بسم الله الرحمن الرحيم

پایان‌نامه

برای دریافت کارشناسی ارشد

در رشته: ریاضی

دانشکده: علوم پایه

گروه علمی ریاضی

عنوان:

مدول‌های AL – ساده و AL - نیم ساده

استاد راهنما:

جناب آقای دکتر احمد خاکساری

استاد مشاور:

سرکار خانم دکتر محبوبه حسین یزدی

نگارنده:

سمیه کامجو

مرداد 89

دانشگاه پیام نور

بسمه تعالی

تصویب پایان‌نامه

پایان‌نامه تحت عنوان:

مدول‌های AL – ساده و AL - نیم ساده

که توسط **سمیه کامجو** در مرکز شیراز تهیه و به هیأت داوران ارائه گردیده است مورد تأیید می‌باشد.

تاریخ دفاع: 89/5/3 نمره 18/5 درجه ارزشیابی: عالی

اعضای هیأت داوران:

1- استاد راهنما: دکتر احمد خاکساری مرتبه علمی استاد یار ....امضاء...........

2- استاد مشاور: دکتر محبوبه حسین یزدی مرتبه علمی استاد یار ....امضاء.........

3- استاد داور: دکتر شمس الملوک خوش‌دل مرتبه علمی استاد یار ....امضاء........

4- نماینده تحصیلات تکمیلی: دکتر بهمن یوسفی مرتبه علمی استاد ....

تقدیم به:

پدر و مادر مهربان و همسر عزیزم

هدیه من به شما است همواره می‌کوشم تا باعث آسودگی خاطر نازنینتان باشم.

تقدیر و تشکر:

حمد و سپاس پروردگار مهربان را که به من قدرت خواندن و نوشتن و قرار گرفتن در این مسیر را عطا فرمود.

وظیفه خود می‌دانم از زحمات صادقانه استاد بزرگوارم جناب آقای دکتر احمد خاکساری به جهت زحمات و راهنمایی‌های دلسوزانه‌شان تشکر نمایم.

از زحمات پدر و مادر دلسوزم که همیشه و همه جا پشتیبانم بودند و از همسر مهربانم که با حضور دلگرم کننده‌اش در کنارم مرا یاری نمود تشکر می‌نمایم و سپاس قلبی خود را نسبت به زحمات بی دریغ و دلسوزانه استاد بزرگوار جناب آقای دکتر سعید صفائیان ابراز می‌نمایم.

قلم توتم من است ، توتم ماست ، به قلمم سوگند ، به خون سیاهی که از حلقومش می چکد سوگند ، به رشحه ی خونی که از زبانش می تراود سوگند ، به ضجه های دردی که از سینه اش بر می آید سوگند...

که توتم مقدسم را نمی فروشم ، نمی کشم ، گوشت و خونش را نمی خورم ، به دست زورش تسلیم نمی کنم ، به کیسه زرش نمی بخشم ، به سر انگشت تزویرش نمی سپارم

دستم را قلم می کنم و قلمم را از دست نمی گذارم ، چشم هایم را کور می کنم ، گوشهایم را کر می کنم ، پاهایم را می شکنم ، انگشتم را بند بند می برم ، سینه ام را می شکافم ، قلبم را می کشم ، حتی زبانم را می برم و لبم را می دوزم....

اما قلمم را به بیگانه نمی دهم

به جان او سوگند که جان را فدیه اش می کنم ، اسماعیلم را قربانیش می کنم ، به خون سیاه او سوگند که در غدیر خون سرخم غوطه می خورم ، به فرمان او ، هر جا مرا بخواند ، هر جا مرا براند، در طاعتش درنگ نمی کنم.

قلم توتم من است ، امانت روح القدس من است ، ودیعه مریم پاک من است ، صلیب مقدس من است ، در وفای او ، اسیر قیصر نمی شوم ، زرخرید یهود نمی شوم ، تسلیم فریسان نمی شوم.

بگذار بر قامت بلند و راستین و استوار قلمم به صلیبم کشند ، به چهار میخم کوبند ، تا او که استوانه حیاتم بوده است ، صلیب مرگم شود ، شاهد رسالتم گردد ، گواه شهادتم باشد تا خدا ببیند که به نامجویی ، بر قلمم بالا نرفته ام ، تا خلق بداند که به کامجویی بر سفره گوشت حرام توتمم ننشته ام...

......هر کسی را ، هر قبیله ای را توتمی است ؛ توتم من ، توتم قبیله من قلم است.

قلم زبان خدا است ، قلم امانت آدم است ، قلم ودیعه عشق است ، هر کسی توتمی دارد

و قلم توتم من است

و قلم توتم ما است.

«دکتر علی شریعتی»

چکیده

در این پایان‌نامه، کلاس مدولهای AL- ساده را مورد بررسی قرار می‌دهیم. این کلاس تمام مـدولهای درون-ساده را در بر می گیرد. همچنین کلاس تمام مدولهای AL- نـیم سـاده را مـورد بررسـی قـرار می‌دهیم که این کلاس نیز تمام مدولهای درون- نیم ساده را در بر می‌گیرد. این مدولها واقعیاتی را در مورد مدولهای اول قوی و نیم اول قوی مشخص می‌کند.

فهرست مطالب

مقدمه

در این پایان‌نامه، هر R – مدول M یک R – مدول چپ فرض شده‌است و همچنین فرض شـده کـه زیر مدول تشکیل شده توسط هر عنصر غیر صفر یک مدول، مدولی غیر صفر است یعنـی بـرای هـر $0 \neq m \in M$ داریم: $Rm \neq 0$.

این پایان نامه، در سه فصل، تنظیم شده است که در فصل اول این پایان‌نامه، مقدمه‌ای از تعاریف اولیه و موارد مورد نیاز در طول پایان‌نامه، بیان شده‌است. همچنین در ایـن فـصل، بـه تعریـف زیـر مـدول شبه‌پوچساز، اشاره‌شده‌است که این تعریف، اساس تعریـف مـدول AL- سـاده و AL-نـیم سـاده در فصل بعداست.

در فصل دوم این پایان‌نامه، ابتدا AL-بستار یک مدول را تعریف مـی‌کنـیم. سـپس تعریـف مـدولهای AL- ساده و AL-نیم ساده را بیان کرده و رابطهٔ آنها را بـا مـدولهای اول قـوی و مـدولهای نـیم اول قوی را مورد بررسی قرار می‌دهیم. همچنین رابطهٔ این مدولها را با مدولهای درون-ساده و درون-نـیم ساده بررسی می‌کنیم. همچنین در این فصل ثابت می‌کنیم که مـدولهای تـراکم‌پـذیر، مـدولهایی AL-ساده هستند و مثالی را در این فصل بیان می‌کنیم که رابطه بین مدولهای تراکم‌پـذیر، مـدولهای درون-ساده ،مدولهای اول قوی و مدولهای AL – ساده را بهتر مشخص می‌کند.

در پایان این فصل، به تبیین رابطه بین مدولهای AL-ساده و AL –نـیم سـاده و مـدولهای نـیم سـاده می‌پردازیم.

در فصل سوم این پایان‌نامه، حلقه‌های AL- ساده و AL-نیم ساده را معرفی کرده و نـشان مـی‌دهـیم روی یک حلقه جا بجایی، یک مدول درون-ساده است اگر و تنهـا اگـر AL- سـاده و PQ- انژکتیـو باشد.

در ضمن به تعریف حلقهٔ درون-ابتدایی می‌پردازیم و نشان می‌دهـیم هـر حلقـهٔ AL-سـاده، حلقـه‌ای درون- ابتدایی و در نتیجه اول است.

در ادامه رابطهٔ حلقه‌های AL-ساده را با حلقه‌های آرتینی و اول مورد بررسی قرار می‌دهیم و همچنین رابطهٔ حلقه‌های AL-نیم ساده رابا حلقه‌های آرتینی بررسی می‌کنیم.

در پایان این فصل، ثابت می‌کنیم که در حلقه‌های جابجایی، حلقـه‌هـایAL-سـاده ، درون-ابتـدایی و حوزهٔ صحیح همگی یکی هستند.

فصل اول:

مقدمات و مفاهیم اولیه

این فصل به بیان پیش نیازها می‌پردازد و در تنظیم آن سعی بر آن است که تمام تعاریف و قضایای ابتدایی لازم ذکر شوند.

تعریف 1.1.

حلقه:

هر حلقهٔ R مجموعه‌ای است همراه با عمل دوتایی $(+)$ و $(\cdot)$ که آنرا با نماد $(R,+,\cdot)$ نمایش می‌دهیم و دارای خواص زیراست:

1) R همراه با عمل $(+)$ یک گروه آبلی است.

2) عمل ضرب روی R خاصیت شرکت‌پذیری و روی جمع خاصیت پخش‌پذیری دارد یعنی:

$\forall x,y,z\in R:$

$i)\ x(yz)=(xy)z$

$ii)\ (y+z)x=yx+zx \quad , \quad x(y+z)=xy+xz$

اگر R یک حلقه بوده و برای هر $x,y\in R$ داشته باشیم $yx=xy$، آنگاه R را یک حلقهٔ جابجایی گوییم.

اگر R یک حلقه بوده و عضوی مانند $1\in R$ موجود باشد بطوریکه:

$\forall\ x\in R \quad : \quad 1.x=x.1=x$

آنگاه حلقهٔ R را یک حلقهٔ یکدار می‌گوییم.

تعریف 2.1.

مدول:

فرض کنیم R یک حلقه بوده و $(M,+)$ یک گروه آبلی باشد و $f:R\times M\to M$ یک تابع باشد (این تابع را ضرب اسکالر می‌نامیم و $f(r,m)$ را با نماد $r.m$ نشان می‌دهیم) در اینصورت، مجموعهٔ ناتهی M را یک $R-$ مدول چپ گوییم در صورتیکه:

1) برای هر $r\in R$ و $m_2\in M$ و m_1 داشته باشیم:

$r(m_1+m_2)=rm_1+rm_2$

2) به ازای هر $r_1,r_2\in R$ و $m\in M$ داشته باشیم:

$(r_1+r_2)m=r_1m+r_2m$

3) برای هر $r_1,r_2\in R$ و $m\in M$ داشته باشیم:

$r_1(r_2m)=(r_1r_2)m$

به طریق مشابه $R-$ مدول راست تعریف می‌شود.

تعریف 3.1.

زیر مدول:

زیرمجموعهٔ N از $R-$ مدول M را یک زیر مدول M گوییم در صورتیکه N خود با عملهای M یک $R-$ مدول باشد.

تذکر 4.1.

معیار زیر مدولها:

فرض کنیم R حلقه‌ای جابجایی و N زیرمجموعه‌ای از $R-$ مدول M باشد در اینصورت N، زیر مدولی از M است در صورتیکه شرایط زیر برقرار باشند:

1) $N \neq \varnothing$.

2) به ازای هر $n, n' \in N$ و هر $r \in R$ داشته باشیم:

$$rn \in N \quad , \quad n - n' \in N$$

تعریف 5.1.

زیر مدول N از $R-$ مدول M را متناهی مولد گوییم در صورتیکه توسط زیرمجموعه‌ای متناهی از N تولید شود.

یک $R-$ مدول را دوری می‌گوییم در صورتیکه توسط یک عضو تولید شود.

تعریف 6.1.

ایده‌آل یک حلقه:

فرض کنید R یک حلقه و I زیرمجموعهٔ ناتهی از R، باشد. در اینصورت I را ایده‌آل چپ R، گوییم در صورتیکه:

$$i) \forall \ a, b \in I \quad : \quad a - b \in I$$
$$ii) \forall \ a \in I, \forall r \in R \quad : \quad ra \in I$$

تعریف 7.1.

فرض کنیم P ایده‌آلی از حلقهٔ R باشد، P را ایده‌آل اول R می‌نامیم در صورتیکه:

i) $P \neq R$

ii) $\forall a, b \in R \quad , \quad ab \in P \;\Rightarrow\; a \in P$ یا $b \in P$

تعریف 8.1.

فرض کنیم M یک R– مدول باشد به ازای هر $m \in M$، پوچساز m را با نماد $ann_R(m)$ نمایش می‌دهیم و بصورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$ann_R(m) = \{r \in R \mid rm = 0\}$$

همچنین برای هر $r \in R$ داریم:

$$ann_M(r) = \{m \in M \mid rm = 0\}$$

$ann_R(m)$ ایده‌آلی چپ از حلقه R است و $ann_M(r)$ زیر مدولی از M است.

همچنین برای هر زیر مجموعهٔ A از مدول M، داریم:

$$ann_R(A) = \{r \in R \mid ra = 0 \quad , \quad \forall\; a \in A\} = \bigcap_{a_i \in A} ann(a_i)$$

به راحتی قابل بررسی است که اگر A زیرمجموعه‌ای از R– مدول M باشد، آنگاه $ann_R(A)$ ایده‌آل چپ حلقهٔ R است ولی اگر A زیر مدول M باشد، $ann_R(A)$ ایده‌آل دو طرفهٔ حلقهٔ R است.

مثال 9.1.

گروه آبلی $M = \mathbf{Z}_6 \oplus \mathbf{Z}_4$ با ضرب اسکالری که بطور طبیعی تعریف می‌شود، یک $\mathbf{Z}$– مدول است.

برای بردار $m = (\bar{3}, \bar{2}) \in M$ داریم:

$$ann_{\mathbf{Z}}((\bar{3}, \bar{2})) = \{0, \pm 2, \pm 4, \dots\} = 2\mathbf{Z}$$

و برای اسکالر $2 \in \mathbf{Z}$ داریم:

$$ann_M(2) = <\bar{3}> \oplus <\bar{2}>$$

تعریف 10.1.

زیر مدول E از مدول M را زیر مدول اساسی گوییم در صورتیکه به ازای هر زیر مدول غیر صفر $N \leq M$، داشته باشیم: $N \cap E \neq (0)$.

هرگاه E یک زیر مدول اساسی M باشد می‌نویسیم $E \leq_e M$ و M را یک توسیع اساسی E می‌نامیم.

تعریف 1. 11.

زیر مدول K از R– مدول M را یک زیر مدول شبه پوچساز[1] می‌نامیم، در صورتیکه برای هر $m \in M$ و هر $k \in K$، از $ann_R(k) \subseteq ann_R(m)$ بتوانیم نتیجه بگیریم $m \in K$.

این ویژگی بصورت زیر قابل بیان است:

$$\big(\forall\ r \in R \quad (r k = 0 \rightarrow r m = 0)\big) \Rightarrow\ m \in K$$

تعریف 1. 12.

مدول M را وفادار گوییم در صورتیکه: $ann_R(M) = 0$.

ایده‌آل I از حلقهٔ R را وفادار گوییم در صورتیکه: $ann_R(I) = 0$.

تعریف 13.1.

فرض کنیم N و M دو مدول روی حلقهٔ R باشند. تابع $f : M \rightarrow N$ را یک همریختی R–مدولی گوییم در صورتیکه:

1) برای هر $a, b \in M$ داشته باشیم:

$$f(a+b) = f(a) + f(b)$$

و

2) برای هر $r \in R$ و برای هر $a \in M$ داشته باشیم:

$$f(ra) = r f(a)$$

تعریف 14.1.

هرگاه $f : M \rightarrow M$ یک همریختی R– مدولی باشد، آن را یک درو نریختی روی M می‌نامیم.

---

[1]. Annihilator-Like

مجموعهٔ همهٔ درونریختی‌های روی M را با نماد $\mathrm{End}_R(M)$ نشان می‌دهیم که این مجموعه با عمل جمع و ترکیب توابع خود یک حلقه غیر جابجایی است.

تعریف 15.1.

فرض کنیم $f: M \to M$ یک درو نریختی باشد. زیر مدول $N \le M$ تحت f، پایدار گوییم در صورتیکه $f(N) \subseteq N$

زیر مدول N را کاملاً پایدار[1] می‌نامیم هر گاه برای هر درونریختی $f \in \mathrm{End}_R(M)$ داشته باشیم $f(N) \subseteq N$. واضح است که (0) و M زیر مدولهای کاملاً پایدار M هستند.

تعریف 16.1.

R - مدول M را PQ - انژکتیو[2] گوییم در صورتیکه برای هر $m \in M$، هر همریختی R مدولی مانند $g: \langle m \rangle \to M$ را بتوان به یک درو نریختی $f: M \to M$ توسیع داد.

مثال 17.1.

مجموعهٔ اعداد گویا یعنی Q به عنوان $\mathbf{Z}$- مدول، PQ - انژکتیو است.

زیرا برای هر $0 \neq q \in Q$ و هر همریختی $g: \langle q \rangle \to Q$ می‌توانیم درو نریختی Z- مدولیِ $f: Q \to Q$ را بصورت زیر تعریف کنیم:

$$f: Q \to Q$$
$$f(x) := \frac{x}{q}\, g(x)$$

در اینصورت ثابت می‌کنیم f توسیعی از g است زیرا:

$$\forall\ x \in \langle q \rangle \ :\ x = nq$$

پس

$$\forall\ x \in \langle q \rangle \ :\ f(x) = f(nq) = \frac{nq}{q} g(q)$$
$$= ng(q) = g(nq) = g(x)$$

پس تحدید f به $\langle q \rangle$ می‌شود g.

---

[1] . Fully Invariant

[2] . Principally Quasi-Injective Modules

در حالت $q=0$ واضح است که f می‌تواند همریختی ثابت صفر اختیار شود.

تعریف 18.1.

فرض کنیم M یک $R-$ مدول و $\{M_i\}_{i\in I}$ خانواده‌ای از زیر مدولهای M باشند. اگر I ناتهی باشد مجموعهٔ $\sum_{i\in I} M_i$ را بصورت

$$\sum_{i\in I} M_i = \left\{ \sum_{k=1}^{n} x_{i_k} \quad : \quad n\geq 1 \quad , \quad i_k \in I \quad , \quad x_{i_k}\in M_{i_k} \right\}$$

تعریف می‌کنیم و اگر I تهی باشد قرار می‌دهیم:

$$\sum_{i\in I} M_i = 0$$

بوضوح $\sum_{i\in I} M_i$ زیر مدولی از M است و $\sum_{i\in I} M_i$ را مجموع زیر مدولهای خانوادهٔ $\{M_i\}_{i\in I}$ می‌نامیم همچنین داریم:

$$M_1 + M_2 + \ldots + M_n = \{x_1 + x_2 + \ldots + x_n \,|\, x_i \in M_i\}$$

لازم به ذکر است که اگر $\{M_i\}_{i\in I}$ خانواده‌ای مستقل از زیر مدولهای M باشند (یعنی برای هر $n\geq 1$ و هر $x_{i_k}\in M_{i_k}$ از $\sum_{k=1}^{n} x_{i_k} = 0$ نتیجه شود برای هر $1\leq k\leq n$، $x_{i_k}=0$.) یا بطور معادل اگر برای هر i، $M_i \cap \sum_{i\neq j} M_j = 0$ باشد یا بطور معادل، هر عضو $\sum_{i\in I} M_i$ نمایش منحصر به فردی بر حسب مجموعی متناهی از M_i ها داشته باشد. آنگاه $\sum_{i\in I} M_i$ را با نماد $\oplus_{i\in I} M_i$ نمایش می‌دهیم و به آن مجموع مستقیم می‌گوییم.

تعریف 19.1.

$R-$ مدول M را ساده گوییم در صورتیکه هیچ زیر مدول غیر بدیهی نداشته باشد واضح است که در هر مدول ساده، هر عضو غیر صفر آن، مولّد مدول می‌شود.

تعریف 20.1.

زیر مدول M_1، از $R-$ مدول M را جمعوند مستقیم M گوییم، در صورتیکه زیر مدولی از M، مانند M_2 موجود باشد بطوریکه $M = M_1 \oplus M_2$.

که این معادل است با اینکه:

$$M = M_1 + M_2 \quad , \quad M_1 \cap M_2 = \{0\}$$

به عنوان مثال اگر $\mathbf{Z}_2$، $\mathbf{Z}_3$ و $\mathbf{Z}_6$ را به عنوان $\mathbf{Z}-$ مدول در نظر بگیریم داریم: $\mathbf{Z}_6 \cong \mathbf{Z}_2 \oplus \mathbf{Z}_3$

تعریف 21.1.

اگر M یک $R-$ مدول باشد، $SOC(M)$ مجموع تمام زیر مدولهای مینیمال M است. به عبارت دیگر:

$$SOC(M) = \sum\{K \leq M \mid \text{در } M \text{ مینیمال است } K\}$$

تعریف 22.1.

$R-$ مدول M را نیم ساده گوییم در صورتیکه هر زیر مدول M، یک جمعوند مستقیم آن باشد.

لم 23.1.

هر زیر مدول یک مدول نیم ساده، مدولی نیم ساده است.

اثبات:

فرض کنیم M، مدولی نیم ساده و N، زیر مدولی از M باشد همچنین فرض کنیم K، زیر مدولی از N باشد لزوماً K، زیر مدولی از M هم می‌شود و چون M نیم ساده است زیر مدولی از آن مانند K' یافت می‌شود که:

$M = K \oplus K'$

و داریم:

$N = N \cap M = N \cap (K \oplus K') = K \oplus (N \cap K')$

هم اکنون با فرض آنکه $P = N \cap K'$ باشد خواهیم داشت: $N = K \oplus P$. پس N نیم ساده است..

لم 24.1.

هر مدول نیم ساده، شامل یک زیر مدول ساده است.

اثبات:

فرض کنیم $M \neq \mathbf{0}$ مدولی نیم ساده باشد. چون $M \neq \mathbf{0}$ است، عضوی غیر صفر مانند x در M موجود است. چون Rx، زیر مدول غیر صفر و دوری M است، شامل یک زیر مدول ماکسیمال مانند N می‌شود. از طرفی Rx زیر مدول M است، لذا طبق لم (23.1) نیم ساده است و در نتیجه

N یـک جمعونـد مـستقیم آن اسـت یعنـی زیـر مـدول N' از Rx موجـود اسـت بطوریکـه: $Rx = N \oplus N'$.

از طرفی داریم:

$$\frac{Rx}{N} \cong \frac{N \oplus N'}{N} \Rightarrow N' \cong \frac{Rx}{N}$$

و چون N در Rx ماکسیمال است لذا $\frac{Rx}{N}$، یا N'، ساده است پس M، شامل زیر مـدول سـاده‌ای مانند N' می‌شود.

قضیه 25.1.

فرض کنیم K یک $R-$ مدول باشد در اینصورت احکام زیر معادلند:

1) K مجموعی از زیر مدولهای ساده است.

2) K مجموع مستقیمی از زیر مدولهای ساده است.

3) برای هر $0 \neq k \in K$، داریم: $Rk \neq (0)$ و همچنین K مدولی نیم ساده است.

اثبات $1 \to 2$:

فرض کنیم $K = \sum_{i \in I} B_i$ و B_i ها زیر مدولهای سادهٔ M باشند و فرض کنیم A مجموعـهٔ تمـام زیـر مجموعه‌هایی از I مانند J باشند به طوری که به ازای آن‌ها داریم:

$$\sum_{i \in J} B_i = \bigoplus_{i \in J} B_i$$

خانوادهٔ A را با رابطه شمول مرتب می‌کنیم $(A, \subseteq)$ مجموعه‌ای جزئاً مرتب است.

اگر $J_1 \subseteq J_2 \subseteq \ldots$ یک زنجیر در A باشد، $J = \bigcup J_i$ کران بالای آن است، لذا بنابر لم زرن:

خانوادهٔ A دارای یک عضو ماکسیمال است پس زیر مجموعه‌ای از I مانند J موجود است بـه طـوری که در بین اعضای A ماکسیمال است و به ازای آن داریم:

$$\sum_{i \in J} B_i = \bigoplus_{i \in J} B_i$$

ادعا می‌کنیم $K = \bigoplus_{i \in J} B_i$.

می‌دانیم $K = \sum_{i \in I} B_i$ لذا برای اثبات این ادعا کافیست ثابت کنیم برای هر B_t، که $t \in I$ است داریـم: $B_t \subseteq \sum_{i \in J} B_i$.

B_t یک زیر مدول ساده M است و زیر مدول نابدیهی ندارد حال $B_t \cap \sum_{i \in J} B_i$ یـک زیـر مـدول B_t است پس یا باید صفر باشد و یا با B_t برابر باشد.

اگر $B_t \cap \sum_{i\in J} B_i = <0>$، آن‌گاه می‌توان با افزودن اندیس t به مجموعه اندیس‌های J، مجموعه بزرگتر $J^* = J \cup \{t\}$ را به دست آورد که به ازای آن:

$$\sum_{i\in J^*} B_i = B_t + \sum_{i\in J} B_i = \bigoplus_{i\in J^*} B_i$$

اما این با ماکسیمال بودن J، تناقض دارد پس:

$$B_t \cap \sum_{i\in J} B_i = B_t \qquad (\forall t \in I)$$

پس:

$$B_t \subseteq \sum_{i\in J} B_i \qquad (\forall t \in I)$$

و در نتیجه $K = \bigoplus_{i\in J} B_i$.

اثبات $3 \to 2$:

فرض کنیم $K = \bigoplus_{i\in I} B_i$ و هر B_i یک زیر مدول ساده باشد.

اگر $0 \neq k \in K$ آن‌گاه:

$$\exists i_1, i_2, \ldots, i_t \in I \quad s.t \quad k = b_{i_1} + b_{i_2} + \ldots + b_{i_t}$$

از طرفی $k \neq 0$ است و $k \in \bigoplus_{i\in I} B_i$ ، پس اندیس m، به گونه‌ای موجود است که $0 \neq b_{i_m} \in B_{i_m}$.

از آن‌جا که B_{i_m} مدولی ساده است و $0 \neq b_{i_m} \in B_{i_m}$ لذا $Rb_{i_m} = B_{i_m} \neq 0$.

و در نتیجه $Rk \neq (0)$.

حال بایستی ثابت کنیم K نیم ساده است. لذا کافیست ثابت کنیم هر زیر مدول K، جمعونـد مـستقیم آن است.

فرض کنیم $0 \neq B \leq K$ و طبق فرض داریم: $K = \bigoplus_{i\in I} B_i$. چون B_iها ساده هستند لذا برای هـر $i \in I$ داریم:

$B \cap B_i = B_i$ یا $B \cap B_i = (0)$

اگـر بـرای هـر $i \in I$، داشــته باشـیم $B \cap B_i = B_i$، پـس بـرای هـر $i \in I$، $B_i \subseteq B$ و در اینـصورت $K = B \oplus <0>$ و حکم ثابت است.

حال اگر برای برخی مقادیر $i \in I$ داشته باشیم، $B \cap B_i = (0)$، با استفاده مجدد از لـم زرن مـی‌تـوان مجموعه‌ای از اندیس‌ها مانند $J \subseteq I$ را یافت که نـسبت بـه خاصـیت $B \cap \left(\bigoplus_{i\in J} B_i\right) = (0)$ ماکـسیمال باشد.

ادعا می‌کنیم که $K = B \oplus \left(\bigoplus_{i\in J} B_i\right)$.

(از قبل می‌دانیم $K=\underset{i\in I}{\oplus}B_i$) از آن‌جا که B و $\underset{i\in J}{\oplus}B_i$ فقط در صفر اشتراک دارند کافیست نشان دهیم مجموع آن‌ها K را می‌سازد.

بدین منظور ثابت می‌کنیم به ازای هر $i\in I$ داریم:

$$B_i \subseteq B\oplus\left(\underset{i\in J}{\oplus}B_i\right)$$

اگر $i\in J$ باشد که به طور واضح $B_i \subseteq B\oplus\left(\underset{i\in J}{\oplus}B_i\right)$.

ثابت می‌کنیم اگر $i\notin J$ باز هم $B_i \subseteq B\oplus\left(\underset{i\in J}{\oplus}B_i\right)$.

برهان خلف:

فرض کنیم $i\notin J$ و $B_i \not\subset B\oplus\left(\underset{i\in J}{\oplus}B_i\right)$.

با توجه به این که B_i زیر مدولی ساده است، بایستی داشته باشیم:

$$B_i \cap \left(B\oplus\left(\underset{i\in J}{\oplus}B_i\right)\right)=(0)$$

که در اینصورت با اضافه کردن اندیس i، به مجموعه J، مجموعه بزرگتر $J^*=J\cup\{i\}$ حاصل می‌شود که خاصیت J را دارد و این با ماکسیمال بودن J در تناقض است.

پس:

$$\forall i\in I \qquad B_i \subset B\oplus\left(\underset{i\in J}{\oplus}B_i\right)$$

لذا با انتخاب $B'=\underset{i\in J}{\oplus}B_i$ داریم: $K=B\oplus B'$.

اثبات $1\rightarrow 3$:

فرض کنیم $\{K_i\}_{i\in I}$ خانوادهٔ تمام زیر مدول‌های ساده غیر صفر K باشند. (طبق لم (1. 24) این خانواده ناتهی است). N را بصورت $N=\sum_{i\in I}K_i$ تعریف می‌کنیم. چون N زیر مدولی از K است و K نیم ساده است لذا N جمعوند مستقیمی از K است لذا زیر مدول N' از K موجود است به طوریکه $K=N\oplus N'$.

اگر $N'\neq 0$، آنگاه با توجه به اینکه N' زیر مدولی از N است لذا N' نیز نیم ساده است لذا N' شامل زیر مدولی ساده می‌شود (طبق لم (1. 24)). پس عضوی از I مانند j موجود است به طوریکه $K_j\leq N'$.

پس $K_j\subseteq N\cap N'=(0)$، پس $K_j=0$ که این تناقض است پس لزوماً $N'=0$ بوده و این نتیجه می‌دهد $K=N$ و بنابراین $K=\sum_{i\in I}K_i$. پس K مجموعی از زیرمدول‌های ساده خود است.