دانشگاه مازندران

دانشکده علوم پایه

موضوع:

نگاشت های حافظ ضرب $AB-BA^*$ روی عامل های جبر فون نویمان

جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد رشته ریاضی

گرایش آنالیز ریاضی

استاد راهنما:

دکتر علی تقوی

استاد مشاور:

دکتر قاسم علیزاده

نگارش:

مجتبی نوری

تیر ماه ۱۳۹۱

دانشگاه مازندران

دانشگاه مازندران

تعهد نامه اصالت پایان نامه

اینجانب مجتبی نوری کارشناس ارشد رشته ریاضی محض به شماره دانشجویی ۸۹۵۲۴۷۸۱۴
تعهد می نمایم کلیه مطالب مندرج دراین پایان نامه تحت عنوان :

روی عامل های جبر فون نویمان $AB\text{-}BA^*$ نگاشت های حافظ ضرب

حاصل فعالیت های پژوهشی خودم بوده که به راهنمایی و مشورت استاید دانشگاه مازندران تهیه شده است و هر جا که از دستاوردها وآثار علمی دیگران استفاده شده با رعایت حقوق مالکیت معنوی به صورت مستقیم یا غیر مستقیم در متن پایان نامه ارجاع داده شده ودر منابع پایانی ذکر گردیده است .

این اثر پژوهشی قبلا برای اخذ هیچ مدرک هم سطح ، بالاتر و پایین تر در هیچ یک از دانشگاها وموسسات دولتی وغیر دولتی ارائه نشده است ، در صورت احراز تخلف و اثبات خلاف هر یک از موارد فوق ، دانشگاه مازندران حق دارد بدون نیاز به حکمی از مرجع قضایی یا غیر قضایی نسبت به ابطال مدرک تحصیلی اینجانب اقدام نماید و حق پیگیری موضوع نیز برای دانشگاه مازندران محفوظ است واینجانب حق هر گونه اعتراض را از خود ساقط می نمایم .

همه نتایج وحقوق حاصل از این اثر متعلق به دانشگاه مازندران است و هر گونه استفاده از نتایج علمی وعملی ، واگذاری اطلاعات به دیگران یا چاپ و تکثیر ، نسخه برداری ترجمه و اقتباس از پایان نامه ، بدون موافقت دانشگاه مازندران یا استاد راهنما یا مشاور، ممنوع است، نقل مطالب با ذکر ماخذ بلا مانع است.

صحت امضای دانشجو مورد تایید است. نام ونام خانوادگی وامضای دانشجو

مدیر گروه آموزشی:

معاون پزوهشی دانشکده:

چکیده

فرض کنید$\mathcal{A}$ و $\mathfrak{B}$ دو عامل از جبرهای فون نویمان باشند. برای $B \in \mathcal{A}$ و A ضربA و B را به صورت زیر تعریف کنید ،

$$[A,B]_*=AB-BA^*$$

هدف از این پایان نامه این است که نشان د هیم که یک نگاشت دو سویی غیر خطی $\phi : \mathcal{A} \longrightarrow \mathfrak{B}$ حافظ ضرب بالاست اگر و تنها اگر ϕ یک *- یکریختی حلقه ای باشد.

واژه های کلیدی:عامل های جبر فون نویمان ،جبر اول

پیشگفتار

بحث نگاشتهای حافظ ضرب ،$[A,B]_*=AB-BA^*$ روی عامل جبرفون نویمان ازجمله مباحثی در ریاضیات است که تحقیقات زیادی پیرامون آن صورت گرفته است، وهم اکنون نیزدانشمندان زیادی درشاخه های مختلف این مبحث تحقیق می کنند.

از جمله دانشمندانی که دراین زمینه تحقیق می کنند می توان به شمرل(Semlr) و مولنار (Molnar) و بریشر (Breser) و فوسنر (Fosner) ...اشاره کرد.

شمرل ثابت کرد هر* - مشتق گیری جردن $J: \mathfrak{B}(\mathcal{H}) \rightarrow \mathfrak{B}(\mathcal{H})$ به فرم $J(T)=T A -AT^*$ است ،که در آن $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$ جبر همه عملگرهای خطی کراندار روی فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ است.

مولنار (Molnar) روابط میان زیر فضاها و ایده ال هایی از $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$ را مورد مطالعه قرار داد. مولنار (Molnar) نشان داد که اگر برای زیر فضای $\mathcal{N}$ از $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$ داشته باشیم ، $AB-BA^* \in \mathcal{N}$ که در آن

$A \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})$ و $B \in \mathcal{N}$ آن گاه $\mathcal{N}$ یک ایده ال است و همچنین اگر بعد $\mathcal{H}$ یک عدد طبیعی فرد باشد آن گاه $\mathcal{N}= \mathfrak{B}(\mathcal{H})$. به علاوه او ثابت کرد که اگر بعد $\mathcal{H}$ بزرگتر از یک و $\mathcal{N} \subseteq \mathfrak{B}(\mathcal{H})$ یک ایده ال باشد آن گاه تساوی زیر بر قرار است:

$$\mathrm{Span}\{ AB-BA^* / A \in \mathcal{N} \ , B \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})\}=$$

$$\mathrm{Span}\{ BA-AB^* / A \in \mathcal{N} \ , B \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})\}= \mathcal{N}$$

بریشر (Breser)و فوسنر (Fosner) نتایج مولنار(Molnar) را به حلقه ها تعمیم دادند و روابط میان ایده ال های حلقه $\mathcal{R}$ و ایده ال های چپ و راست $\mathcal{R}$ را نسبت به ضرب ، $[A,B]_*=AB-BA^*$ مورد مطالعه قرار د ادند و روشان کاملا جبری و متفاوت با روش مولنار بود.

فهرست مندرجات

فصل ۱

مروری بر جبر عملگرها

۱.۱ مقدمه

دراین فصل به بررسی جبرهای باناخ می پردازیم وبرخی از تعاریف مقدماتی وقضایا، که درفصل های بعد نیاز داریم را بیان می کنیم.

۲.۱ فضای نرمدار

۱.۲.۱ تعریف

فرض کنید χ فضای برداری حقیقی (یا مختلط) باشد ، تابع

$$\| . \| : \chi \longrightarrow \mathcal{R}^{+} \cup \{0\}$$

را یک نرم روی χ نامیم هرگاه

الف : $\|x\| = 0 \leftrightarrow x = 0$.

ب : $\|a\,x\| = |a|\,\|x\|$ به ازای هر $a \in \mathbb{C}$ وهر $x \in \chi$.

ج : $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ برای تمام $x, y \in \chi$.

اگر روی χ نرم وجود داشته باشد ، آنگاه χ را یک فضای نرمدار نامیم.

۲.۲.۱ تعریف

فرض کنید χ یک فضای نرمدار با شد.گوییم χ یک فضای باناخ است هرگاه χ نسبت به متر تولید شده به وسیله نرم یعنی برای هر $x, y \in \chi$ ، $d(x, y) = \| x - y\|$ کا مل باشد.

۳.۲.۱ تعریف

تابع اندازه پذیر $f : \chi \longrightarrow \mathcal{R}$ را اساساً کراندار نامیم، هرگاه $\mathcal{M} > 0$ وجود داشته باشد به قسمی که تقریباً همه جا

$$\| f(x) \| \leq \mathcal{M} .$$

$L^{\infty}(u)$ را گردایه تمام توابع اندازه پذیر اساساً کراندار می گیریم. (تقریباً همه جا یعنی مجموعه ای مانند $\mathcal{A}$ متشکل از همه ی x هایی که در رابطه مورد نظرصدق نمی کند مجموعه ای پوچ تشکیل دهد، یعنی دارای اندازه صفر باشد.)

۳.۱ عملگرهای خطی

در قضیه زیر مشخصه ای برای پیوستگی یک عملگر خطی از فضای نرمدار χ به فضای نرمدار $\mathcal{Y}$ ارائه می کنیم.

۱.۳.۱ قضیه[۲۰]

فرض کنید χ و$\mathcal{Y}$ دو فضای نرمدار و$\mathrm{T}:\chi \longrightarrow \mathcal{Y}$ عملگر خطی باشد، آنگاه شرایط زیر با هم معادلند.

الف :T پیوسته است.

ب :T در یک نقطه پیوسته است.

ج :T در صفر پیوسته است. یعنی اگر $x_n \longrightarrow 0$ آنگاه $\mathrm{T}\,x_n \longrightarrow 0$.

د :$\overline{\mathrm{T}(\mathfrak{B})_{۱}}$ درY کراندار است، که در آن$(\mathfrak{B})_{۱}$ گوی یکه درχ است .

م :عدد حقیقی α موجود است که به ازای هر$x \in \chi$ ، $\|\mathrm{T}x\| \leq \alpha\|x\|$.

۲.۳.۱ تعریف

فرض کنید χ و$\mathcal{Y}$ دو فضای نرمدار و$\mathrm{T}:\chi \longrightarrow \mathcal{Y}$ عملگر خطی باشد، آنگاهT کراندار است اگر عدد $a>0$ وجود داشته باشد، بقسمی که به ازای هر$x \in \chi$ داشته باشیم ، $\|\mathrm{T}x\| \leq a\|x\|$. در این صورت α یک کران بالا برایT محسوب می شود.

۳.۳.۱ نتیجه[۲۰]

اگر χ و$\mathcal{Y}$ دوفضای نرمدار و$\mathrm{T}:\chi \longrightarrow \mathcal{Y}$ عملگر خطی باشد،آنگاهT کرانداراست اگروتنها اگر T پیوسته باشد.

۴.۳.۱ قضیه[۲۰]

مجموعه $\mathfrak{B}\,(\,\chi,\mathcal{Y}\,)$ متشکل ازتمام عملگرهای خطی کراندار ازفضای نرمدار χ به فضای نرمدار $\mathcal{Y}$، باجمع وضرب اسکالر نقطه وار و نرم

$$\|\mathrm{T}\| = \sup\{\|\mathrm{T}x\| : \|x\| \leq ۱\}$$

یک فضای نرمداراست.

۵.۳.۱ قضیه گراف بسته[۲۰]

اگر χ و $\mathcal{Y}$ دوفضای باناخ و $\mathrm{T}:\chi \longrightarrow \mathcal{Y}$ یک عملگرخطی باشد آنگاه T پیوسته است اگر وتنها گراف آن بسته باشد .

۶.۳.۱ قضیه نگاشت وارون[۲۰]

فرض کنید χ و $\mathcal{Y}$ دوفضای باناخ و $\mathrm{T}:\chi \longrightarrow \mathcal{Y}$ یک عملگرخطی کراندار ، یک به یک و پوشا نیز باشد،در این صورت $\mathrm{T}^{-۱}$ کراندار است.

۷.۳.۱ قضیه نگاشت باز[۲۰]

فرض کنید χ و $\mathcal{Y}$ دوفضای باناخ و $\mathrm{T}:\chi \longrightarrow \mathcal{Y}$ یک عملگرخطی، پوشا وپیوسته باشد. اگر $\mathcal{U}$ زیر مجموعه ای باز در χ باشد ، آنگاه $\mathrm{T}(\mathcal{U})$ در $\mathcal{Y}$ بازاست. بعلاوه اگر Tیک به یک باشدآنگاه T یک همسان ریختی است.

٤.١ جبر باناخ

١.٤.١ تعریف

فرض کنید $\mathcal{A}$ یک فضای برداری مختلط باشد، عمل ضرب روی $\mathcal{A}$ را چنین تعریف می کنیم

$$\mathcal{A} \times \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$$

$$(x, y) \rightarrow xy$$

در این صورت $\mathcal{A}$ را یک جبر مختلط نامیم هرگاه خواص زیر به ازای هر $x, y, z \in \mathcal{A}$ و $\lambda \in \mathbb{C}$ برقرار باشد.

الف : $x(yz) = (xy)z$.

ب : $x(y+z) = xy + xz$.

ج : $(y+z)x = yx + zx$.

د : $\lambda(xy) = (\lambda x)y = x(\lambda y)$.

٢.٤.١ تعریف

زیر مجموعه غیرتهی $\mathfrak{B}$ از $\mathcal{A}$ را زیر جبری از جبر $\mathcal{A}$ گویند هر گاه $\mathfrak{B}$ زیر فضایی از فضای برداری $\mathcal{A}$ باشد و برا ی هر $a, b \in \mathfrak{B}$ ، $ab \in \mathfrak{B}$ باشد.

٣.٤.١ تعریف[٥]

یک جبر با ناخ مختلط، عبارت است از یک جبر $\mathcal{A}$ روی $\mathbb{C}$ به قسمی که:

الف: $\mathcal{A}$ یک فضای باناخ باشد.

ب: $\|xy\| \leq \|x\| \|y\|$ برای هر x, y در $\mathcal{A}$.

ج: اگر $\mathcal{A}$ شامل عنصر همانی e باشد آنگاه $\|e\| = ١$.

شرط سوم نشان می دهد که لزوما یک جبر با ناخ یکدار نیست.

۱.٤.٤ یکدار کردن جبر های باناخ بدون یکه

فرض کنیم$\mathcal{A}$ جبر باناخ بدون یکه باشد، آن گاه $\overline{\mathcal{A}} =\{ (x, \mathrm{a}) , x \in \mathcal{A} , \mathrm{a}\in\mathbb{C}\}$ ، با اعمال خطی که به صورت مولفه ای تعریف می شوند یک فضای برداری است و بعلاوه اگر عمل ضرب و نرم را در $\overline{\mathcal{A}}$ به صورت زیر تعریف کنیم.

$$(x, \mathrm{a}). (\mathrm{y},\mathrm{b})=(x \mathrm{y}+\mathrm{ay}+\mathrm{b}x , \mathrm{ab})$$

$$\|(x, \mathrm{a})\| = \| x \|+| \mathrm{a} |$$

آنگاه $\overline{\mathcal{A}}$ یک جبر باناخ بایکه(۱ , 0) =e خواهد بود و $\overline{\mathcal{A}}$ رایکدار شده$\mathcal{A}$ نامند.

۱.٤.۵ مثال

اگر $\mathcal{K}$ یک فضای هاسدورف فشرده باشد، آن گاه $\mathbb{C}\ (\mathcal{K})$ (مجموعه تمام توابع مختلط مقدار روی $\mathcal{K}$) یک جبر با ناخ با نرم سوپریمم و اعمال نقطه وار است و تابع ثابت بامقدار ۱، یکه ی ضربی آن است.

۱.٤.٦ مثال

اگر $\mathcal{H}$ فضای هیلبرت باشد،آنگاه $\mathfrak{B}\ (\mathcal{H})$ یک جبر با ناخ با نرم عملگر و ضرب عملگر (یعنی ترکیب) است و عملگر همانی I ، یکه ضربی آن است.

۱.٤.۷ مثال

اگر χ فضای موضعا فشرده و هاسدورف باشد ،$C_0\ (\chi)$ را مجموعه ی همه ی توابع پیوسته مختلط روی χ که در ∞ صفر یا محو می شوند گویند.

منظور از توابعی مانندfکه در ∞ صفر یا محو می شوند این است که به ازای هر $0 < \mathcal{E}$ یک مجموعه فشرده $\mathcal{K}$ وجود داشته باشد به طوری که $x \notin \mathcal{K} \ \longrightarrow\ | f\ (x)| < \mathcal{E}$.

با این تعاریف $C_0\ (\chi)$ یک جبر باناخ جابجای بدون یکه خواهد بود .

۸.٤.۱ قضیه[۲۰]

عمل ضرب در هر جبر باناخ تابعی پیوسته از $\mathcal{A} \times \mathcal{A}$ به $\mathcal{A}$ است. به عبارت دیگر هرگاه $\{x_n\}$ و $\{y_n\}$ دو دنباله در $\mathcal{A}$ باشند به قسمی که $x_n \longrightarrow x$ و $y_n \longrightarrow y$ آنگاه $x_n y_n \longrightarrow xy$.

۹.٤.۱ تعریف

فرض کنید $\mathcal{A}$ یک جبر باناخ مختلط یکدار باشد. $x \in \mathcal{A}$ راوارون پذیرگوییم، هرگاه $y \in \mathcal{A}$ وجود داشته باشد بقسمی که $xy = yx = e$. در این صورت y را با $x^{-۱}$ نشان می دهیم وآن را وارون x می نامیم.
مجموعه تمام عناصر معکوس پذیر $\mathcal{A}$ را با $G(\mathcal{A})$ نشان می دهیم.
اگر $x, y \in \mathcal{A}$ آنگاه x $y^{-۱}$ وارون $y^{-۱}x$ است. بنابراین $G(\mathcal{A})$ یک گروه ضربی است.

۱۰.٤.۱ قضیه[۴]

فرض کنید $\mathcal{A}$ یک جبر باناخ مختلط یکدار و $x \in \mathcal{A}$ و $\|x\| < ۱$ باشد.در این صورت داریم:

$$(۱ - x)^{-۱} = \sum_{n=۰}^{\infty} x^n , (۱ - x) \in G(\mathcal{A})$$

۱۱.٤.۱ قضیه[۴]

فرض کنید $\mathcal{A}$ یک جبر باناخ مختلط باشد و $x \in \mathcal{A}$. اگر $a \in G(\mathcal{A})$ و $\| x - a \| < (\|a^{-۱}\|)^{-۱}$، آنگاه $x \in \mathcal{A}$ وارون پذیر است وبعلاوه نگاشت $x \longrightarrow x^{-۱}$ یک همانسان ریختی از $G(\mathcal{A})$ به روی $G(\mathcal{A})$ است.

۱۲.٤.۱ قضیه[۴]

فرض کنید$\mathcal{A}$ یک جبر باناخ مختلط باشد آنگاه$G(\mathcal{A})$ یک زیر مجموعه باز از$\mathcal{A}$ است.

٥.۱ همریختی های مختلط

۱.٥.۱ تعریف

فرض کنید $\mathcal{A}$ یک جبر مختلط وϕ یک تابعی خطی بر$\mathcal{A}$ باشد که متحد صفر نیست. اگر به ازای هر $x, y \in \mathcal{A}$

$$\phi(xy) = \phi(x)\ \phi(y)$$

آنگاه ϕ یک همریختی مختلط بر$\mathcal{A}$ نام دارد.

۲.٥.۱ لم[۱۸]

هرگاهϕ یک همریختی مختلط بر جبر مختلط$\mathcal{A}$، با یکه۱ باشد آنگاه۱ = (۱) ϕ و به ازای هر$\mathcal{A}$ $x\in$ معکوس پذیر داریم ، $\phi(x) \neq 0$.

۳.٥.۱ قضیه (گلیسون(Gleason)-کاهان(Kahane)-زلاسکو(Zelazko))[۱۸]

اگرϕیک همریختی مختلط بر جبرمختلط$\mathcal{A}$ با یکه ی ۱ باشد به طوری که ۱ = (۱)ϕ و به ازای هر$\mathcal{A}$ $x\in$ معکوس پذیر $\phi(x) \neq 0$، آنگاه

$$\phi(xy) = \phi(x)\ \phi(y)\ ،\ (x, y \in \mathcal{A})$$

٤.٥.۱ قضیه[۱۸]

هرگاهϕ یک تابعی همریختی خطی روی جبر باناخ$\mathcal{A}$ باشد ، آنگاه۱ =|| ϕ || .

۶.۱ طیف وشعاع طیفی

۱.۶.۱ تعریف

فرض کنید $\mathcal{A}$ جبرباناخ و $x \in \mathcal{A}$ باشد. طیف x را با $\sigma\ (x)$ نشان می دهیم و به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$\sigma\ (x) = \{\ \lambda \in\ \mathbb{C} : \lambda ۱ - x\ \notin\ G(\mathcal{A})\}$$

به عبارت دیگر $\sigma\ (x)$ مجموعه تمام اعداد مختلط λ است بقسمی که $\lambda ۱ - x$ معکوس پذیر نباشد. متمم $\sigma\ (x)$ را با $\mathcal{P}\ (x)$ نشان می دهیم وآن را حلال x نامیم.

۲.۶.۱ مثال

اگر $\mathcal{A} = C\ (\chi)$ که χ فضای فشرده و هاسدورف است آنگاه $\sigma\ (f)\ = f\ (\chi)$ برای هر f متعلق به $\mathcal{A}$.

۳.۶.۱ مثال

اگر $\mathcal{A} = \mathcal{M}_n\ (\mathbb{C})$ ، آنگاه به ازای هر $T \in \mathcal{A}$ ، $\sigma(T)$ همان مجموعه مقادیر ویژه ماتریس $\mathcal{A}$ است.

۴.۶.۱ قضیه[۱۵]

فرض کنید a عضوی از جبر یکدار $\mathcal{A}$ باشد و $\mathcal{P} \in \mathbb{C}\ [z]$ ، ($\mathbb{C}[z]$،مجموعه تمام چند جمله ای ها با متغیر z و ضریب مختلط) آنگاه $\sigma(\mathcal{P}\ (a))\ = \mathcal{P}(\sigma(a))$

۵.۶.۱ تعریف

اگر $\mathcal{A}$ یک جبر باناخ و $x \in \mathcal{A}$ باشد ، آنگاه شعاع طیفی x را با $r\ (x)$ نشان می دهیم وبصورت زیر تعریف می کنیم:

$$r\ (x) = \ \sup\ \{|\ \lambda\ |: \lambda \in \sigma\ (x)\ \}$$

در حقیقت $r(x)$ شعاع کوچکترین قرص بسته به مرکزصفردر $\mathbb{C}$ است که شامل $\sigma\ (x)$ است.

۶.۶.۱ قضیه[۱۵]

اگر $\mathcal{A}$ یک جبر باناخ و $x \in \mathcal{A}$ باشد ، آنگاه

الف :طیف $\sigma(x)$ از x فشرده وناتهی است

ب : شعاع طیفی $r(x)$ از x در رابطه زیر صدق می کند :

$$r(x)=\inf_{n\in \mathrm{N}} \| x^n \|^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \| x^n \|^{\frac{1}{n}}$$

این قضیه برای حالت حقیقی برقرار نیست. به مثال زیر توجه کنید.

۷.۶.۱ مثال

اگر $\mathcal{A}=\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathcal{R})$ (جبر ماتریس های حقیقی(2×2) با درایه های حقیقی) و $T=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\in\mathcal{A}$ آنگاه $\sigma(\mathrm{T}) = \phi$. درحقیقت شرط لازم و کافی برای آنکه $\mathrm{T}-\lambda \mathrm{I}$ واورن پذیر نباشد آن است که $\det(\mathrm{T}-\lambda\mathrm{I})=\lambda^2+1 = 0$ ،که این معادله در $\mathcal{R}$ دارای جواب نیست و لذا $\sigma(\mathrm{T}) = \phi$.

۸.۶.۱ قضیه[۴]

فرض کنید $\mathcal{A}$ یک جبر باناخ و $x \in \mathcal{A}$ باشد بطوریکه $a \notin \sigma(x)$. در این صورت داریم:

$$\operatorname{dist}(a\,,\sigma(x)) = \frac{1}{r\left(\left(a1-x\right)^{-1}\right)}$$

۹.۶.۱ لم[۱۸]

اگر $\mathcal{A}$ یک جبر باناخ و $x,\mathrm{y} \in \mathcal{A}$ باشند ، آنگاه $1-x\,\mathrm{y}$ معکوس پذیر است اگر وتنها اگر $1-\mathrm{y}x$ معکوس پذیر باشد.

۱۰.٦.۱ نتیجه[۱۸]

اگر $\mathcal{A}$ یک جبر باناخ و $x, \mathrm{y} \in \mathcal{A}$ باشند ، آنگاه

$$\sigma(x\,\mathrm{y})\cup\{0\} = \sigma(\mathrm{y}x)\cup\{0\}$$

۱۱.٦.۱ نتیجه[۱۸]

اگر $\mathcal{A}$ یک جبر باناخ و $x, \mathrm{y} \in \mathcal{A}$ باشند ، آنگاه

$$r(x\mathrm{y}) = r(\mathrm{y}x)$$

۱۲.٦.۱ قضیه(گلفاند(Gelfand)-مازور(Mazur))[۱۸]

اگر هر عضو غیر صفر جبر باناخ $\mathcal{A}$ وارون پذیر باشد ، آنگاه $\mathcal{A}$ یکریخت طولپا با $\mathbb{C}$ است

(یعنی $\|\mathrm{T}x\| = \|x\|$).

۷.۱ ایده آل

۱.۷.۱ تعریف

زیر مجموعه ناتهی I از فضای برداری $\mathcal{A}$ را یک ایده آل چپ(راست) نامیم، هر گاه I یک زیر فضای برداری $\mathcal{A}$ باشد و به ازای هر $x \in \mathcal{A}$ و $\mathrm{y} \in \mathrm{I}$ داشته باشیم، $x\,\mathrm{y} \in \mathrm{I}$ ($\mathrm{y}\,x \in \mathrm{I}$).

I را ایده ال دو طرفه یا به طور خلاصه ایده ال گوییم هر گاه، هم ایده ال چپ و هم ایده ال راست باشد.

$\{0\}$ و $\mathcal{A}$ ایده آلهای بدیهی هستند.اگر I یک ایده آل از $\mathcal{A}$ و $\mathcal{A} \neq \mathrm{I}$ ،آنگاه I را یک ایده آل سره $\mathcal{A}$ نامیم.

همچنین ایده آل سره I را بیشینه نامیم هرگاه هیچ ایده آل سره شامل I موجود نباشد.

۲.۷.۱ قضیه[۱۸]

الف:اگر I ایده آل سره باشد،آنگاه $I \cap G(\mathcal{A}) = \phi$.

ب:اگرI یک ایده آل باشد آنگاه $\bar{I}$ نیز یک ایده آل است.بعلاوه اگر Iیک ایده آل سره باشد، آنگاه $\bar{I}$ نیز یک ایده ال سره است.

ج:هر ایده آل ماکسیمال بسته است.

۳.۷.۱ قضیه[۱۸]

اگر $\mathcal{M}$ مجموعه همه همریختی های روی جبر باناخ جابجایی $\mathcal{A}$ باشد، آنگاه

الف:هر ایده آل ماکسیمال $\mathcal{A}$، هسته یک $\phi \in \mathcal{M}$ است .

ب: اگر $\phi \in \mathcal{M}$، آنگاهϕ هسته ی یک ایده آل ماکسیمال $\mathcal{A}$ است.

ج: عضو $x \in \mathcal{A}$ وارون پذیر است اگر و تنها اگر برای هر $\phi \in \mathcal{M}$ داشته باشیم $\phi(x) \neq 0$، .

د: $x \in \mathcal{A}$ وارون پذیر است اگر و تنها اگر x عضو هیچ ایده آل ماکسیمال نباشد.

م:$a \in \sigma(x)$ است اگر وتنها اگر برای یک $\phi \in \mathcal{M}$ داشته باشیم $\phi(x) = a$، .

٤.۷.۱ قضیه

اگر $\mathcal{A}$ یک حلقه با یکه ی ۱باشد ، آنگاه مجموعه های زیر یکسان هستند:

الف:اشتراک همه ایده آلهای چپ ماکسیمال $\mathcal{A}$.

ب:اشتراک همه ایده آلهای راست ماکسیمال $\mathcal{A}$.

ج:مجموعهx هایی که $1 - zx$ برای هر$z \in \mathcal{A}$ وارون پذیر باشد .

د: مجموعهx هایی که $1 - xz$ برای هر$z \in \mathcal{A}$ وارون پذیر باشد .

اشتراک همه ایده آلهای ماکسیمال $\mathcal{A}$ را رادیکال$\mathcal{A}$ نامیم و با $\mathcal{R}ad\ \mathcal{A}$ نشان می دهیم . اگر $\mathcal{R}ad\ \mathcal{A} = \{0\}$ باشد، آنگاه $\mathcal{A}$ رانیم ساده نامیم.

۵.۷.۱ قضیه [۱۸]

اگر χ یک فضای باناخ باشد ، آنگاه $\mathfrak{B}(\chi)$ یک جبر باناخ نیم ساده است .

۶.۷.۱ قضیه [۴]

اگر $\mathcal{A}$ یک جبر باناخ یکدار باشد ، آنگاه $\frac{\mathcal{A}}{\mathcal{R}ad\ \mathcal{A}}$ نیم ساده است. بعلاوه اگر $x \in \mathcal{A}$ ، $x + \mathcal{R}ad\ \mathcal{A}$ در $\frac{\mathcal{A}}{\mathcal{R}ad\ \mathcal{A}}$ معکوس پذیز است اگر وتنها اگر x در $\mathcal{A}$ معکوس پذیر باشد.

۷.۷.۱ قضیه [۱۷]

هر زیر جبر ، از یک جبر باناخ نیم ساده ، نیم ساده است.

فصل ۲

C^*−جبرها

۱.۲ مقدمه

در این فصل گذری بر ، C^*−جبر ها، C^*−همریختی ها و توپولوژی روی $\mathfrak{B}\,(\mathcal{H})$ داریم ودر هر بخش تعاریف و قضایای مهمی را بیان خواهیم کرد که در اثبات قضایای فصل بعد به ماکمک خواهد کرد.