دانشکده مهندسی

پایان نامه کارشناسی ارشد برق– کنترل

رهیافتی نو برای حل تقریبی ماتریس انتقال حالت سیستم های خطی متغیر با زمان کلاسیک و فازی

نگارنده:

مهران مازندرانی

اساتید راهنما:

دکتر علی وحیدیان کامیاد دکتر ناصر پریز

بسم الله الرحمن الرحیم

رهیافتی نو برای حل تقریبی ماتریس انتقال حالت سیستم های خطی متغیر با زمان کلاسیک و فازی

A new approach for approximating solution of state transition matrix of classic and fuzzy linear time varying system

چکیده پایان نامه

جواب تحلیلی کنترل پذیری سیستم های خطی متغیر با زمان هنوز مورد بحث بسیاری از محققین و مهندسان است و مشکل کلی در مورد حل تحلیلی آنست که جواب مسئله کنترل پذیری سیستم های خطی متغیر با زمان وابسته به ماتریس انتقال حالت سیستم می باشد که در این گونه از سیستم ها تعریف می گردد و ماتریس انتقال حالت در حالت کلی به صورت تحلیلی قابل محاسبه نیست. در این پایان نامه روش گسسته سازی برای حل سیستم های خطی متغیر با زمان کلاسیک و فازی تعمیم داده شده است بدین صورت که جواب بهینه یک مسئله حساب تغییرات (که آن را به صورت خاص تعریف می کنیم) جواب اساسی سیستم های خطی متغیر با زمان را بدست دهد.

پایان نامه به این صورت ارائه شده است که در فصل اول مجموعه های فازی و منطق فازی مورد بحث قرار می گیرند. در فصل دوم از معادلات دیفرانسیل فازی بحث شده، در فصل سوم رویکرد جدید برای حل سیستم های خطی متغیر با زمان کلاسیک و فازی مورد بحث قرارگرفته است و در فصل چهارم مثال هایی از حل سیستم های خطی متغیر با زمان براساس رهیافت جدید ارائه شده است.

Abstract

The analytical solution of linear time varying systems is discussed by researchers and engineers. The main problem about analytical solution is its dependence on state transition matrix of the systems which is defined in this kind of systems and in general the state transition matrix is not solvable analytically. In this these discretizing method is generalized to solve classic and fuzzy linear time varying system such that an optimal solution of the calculus of variations problem (which is defined in particular way) gains the general solution of the linear time varying systems.

In the first chapter the fuzzy sets and fuzzy logic has been discussed, chapter two is about fuzzy differential equations; In chapter three a new approach for solving classic and fuzzy linear time varying systems is discussed and in the last chapter a number of examples are presented for finding the solution of linear time varying systems by the new approach.

فهرست مطالب

فصل اول : مجموعه های فازی و منطق فازی

فصل دوم : معادلات دیفرانسیل فازی

فصل سوم: حل سیستم های خطی متغیر با زمان کلاسیک و فازی براساس رهیافت AVK

فصل چهارم : مثالهای عددی

فصل اول

مجموعه‌های فازی و منطق فازی

۱.۱ مقدمه

در نظریه مجموعه‌های معمولی، مجموعه‌ها به صورت گردایه‌ای معین از اشیاء تعریف می‌شوند. به عبارت دیگر هر مجموعه با یک ویژگی خوش تعریف مشخص می‌شود. اگر یک شی مفروض، دارای آن ویژگی باشد، عضو مجموعه متناظر و اگر نباشد عضو آن نیست. مثلاً «ویژگی بزرگتر از ده بودن» یک ویژگی خوش تعریف است که به یک مجموعه مثلاً A متناظر می‌شود، زیرا برای هر عدد از مجموعه اعداد حقیقی می‌توان با قاطعیت گفت که آیا آن عدد بزرگتر از ده است یا خیر و بنابراین عضو A است یا خیر.

حال فرض کنید بخواهیم درباره آن دسته از مجموعه اعداد حقیقی صحبت کنیم که «بزرگ» باشند. در این جا با یک ویژگی ناخوش تعریف و مبهم یعنی «بزرگ» سروکار داریم. این که چه اعدادی بزرگ هستند و چه اعدادی بزرگ نیستند بسته به نظر افراد مختلف، فرق می‌کند. به عبارت دیگر عضویت یا عدم عضویت اعداد مختلف در گردایه‌ای با ویژگی «بزرگ» بودن قطعی نیست. مثلاً آیا ۱۰۰ عددی بزرگ است یا خیر؟ ۱۰۰۰ چطور؟ و ...

بنابراین این گونه مجموعه‌ها در قالب مجموعه‌های معمولی و قاطع نمی‌گنجند در نتیجه با نظریه مجموعه‌های جدیدی به نام نظریه مجموعه‌های فازی روبرو هستیم (در این مورد می‌توانید به مرجع [٤] مراجعه کنید).

۱.۲ مفاهیم اولیه و تعاریف مقدماتی

تعریف ۱. فرض کنید X یک مجموعه مرجع دلخواه باشد. تابع مشخصه هر زیر مجموعه معمولی A از X به $\{0,1\}$ است.

$$X_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases}$$

حال اگر بردار تابع مشخصه را از مجموعه دو عضوی $\{0,1\}$ به بازه $[0,1]$ توسعه دهیم، یک تابع خواهیم داشت که به هر x از X عددی را از بازه $[0,1]$ نسبت می‌دهد. این تابع را تابع عضویت A می‌نامیم.

با توجه به تعریف ۱، اکنون دیگر A یک مجموعه معمولی نیست بلکه چیزی است که آن را یک مجموعه فازی می‌نامیم. بنابراین یک مجموعه فازی A مجموعه‌ای است که درجات عضویت اعضاء آن می‌تواند به طور پیوسته از $[0,1]$ اختیار شود.

اگر تابع عضویت A را با $\mu_A(x)$ نشان دهیم، مشخص می‌شود $\mu_A(x)$ تابعی است که به هر عضو از X یک عدد از بازه $[0,1]$ به عنوان درجه عضویت آن عنصر در مجموعه فازی A نسبت می‌دهد. نزدیکی مقدار $\mu_A(x)$ به عدد ۱ نشان دهنده تعلق بیشتر x به مجموعه فازی A است و بالعکس.

تعریف ۲. فرض کنید X یک مجموعه مرجع و A یک زیرمجموعه فازی از آن باشد. مجموعه نقاطی از X برای آن نقاط $\mu_A(x) > 0$، تکیه‌گاه A یا مجموعه نقاط پشتیبان A نامیده می‌شود و با $supp\ A$ نشان داده می‌شود.

تعریف ۳. مقدار $M=sup\ \mu_A(x)$ ارتفاع مجموعه A نامیده می‌شود. اگر ارتفاع مجموعه فازی A برابر یک باشد، آن گاه A نرمال نامیده می‌شود. در غیر این صورت A را زیر نرمال می‌نامند.

تعریف ٤. اگر x عنصری باشد که برای آن $x, \mu_A(x) = \frac{1}{2}$ را یک نقطه گذر (معبر) گویند.

۱.۲.۱ نمادگذاری

برای نشان دادن یک مجموعه فازی روش‌های مختلفی رایج است، که ذیلاً به شرح آن‌ها می‌پردازیم:

۱) به کار بردن مستقیم تابع عضویت مجموعه فازی.

۲) یک مجموعه فازی را به صورت یک مجموعه از زوج‌های مرتب به صورت زیر نیز نمایش می‌دهند.

$$A = \{(x, \mu_A(x); \qquad x \in X\}.$$

۳) هنگامی که X یک مجموعه متناهی (و یا نامتناهی شما را) به صورت $\{x_1, \ldots, x_n\}$ باشد، یک زیرمجموعه فازی A از X به صورت‌های زیر نشان داده می‌شود.

$$A = \left\{\frac{\mu_A(x_1)}{x_1}, \frac{\mu_A(x_2)}{x_2}, \ldots, \frac{\mu_A(x_n)}{x_n}\right\}$$

$$A = \frac{\mu_A(x_1)}{x_1} + \cdots + \frac{\mu_A(x_n)}{x_n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\mu_A(x_i)}{x_i}$$

که در عبارت دوم، منظور از علامت + اجتماع است نه جمع حسابی.

و هنگامی که X یک مجموعه پیوسته باشد نماد زیر به کار برده می‌شود

$$A = \int_x \frac{\mu_A(x)}{x}$$

که در آن منظور از علامت $\int$، اجتماع است.

معمولاً از ذکر اعضایی که $\mu_A\ (x)=0$ است خودداری می‌شود.

مثال ۱. فرض کنید $X=\{1,2,\dots,10\}$. یک زیرمجموعه فازی A از X را که نشان دهنده ویژگی «نه خیلی کوچک و نه خیلی بزرگ» باشد، می‌توان توسط تابع عضویت زیر تعریف کرد.

$$\mu_A(x)=\begin{cases}0.1 & x=2\\ 0.3 & x=3\\ 0.5 & x=4\\ 0.8 & x=5\\ 0.8 & x=6\\ 0.5 & x=7\\ 0.3 & x=8\\ 0.1 & x=9\end{cases}$$

با استفاده از نمادهایی که در بالا اشاره شد، A را می‌توان به صورت‌های زیر نوشت

A={(2,0.1),(3,0.3),(4,0.5),(5,0.8),(6,0.8),(7,0.5),(8,0.3),(9,0.2)},

$$A=\frac{0.1}{2}+\frac{0.2}{3}+\cdots+\frac{0.1}{9}.$$

توجه کنید که در این مثال داریم

$$Supp\ A=\{2,3,\dots,9\}.$$

همچنین $sup\,\mu_A(x)=\mu_A(5)=\mu_A(6)=0.8$ یعنی ارتفاع A برابر 0.8 است، پس A یک مجموعه فازی زیرنرمال است. به علاوه چون $\mu_A(4)=\mu_A(7)=0.5$ اعداد چهار و هفت برای مجموعه فازی فوق دو نقطه معبر می‌باشند.

۱.۳ عملگرهای مجموعه‌ای

تعریف ۵. مجموعه فازی A را تهی گوییم اگر برای هر $\mu_A(x) = 0, x \in X$.

تعریف ٦. مجموعه فازی A را تام گوییم اگر برای هر $\mu_A(x) = 1, x \in X$.

تعریف ۷. گوییم مجموعه فازی A، زیر مجموعه فازی B است و می‌نویسیم $A \subseteq B$ اگر برای هر $\mu_A(x) \leq \mu_B(x), x \in A$.

تعریف ۸. دو مجموعه فازی A و B را مساوی گوییم و می‌نویسیم A=B اگر برای هر $x \in X$، $\mu_A(x) = \mu_B(x)$.

تعریف ۹. دو مجموعه فازی 'A را متمم مجموعه فازی A، توسط تابع عضویت می‌نامند هر گاه

$$\mu_{A'}(x) = 1 - \mu_A(x) \qquad \forall x \in X.$$

تعریف ۱۰. اگر $A \subseteq B$، متمم نسبی A نسبت به B که با B-A نشان داده می‌شود به صورت یک مجموعه فازی با تابع عضویت زیر تعریف می‌شود

$$\mu_{B-A}(x) = \mu_B(x) - \mu_A(x).$$

تعریف ۱۱. $A \cup B$، اجتماع دو مجموعه فازی A و B به صورت یک مجموعه فازی با تابع عضویت زیر تعریف می‌شود

$$\mu_{A\cup B}(x) = max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}, \qquad \forall x \in X.$$

تعریف ۱۲. $A \cap B$، اشتراک دو مجموعه فازی A و B به صورت یک مجموعه فازی با تابع عضویت زیر تعریف می‌شود

$$\mu_{A\cap B}(x) = min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}, \qquad \forall x \in X.$$

مانند حالت معمولی، A و B را جدا از هم گوییم اگر اشتراک تکیه‌گاه‌های A و B تهی باشد.

تنها قوانین مربوط به مجموعه‌های معمولی که در زمینه مجموعه‌های فازی برقرار نیست قوانین مربوط به متمم (قوانین طرد و شمولیت) است یعنی برای مجموعه‌های فازی و در حالت کلی $A \cup A' \neq X$ و $A \cap A' \neq \emptyset$.

۱.۳.۱ عملگرهای جانشین برای max و min در اجتماع و اشتراک دو مجموعه فازی

قبل از معرفی تعمیم‌های مختلف اجتماع و اشتراک دو تعریف اساسی را ذکر می‌کنیم:

تعریف ۱۳. یک تابع دو متغیره به صورت $T(x, y): I \times I \rightarrow I$ را یک $T-$ نرم گوییم. اگر در شرایط زیر صدق کند

۱) $$T(x, 1) = x$$

۲) یکنوایی $$x_1 \leq x_2, y_1 \leq y_2 \implies T(x_1, y_1) \leq T(x_2, y_2).$$

۳) جابجایی $$T(x, y) = T(y, x)$$

۴) شرکت‌پذیری $$T(x, T(y, z)) = T(T(x, y), z)$$

تعریف ۱٤. یک تابع دو متغیره به صورت $s(x,y): I \times I \to I$ را یک T– همنرم یا S– نرم گوییم، اگر در شرایط زیر صدق کند

۱)

$$S(x,0) = x$$

۲) یکنوایی

$$x_1 \le x_2, y_1 \le y_2 \implies S(x_1,y_1) \le S(x_2,y_2)$$

۳) جابجایی

$$S(x,y) = S(y,x)$$

٤) شرکت‌پذیری

$$S(x,S(y,z)) = S(S(x,y),z)$$

اکنون به معرفی متداول‌ترین تعاریف اجتماع و اشتراک برای مجموعه‌های فازی که همگی بر حسب زوج‌های دوگان T – نرم و S – نرم ارائه شده‌اند، می‌پردازیم.

۱) $S(x,y) = max(x,y)$ و $T(x,y) = min(x,y)$ براساس نرم‌های فوق اجتماع و اشتراک دو مجموعه فازی A و B به صورت مجموعه‌های فازی با توابع عضویت زیر تعریف می‌شوند.

$$\mu_{A\cup B}(x) = max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}.$$

$$\mu_{A\cap B}(x) = min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}.$$

۲) فرض کنید $S(x,y)=x+y-x.y$ و $T(x,y)=x.y$. بنابراین داریم

$$\mu_{A\cap B}(x)=\mu_A(x).\mu_B(x),$$

$$\mu_{A\cup B}(x)=\mu_A(x)+\ \mu_B(x)-\mu_A(x).\mu_B(x).$$

۳) اگر $S(x,y)=min(1,x+y)$ و $T(x,y)=max(0,x+y-1)$ باشند، براساس این نرم‌ها، اجتماع و اشتراک دو مجموعه فازی به صورت زیر تعریف می‌شوند.

$$\mu_{A\cup B}(x)=min(1,\mu_A(x)+\mu_B(x)).$$

$$\mu_{A\cap B}(x)=max(0,\mu_A(x)+\mu_B(x)-1).$$

برای اطلاعات بیشتر به مراجع [۱۹] و [۲] رجوع کنید.

مسلماً تنها راه جمع‌بندی یا انبوهش مجموعه‌های فازی، اجتماع و اشتراک نیست. راه‌های دیگری نیز برای انبوهش دو مجموعه فازی موجود است. یک راه پیشنهاد شده، استفاده از عملگرهای میانگین است (به مرجع [۱۹] رجوع کنید.).

۱.٤ α – برش‌ها ، تحدب و اعداد فازی

تعریف ۱۵. زیر مجموعه (معمولی) عناصری از X که درجه عضویت آن‌ها در مجموعه فازی A حداقل به بزرگی $\alpha(\alpha>0)$ است را α – برش A (یا مجموعه تراز α وابسته به A) گوییم و با نماد زیر نشان می‌دهیم:

$$A^{\alpha}=\{x\in X|\mu_A(x)\geq\alpha\}$$

تعریف ۱۶. مجموعه فازی A را محدب گوییم اگر هر α – برش A (برای تمام $0 < \alpha \leq 1$) محدب باشد.

تعریف معادل تحدب که در مرجع [۲٤] به آن اشاره شده به صورت زیر است:

مجموعه فازی A محدب است اگر برای هر $x_1, x_2 \in X$ و $\lambda \in [0,1]$ داشته باشیم:

$$\mu_A[\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2] \geq min[\mu_A(x_1), \mu_A(x_2)]$$

تعریف ۱۷. مجموعه فازی A را عدد فازی گوییم هر گاه:

۱) A نرمال باشد.

۲) A محدب باشد.

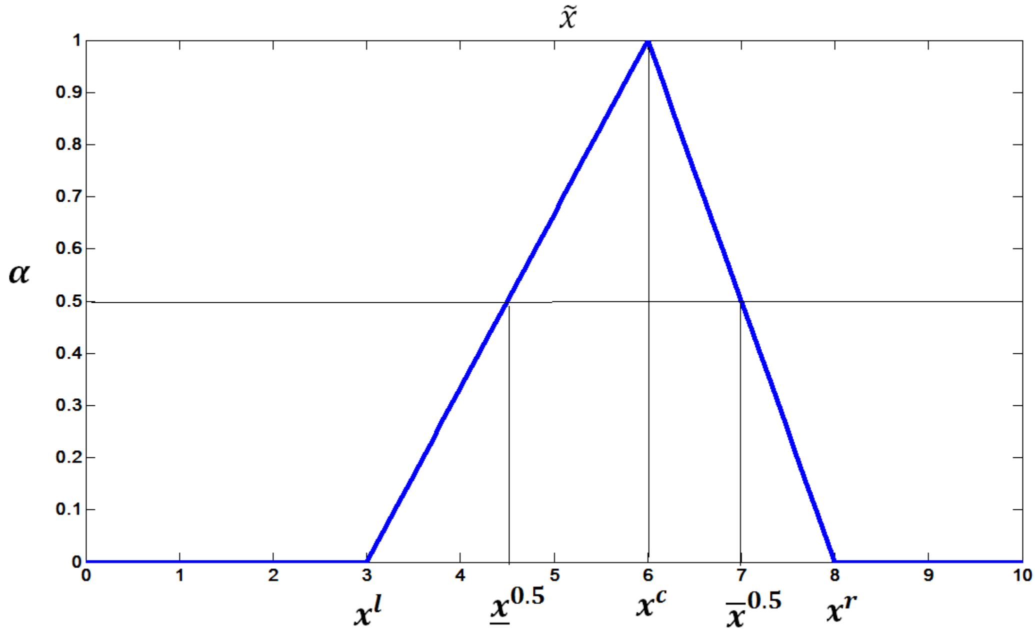
۳) $\mu_A(x)$ قطعه قطعه پیوسته باشد.

بسته به شکل تابع عضویت اعداد فازی آن‌ها را اعداد فازی مثلثی، ذوزنقه‌ای، گوسی و غیره می‌نامند. اعداد فازی مثلثی با سه تایی مرتب (l,c,r) نمایش داده می‌شوند که مقدار تابع عضویت در c برابر یک است و $r\text{-}c$ را پهنای راست و $c\text{-}l$ را پهنای چپ عدد فازی می‌نامند. به عنوان مثال عدد فازی مثلثی $\tilde{x}$ را به شکل زیر می توانیم نمایش دهیم

$$x^\alpha = [x^c - (1-\alpha)(x^c - x^l), x^c + (1-\alpha)(x^r - x^c)]$$

$$\overline{x}^\alpha = x^c + (1-\alpha)(x^r - x^c) \ , \underline{x}^\alpha = x^c - (1-\alpha)(x^c - x^l)$$

که مقدار تابع عضویت در x^c برابر یک است و $\overline{x}^\alpha, \underline{x}^\alpha$ کران پایین و بالای $\tilde{x}$ در برش α می باشند.



نمایش عدد فازی مثلثی

برای اطلاعات بیشتر در مورد اعداد فازی می‌توانید مراجع [۱]، [٤] و [٥] را ملاحظه کنید. در این پایان‌نامه از اعداد فازی مثلثی استفاده می‌شود و ما تنها به تعریف این گونه اعداد بسنده می‌کنیم.

فصل دوم

معادلات دیفرانسیل فازی

۲.۱ مقدمه

در این فصل قصد داریم تعاریف، لم و قضایایی در مورد معادلات دیفرانسیل فازی ارائه کنیم. فرض کنید $P(\mathbb{R}^n)$ خانواده همه زیرمجموعه‌های محدب فشرده غیرتهی در $\mathbb{R}^n$ باشد به طوری که جمع و ضرب اسکالر در $P(\mathbb{R}^n)$ به صورت معمول تعریف شده باشند.

تعریف ۱. فرض کنید A و B دو زیرمجموعه غیرتهی کراندار $\mathbb{R}^n$ باشند:

a) فاصله هاسدورف نقطه x تا مجموعه B را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$d_1\,(x,B)=inf_{y\in B}\,\|x-y\|$$

که در آن $\|\cdot\|$ نرم اقلیدسی در $\mathbb{R}^n$ است.

b) فاصله هاسدروف مجموعه A از مجموعه B را نیز تعریف می‌کنیم.

$$d_2\,(A,B)=sup_{x\in A}\,d_1(x,B)$$

c) حال با توجه به دو قسمت a و b فاصله هاسدورف بین مجموعه A و B را به صورت زیر خواهیم داشت:

$$d\,(A,B)=max\{d_2\,(A,B),d_2(B,A)\}$$

تعریف ۲. E^n، مجموعه همه اعداد فازی را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$E^n = \left\{u : \mathbb{R}^n \longrightarrow [0,1]; \quad \text{. برآورده سازد } 4 \text{ تا } 1 \text{ شرط } u\right\}$$

۱) u مجموعه فازی نرمال است یعنی:

$$\{x \in \mathbb{R}^n \,|u\,(x) = 1\,\} \neq \emptyset$$

۲) u مجموعه فازی محدب است یعنی:

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n, 0 \leq \lambda \leq 1$$

$$u\,(\lambda x + (1-\lambda)y \geq min\{u(x), u(y)\}$$

۳) از بالا نیمه پیوسته است.

٤) $[u]^0 = \{x \in \mathbb{R}^n \,|u\,(x) > 0\}$ در $\mathbb{R}^n$ فشرده است، ($[u]^0$ مجموعه نقاط پشتیبان u نامیده می‌شود.)

برای هر $[u]^\alpha, 0 < \alpha \leq 1$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$[u]^\alpha = \{x \in \mathbb{R}^n \,|u\,(x) \geq \alpha\}$$

$[u]^\alpha$ را مجموعه α برش u می‌گوییم.

برای هر $u\,(x), x \in \mathbb{R}^n$ را درجه عضویت x می‌نامیم.