۴) $< cx, y > = c < x, y >$ برای هر $c \in F$؛

۵) $< x, y > = \overline{< y, x >}$.

تعریف ۲.۱. نرم اقلیدسی روی $\mathbb{C}^n$ را بصورت زیر تعریف می کنیم :

$$\|x\| = < x, x >^{\frac{1}{2}} = \left(x^* x\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

همچنین گوی واحد در $\mathbb{C}^n$ را با نماد S^1 نمایش می دهیم وعبارت است از:

$$S^1 = \left\{ x \in \mathbb{C} : \|x\| = 1 \right\}$$

تعریف ۳.۱. ماتریس $A \in M_n$ را یک ماتریس نرمال می نامیم هرگاه $A^* A = AA^*$.

تعریف ۴.۱. ماتریس $U \in M_n$ را یـک مـاتریس یکـانی مـی نـامیم، هرگـاه $U^* U = I$. همچـنین مجموعه تمام ماتریس های یکانی $n \times n$ را با $\mathcal{U}_n$ نمایش می دهیم.

تعریف ۵.۱. ماتریس $A \in M_n$ را یک ماتریس اسکالر می نامیم، هرگاه $\alpha \in \mathbb{C}$ موجود باشد بطوریکه $A = \alpha I$.

تعریف ۶.۱. ماتریس $A \in M_n$ را نیمه معین مثبت می نامیم، هرگاه $< x, Ax > \geq 0$ برای همه $x \in \mathbb{C}^n$ یا به عبارت دیگر $x^* Ax \geq 0$ برای همه $x \in \mathbb{C}^n$.

تعریف ۷.۱. ماتریس $A \in M_n$ را معین مثبت می نامیم، هرگاه $< x, Ax > > 0$ برای همه $x \in \mathbb{C}^n$ و $x \neq 0$ ، یا به عبارت دیگر $x^* Ax > 0$ برای همه $x \in \mathbb{C}^n$ و $x \neq 0$.

لذا ماتریس نیمه معین مثبت A، معین مثبت است اگر و تنها اگر A معکوس پذیر باشد.

برای سادگی و اختصار به جای ماتریس نیمه معین مثبت A، ماتریس مثبت A بکار می بریم و با نماد $A \geq 0$ نمایش می دهیم. همچنین به جای ماتریس معین مثبت B ، ماتریس اکیدا مثبت B بکار می بریم و با نماد $B > 0$ نمایش می دهیم.

تعریف ۸.۱. ماتریس $A \in M_n$ را هرمیتی می نامیم، هرگاه $A^* = A$ که در آن $A^* = \overline{A}^t$. (اگر $A = \left[a_{ij} \right]$، آنگاه $\overline{A} = \left[\overline{a_{ij}} \right]$ و همچنین $A^t = \left[a_{ji} \right]$).

خواصی برای ماتریس های مثبت وجود دارد که در زیر به بعضی از آنها اشاره می کنیم.

۱) ماتریس A مثبت است اگر و تنها اگر A هرمیتی باشد و همه مقادیر ویژه A نامنفی باشند. ماتریس A اکیدا مثبت است اگر و تنها اگر A هرمیتی باشد و همه مقادیر ویژه A مثبت باشند.

۲) ماتریس A مثبت است اگر و تنها اگر ماتریس B چنان موجود باشد که $A = B^* B$. ماتریس A اکیدا مثبت است اگر و تنها اگر ماتریس معکوس پذیر B چنان موجود باشد که $A = B^* B$.

۳) ماتریس A مثبت است اگر و تنها اگر $A = T^* T$ که در آن T یک ماتریس بالا مثلثی است. اگر ماتریس A اکیدا مثبت باشد، آنگاه ماتریس T یکتاست. فرم بالا به تجزیه چولسکی[1] ماتریس A مشهور است. ماتریس A اکیدا مثبت است اگر و تنها اگر ماتریس T معکوس پذیر باشد.

[1]Cholesky Decomposition

۴) ماتریس A مثبت است اگر و تنها اگر $A = B^2$ که B یک ماتریس مثبت است. لذا $B = A^{\frac{1}{2}}$ را ریشه دوم ماتریس A می نامیم. ماتریس A اکیدا مثبت است اگر و تنها اگر ماتریس B اکیدا مثبت باشد.

۵) فرض کنیم $x_1,\ldots,x_m$ ، m بردار دلخواه از فضای $\mathbb{C}^n$ باشند. در این صورت ماتریس $G\left(x_1,\ldots,x_m\right) = \left[\left[x_i^* x_j\right]\right]$، مثبت است. ماتریس G اکیدا مثبت است اگر و تنها اگر بردارهای $x_1,\ldots,x_m$ مستقل خطی باشند. ماتریس G را ماتریس گرام[2] می نامیم که توسط بردارهای $x_1,\ldots,x_m$ تولید می شود.

۶) عناصرروی قطر اصلی هر ماتریس مثبت، حقیقی و مثبتند.

۷) فرض کنیم A یک ماتریس مثبت باشد، دراینصورت مقادیر ویژه A ، TrA و $det\, A$ نامنفی هستند.

۸) فرض کنیم $A = \left[a_{ij}\right] \in M_n$ یک ماتریس مثبت باشد، دراینصورت $\left|a_{ij}\right|^2 < a_{ii}a_{jj}$ برای همه $i, j = 1,\ldots,n$.

۹) ماتریس هرمیتی $A \in M_n$ مثبت است اگروتنها اگر مقادیر ویژه A نامنفی باشند.

۱۰) ماتریس هرمیتی $A \in M_n$ اکیدا مثبت است اگروتنها اگر مقادیر ویژه A مثبت باشند.

۱۱) اگر A یک ماتریس مثبت باشد، آنگاه A^k نیز مثبت است برای هر $k = 1,2,\ldots$.

قضیه ۹.۱. فرض کنیم $U \in \mathcal{U}_n$. دراینصورت گزاره های زیر معادلند :

۱) U یک ماتریس یکانی است؛

۲) U معکوس پذیر است و $U^{-1} = U^*$؛

۳) $UU^* = I$؛

۴) U^* یک ماتریس یکانی است؛

۵) ستون های ماتریس U بردارهای متعامد یکه اند؛

[2] Gram Matrix

۶) سطرهای ماتریس U بردارهای متعامد یکه اند؛

۷) $\|Ux\| = \|x\|$ برای هر $x \in \mathbb{C}^n$.

قضیه ۱.۱۰. ماتریس های یکانی طولپا[۳] هستند.

تعریف ۱.۱۱.ماتریس های A و B را متشابه می گوییم هرگاه ماتریس معکوس پذیری مانند S موجود باشد که $S^{-1}BS = A$. در این حالت از نماد $A \approx B$ استفاده می کنیم.

قضیه ۱.۱۲. ماتریس A^{-1} با A^* متشابه است اگر و تنها اگر ماتریس معکوس پذیر B موجود باشد که $BA = B^*$.

تعریف ۱.۱۳.ماتریس A و B را هم ارز یکانی می نامیم هرگاه ماتریس یکانی U چنان موجود باشد که $B = U^*AU$.

قضیه ۱.۱۴.فرض کنیم $A = \left[a_{ij}\right]$ و $B = \left[b_{ij}\right]$ماتریس های $n \times n$ باشند. اگر A و B هم ارز یکانی باشند، آنگاه $\sum_{i,j}\left|a_{ij}\right|^2 = \sum_{i,j}\left|b_{ij}\right|^2$.

قضیه ۱.۱۵.(شور)[۴] هر ماتریس دلخواه بطور یکانی با یک ماتریس بالا مثلثی متشابه است. یعنی فرض کنیم $A \in M_n$ دراینصورت ماتریس یکانی U موجود است بگونه ای که

$$U^*AU = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & * \\ 0 & \ddots & * \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

قضیه ۱.۱۶.فرض کنیم $A \in M_n$ و $U \in \mathcal{U}_n$. دراینصورت A نرمال است اگر وتنها اگر U^*AU قطری باشد.

تعریف ۱.۱۷. ماتریس $A \in M_n$را قطری شدنی می نامیم هرگاه ماتریس معکوس پذیر S چنان موجود باشد که $S^{-1}AS$ قطری شود.

---

[3] Isometry

[4] Schur's Theorem

تعریف ۱.۱۸. ماتریس $A \in M_n$ را یکانی قطری شدنی می نامیم هرگاه ماتریس $U \in \mathcal{U}_n$ چنان موجود باشد که $U^* A U$ قطری شود.

قضیه ۱.۱۹. اگر $A = \left[a_{ij} \right] \in M_n$ و $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ مقادیر ویژه A باشند، آنگاه گزاره های زیر معادلند :

۱) A نرمال است؛

۲) A یکانی قطری شدنی است؛

۳) $\sum_{i,j=1}^{n} \left| a_{ij} \right|^2 = \sum_{i=1}^{n} \left| \lambda_i \right|^2$ ؛

۴) یک مجموعه متعامد از n بردار ویژه ماتریس A موجود است.

قضیه ۱.۲۰. فرض کنیم $A \in M_n$ یک ماتریس هرمیتی باشد. دراینصورت :

۱) $\sigma(A) \subseteq R$؛

۲) A یکانی قطری شدنی است.

قضیه ۱.۲۱. ماتریس A هرمیتی است اگر و تنها اگر $x^* A x \in R$ برای هر x.

قضیه ۱.۲۲. فرض کنیم A یک ماتریس مثبت باشد. اگر $Tr(A) = 0$، آنگاه $A = 0$.

قضیه ۱.۲۳. هر ماتریس مربعی را می توان بصورت مجموع یک ماتریس قطری شدنی و یک ماتریس پوچتوان نوشت.

قضیه ۱.۲۴. هر ماتریس دلخواه $A \in M_n$ را می توان بصورت مجموع $A = S + iB$ نوشت که S و B ماتریس های هرمیتی هستند.

تعریف ۲۵.۱.هر نرم روی فضای ماتریس های M_n یک نرم برداری روی ماتریس ها نامیده می شود. بطور مثال :

$$\|A\|_1 = \sum_{i,j} |a_{ij}|$$

$$\|A\|_2 = \left(|a_{ij}|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\|A\|_\infty = \max_{i,j} |a_{ij}|$$

قضیه ۲۶.۱. نرم $\|.\|_\alpha$و $\|.\|_\beta$ را معادل می نامیم هرگاه اعداد مثبت m وn چنان موجود باشند که $m\|x\|_\beta \le \|x\|_\alpha \le n\|x\|_\beta$برای هر x.

تعریف ۲۷.۱.تابع $|||.||| : M_n \to R$را یک نرم ماتریسی می نامیم هرگاه خواص زیر برقرار باشند :

۱) $|||A||| \ge 0$برای هر $A \in M_n$؛ ($|||A||| = 0$اگروتنها اگر $A = 0$)

۲) $|||\alpha A||| = |\alpha|\,|||A|||$برای هر α؛

۳) $|||A+B||| \le |||A||| + |||B|||$؛

۴) $|||AB||| \le |||A||| \times |||B|||$.

نکته ۲۸.۱. هر نرم ماتریسی یک نرم برداری است ولی عکس این مطلب برقرار نیست.

تعریف ۲۹.۱. فرض کنیم $\|.\|$یک نرم روی $\mathbb{C}^n$باشد. دراینصورت :

$$|||A||| = \max_{\|x\|=1} \|Ax\| = \max_{x \ne 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$$

تعریف ۳۰.۱. فرض کنیم $A \in M_n$ آنگاه داریم :

$$|||A|||_\infty = \max_{1\le i\le n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$$

$$|||A|||_1 = \max_{1\le j\le n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$$

$$|||A|||_2 = \max\left\{\sqrt{\lambda} : \lambda \in \sigma\left(A^*A\right)\right\} = \max_{\|x\|_2=1} \|Ax\|_2$$

قضیه ۳۱.۱. اگر $A \in M_n$ ، آنگاه $A = PU$ بگونه ای که P ماتریس مثبت است و U یک ماتریس یکانی است. (فرم بالا به تجزیه قطبی[5] ماتریس A مشهور است).

تعریف ۳۲.۱. فرض کنیم $A \in M_{m\times n}$ و $B \in M_{p\times q}$ ،آنگاه $A \otimes B = \left[a_{ij}B\right] \in M_{mp\times nq}$.

قضیه ۳۳.۱. اگر A و B ماتریس های مثبت باشند ، آنگاه $A \otimes B$ نیز مثبت است.

تعریف ۳۴.۱. فرض کنیم $A = \left[a_{ij}\right] \in M_{m\times n}$ و $B = \left[b_{ij}\right] \in M_{m\times n}$. $A \circ B$ را ضرب هادامارد[6] دو ماتریس A و B می نامیم و بصورت زیر تعریف می کنیم :

$$A \circ B = \left[a_{ij}b_{ij}\right] \in M_{m\times n}$$

قضیه ۳۵.۱. اگر A و B ماتریس های مثبت باشند، آنگاه $A \circ B$ نیز مثبت است.

قضیه ۳۶.۱.فرض کنیم $A = \left[a_{ij}\right] \in M_n$ دراینصورت ماتریس A مثبت است اگروتنها اگر $\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}b_{ij} \ge 0$ برای همه ماتریس های مثبت $B = \left[b_{ij}\right] \in M_n$.

قضیه ۳۷.۱ .اگر $A,B \in M_n$ ماتریس های مثبت باشند، آنگاه :

$$\left(\det A\right)\prod_{i=1}^{n} b_{ii} \le \det A \circ B$$

تعریف ۳۸.۱. فرض کنیم $A \in M_n$ و $B \in M_m$. مجموع مستقیم ماتریس های A و B را با نماد $A \oplus B$ نمایش می دهیم و بصورت زیر تعریف می کنیم :

$$A \oplus B = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \in M_{m+n}$$

[5]Polar Decomposition
[6]Hadamard product

قضیه ۱.۳۹. اگر A و B ماتریس های مثبت باشند، آنگاه $A \oplus B$ نیز مثبت است.

فصل دوم

نگاشت های خطی مثبت و نگاشت های خطی کاملا مثبت

۱.۲-مقدمه

در این فصل نگاشت های خطی مثبت روی فضای ماتریس ها را مطالعه می کنیم[6]. بدین منظور از نماد ϕبرای یک نگاشت خطی مثبت از M_n به M_Kاستفاده می کنیم. موقعی که $k=1$نگاشت مورد نظر را تابعک خطی می نامیم و در اینحالت آنرا با φ نمایش می دهیم. در ادامه از روی نگاشت های خطی مثبت، نگاشت های خطی کاملا مثبت را تعریف می کنیم و همچنین قضایا و مثال هایی را برای هر دو دسته از نگاشت های فوق ارائه می دهیم.

۲.۲- نگاشت های خطی مثبت

در این بخش نمادهای زیر را به کار می بریم. پایه استاندارد روی $\mathbb{C}^n$را با $\{e_1,e_2,...,e_n\}$ وماتریس $e_ie_j^*$را با E_{ij}نمایش می دهیم. ماتریسهای E_{ij} را ماتریس های یکه می نامیم و می توان نشان داد که $\{E_{ij}, 1\le i,j\le n\}$یک پایه برای فضای M_n می باشد.

تعریف۱.۲. نگاشت خطی $\phi:M_n\to M_K$را مثبت می نامیم اگر $\phi(A)\ge 0$ هنگامیکه $A\ge 0$.

تعریف۲.۲. نگاشت خطی مثبت ϕ را یکانی می نامیم اگر $\phi(I)=I$.

تعریف۳.۲. نگاشت خطی ϕ را اکیدا مثبت می نامیم اگر $\phi(A)>0$ هنگامیکه $A>0$.

به آسانی می توان دید که یک نگاشت خطی مثبت ϕ اکیدا مثبت است اگر و تنها اگر $\phi(I)>0$.

مثال۴.۲. $\phi(A)=tr(A)$ یک نگاشت خطی مثبت است.

فرض کنید A یک ماتریس مثبت باشد پس تمام مقادیر ویژه A نامنفی هستند. فرض کنیم $\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n$ مقادیر ویژه ماتریس A باشند لذا $tr(A)=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i$ نیز نامنفی است درنتیجه $\phi(A)$مثبت است.

مثال ۵.۲.

۱) $\phi(A)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\lambda_i$ یک تابعک خطی مثبت است و همچنین یکانی است.

چون $\phi(A)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\lambda_i$ لذا طبق مثال بالا مثبت است و همچنین $\phi(I)=\frac{1}{n}tr(I)=\frac{n}{n}=1$.

۲) هر تابعک خطی روی ماتریس های $n\times n$ فرمی به شکل $\varphi(A)=tr\,AX$ دارد برای $X\in M_n$. به راحتی می توان دید که φ مثبت است اگر و تنها اگر ماتریس X مثبت باشد و همچنین اگر $trX=1$ آنگاه φ یکانی است.

۳) نگاشت $\phi(A)=\frac{tr(A)}{n}I$ از M_n به M_n یک نگاشت مثبت است.

۴) فرض کنیم B یک ماتریس مثبت باشد. دراینصورت نگاشت $\phi(A)=A\otimes B$، یک نگاشت مثبت است.

زیرا اگر A و B ماتریس های مثبتی باشند، آنگاه داریم $A\otimes B$ و $A\circ B$ ماتریس های مثبتی هستند.

۵) فرض کنیم A^t همان ترانهاده ماتریس A باشد. دراینصورت نگاشت $\phi(A)=A^t$ ، یک نگاشت مثبت است.

۶) فرض کنیم X یک ماتریس $n\times k$ باشد. بنابراین نگاشت $\phi(A)=X^*AX$ از M_n به M_k یک نگاشت مثبت است. زیرا فرض کنیم A مثبت باشد لذا $x^*Ax\geq 0$ برای هر x. گیریم $x=Xy$ درنتیجه $(Xy)^*A(Xy)=y^*X^*AXy\geq 0$ برای هر y. لذا X^*AX مثبت است.