بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه اصفهان

دانشکده علوم

گروه ریاضی

پایان نامه ی کارشناسی ارشد رشته ی ریاضی محض گرایش آنالیز

فشردگی ضعیف نسبی مدارهای جبرهای باناخ متناظر با گروههای موضعاًفشرده

استاد راهنما:

دکتر محمود لشکری زاده بمی

پژوهشگر:

فاطمه مقدسی

شهریور ماه ۱۳۸۸

شیوه نگارش پایان نامه رعایت شده است.
تحصیلات تکمیلی دانشگاه اصفهان

بسمه تعالی

دانشگاه اصفهان

دانشکده علوم

گروه ریاضی

پایان نامه کارشناسی ارشد رشته ریاضی محض گرایش آنالیز خانم فاطمه مقدسی

تحت عنوان:

فشردگی ضعیف نسبی مدارهای جبر باناخ متناظر با گروههای موضعاً فشرده

در تاریخ ...۸۸/۶/۳۱..... توسط هیأت داوران زیر بررسی و با درجه ..بسیار خوب.... به تصویب نهایی رسید.

۱- استاد راهنمای پایان نامه	دکتر محمود لشکری زاده	با مرتبه علمی استاد	امضاء
۲- استاد داور داخل گروه	دکتر علی رجالی	با مرتبه علمی استاد	امضاء
۳- استاد داور خارج گروه	دکتر روح ا.. جهانی پور	با مرتبه علمی استادیار	امضاء

مهر و امضای مدیر گروه ....

نیست بر لوح دلم جز الف قامت یار   چه کنم حرف دگر یاد نداد استادم

حمد بی حد خدای بی همتارا که به ما نعمت بیان ارزانی داشت و با قلم قدرت خویش جامعه بشریت را به زیور علم و دانش آراست و انسانیت را زیر لوای فرهنگ و معارف تعالی بخشید.

بر خود لازم می دانم که از پدر و مادر عزیزم تشکر کنم که با صبر و شکیبایی و حمایت همه جانبه در تمام مراحل زندگیم یاریگر من بوده اند.

این مجموعه را مرهون راهنمایی و زحمات استاد ارجمندم جناب آقای دکتر محمود لشکری زاده بمی می دانم و از ایشان صادقانه سپاسگزاری می کنم. از استاد محترم جناب آقای دکتر روح الله جهانی پور که مرا در ترجمه مراجع فرانسه یاری نموده اند صمیمانه تشکر و قدردانی می کنم. همچنین از کلیه اساتید گرانقدری که در طول دوران تحصیل در مقاطع مختلف از محضر گرانبهاشان فیض بردم و افتخار شاگردیشان را داشته ام خالصانه سپاسگزاری می کنم.

در پایان از زحمات سرکار خانم ها گرامی، غازی، فرهمند و معمار که مرا در تدوین این پایان نامه یاری نموده اند تشکر می کنم.

تقدیم به:

پدرم

که نصایحش روشنایی بخش راهم بود

و مادرم

که صفا و صمیمیتش درس فداکاری به من آموخت

و برادرانم

که با گذشت های خود به من درس ایثار آموختند

و تقدیم به تمام کسانی که دوستشان دارم...

چکیده

فرض کنید G یک گروه آبلی موضعاً فشرده است. مجموعه همه مشخصه های پیوسته روی گروه G را گروه دوگان G می نامیم و با نماد Γ نشان می دهیم. در این پایان نامه حالت های متفاوتی از فشردگی ضعیف نسبی در فضاهای باناخ را مورد بررسی قرار می دهیم و ثابت می کنیم که اگر μ یک اندازه پیوسته روی گروه آبلی موضعاً فشرده G و $f \in L^{\infty}(\mu)$ باشد، آن گاه $\{\Upsilon f: \ \Upsilon \in \Gamma\}$فشرده ضعیف نسبی نیست. همچنین ثابت می کنیم که اگر G یک گروه آبلی گسسته و $f \in L^{\infty}(\mu)\backslash C_0(G)$ در صورتی که $E \subset \Gamma$ دارای درون غیر تهی باشد، آن گاه $\{\Upsilon f: \ \Upsilon \in \Gamma\}$ فشرده ضعیف نسبی نیست. این مطلب را با استفاده از قضیه وجود I_0- مجموعه ها اثبات می کنیم. به علاوه نشان می دهیم که اگر G یک گروه آبلی باشد، آن گاه $B(G) \subset WAP(G)$است.

واژه های کلیدی

I_0- مجموعه، تابع تقریباً متناوب ضعیف، L_p- ضربگر، تابع تقریباً متناوب

فهرست مطالب

مقدمه

فرض کنید G یک گروه آبلی موضعاً فشرده است. مجموعه همه توابع پیوسته کراندار روی G را با $CB(G)$ و فضای همه‌ی اندازهای برل منظم کراندار روی G را با $M(G)$ نشان می‌دهیم. تبدیل فوریه اشتیلیتس اندازه μ را با نماد $\hat{\mu}$ نمایش داده می‌شود.

آنچه را که می‌توان انگیزه اصلی نگارش مطالب این پایان نامه ذکر کرد، بیان نتایج گسترده در مورد توابع تقریباً متناوب یا توابع تقریباً متناوب ضعیف است، یعنی توابعی مانند $f \in CB(G)$ که مدارهای آنها $O^{(*)}(f) = \{\delta_x * f \ \ x \in G\}$ به ترتیب فشرده نرم یا فشرده ضعیف هستند.

در این پایان نامه فشردگی ضعیف نسبی مدار $O^{(*)}(f) = \{\delta_x * f \ \ x \in G\}$ را در حالت های مختلف بررسی می‌کنیم. مثلاً به جای $CB(G)$ از دیگر فضاها ی باناخ استفاده می‌کنیم یا به جای انتقال عناصر فضا بوسیله‌ی $x \in G$ ضرب عناصر Γ را مورد بررسی قرار می دهیم. در مرجع شماره[۲۹] می‌توان نتایج گسترده ای را در رابطه با مطالب بالا یافت.

نمادهایی که در اینجا به کار می‌بریم به صورت زیر است:

$$O^{(\times)}(S) = \{\gamma . S \ : \gamma \in \Gamma\}$$

$$O^{(*)}(S) = \{L_g S \ : g \in G\}$$

که در آن $L_g S$ انتقال چپ S بوسیله ی g است که در آن S ممکن است یک تابع یا

یک اندازه یا یک عنصر از فضایی که روی G تعریف شده و تحت انتقال چپ پایاست، باشد. حال اگر Λ (متناظراً E) زیر مجموعه ای از Γ(متناظراً G) تعریف کنیم :

$$O_{\Lambda}^{(\times)}(S) = \{\gamma.S \ : \ \gamma \in \Lambda\}$$

$$O_{E}^{(*)}(S) = \{L_g S \ : \ g \in E\}$$

در تمامی موارد بالا این پرسش را مطرح می‌کنیم که آیا مجموعه‌ی تحدید انتقال‌های عناصر یعنی $O_{\Lambda}^{(\times)}(S)$ و $O_{E}^{(*)}(S)$ نسبت به توپولوژی ضعیف یا هر توپولوژی که روی فضا تعریف شده فشرده نسبی هست یا خیر. نتایج مشابهی را برای گروه های غیر آبلی بیان می‌کنیم. این پایان نامه شامل سه فصل است :

فصل اول به بیان تعاریف و قضایای مقدماتی می‌پردازد.

در فصل دوم با فرض این که G یک گروه آبلی گسسته با گروه دوگان Γ است به طوری که G شامل یک مجموعه‌ی نامتناهی H باشد، نشان می‌دهیم که یک زیر مجموعه نامتناهی $H' \subseteq H$ و عدد صحیح مانند $q \geq ۲$ چنان موجود است به‌طوری که برای هر همسایگی باز U از همانی در Γ و هر $\epsilon > ۰$ یک زیر مجموعه‌ی متناهی $F \subset H'$ وجود دارد به طوری که برای هر تابع مختلط مقدار $\Phi : H' \longrightarrow C$ که روی H'

$$\Phi^q \equiv ۱$$

است، $x \in U$ موجود است به طوری که

$$|\prec x, \lambda \succ - \Phi(\lambda)| \leq \epsilon \quad (\lambda \in H' \backslash F)$$

عدد q لزوما مرتبه Γ نیست بلکه می تواند عامل اولی از مرتبه Γ باشد. سپس مدار $O^{\times}(f) = \{\gamma f \ : \ \gamma \in \Gamma\} \subset L^{\infty}(\mu)$ را در نظر می‌گیریم. ثابت می‌کنیم که $O^{(\times)}(f)$ نسبت به توپولوژی $\sigma(L^{\infty}(\mu), L^{\infty}(\mu)^*)$ فشرده ضعیف است تنها اگر $f = \circ$ یا اندازه μ گسسته باشد. همچنین ثابت می‌کنیم که اگر $f \in L^{\infty}(G)\backslash C_{\circ}(G)$، $\Lambda \subset \Gamma$ و $int\Lambda \neq \varnothing$ باشد، آن‌گاه $O^{(\times)}(f) = \{\gamma f \ : \ \gamma \in \Gamma\}$ فشرده ضعیف نسبی نیست.

اثبات نتیجه بالا با استفاده از قضیه‌ی درونیابی $I_{\circ}$ —مجموعه‌ها یا همان نتیجه ۱ میسر می‌گردد.

در ادامه برهان جدیدی برای این مطلب که تبدیلات فوریه—اشتیلیتس تقریباً متناوب ضعیف هستند، ارائه می‌دهیم.

در فصل سوم مدارهایی که از عناصر $A_p(G)$ و L_p —ضربگرها و همچنین عناصر $L^{1}(G)$ و $C_{\circ}(G)$ حاصل می‌شوند را بررسی می‌کنیم.

فصل ۱

مفاهیم اولیه

در این فصل برخی تعاریف و قضایایی که در اثبات قضایای فصل های بعدی به‌کار می‌رود، بیان شده‌اند. با توجه به این که اثبات بسیاری از این قضایا در کتب مربوطه آمده‌است، تنها به ذکر منابع اکتفا می‌گردد .

تعریف ۱.۱ .فرض کنید X یک فضای برداری روی میدان F است. یک نیم نرم تابعی است مانند $p : X \longrightarrow [0, \infty)$ که دارای ویژگی های زیر است:

الف) برای هر x و y در X، $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$؛

ب) برای هر x در X و هر α در F، $p(\alpha x) = |\alpha| p(x)$؛

از (ب) نتیجه می‌شود $p(0) = 0$؛

یک نرم نیم نرمی است که

پ)اگر $p(x) = 0$ باشد، آن‌گاه $x = 0$ است.

معمولاً نرم را با نماد $\|\ .\ \|$ نشان می‌دهیم.

تذکر ۲.۱ .اگر X یک فضای نرمدار باشد، آن‌گاه $d(x, y) = \|x - y\|$ یک متر روی X تعریف می‌کند.

تعریف ۳.۱ .یک فضای نرمدار زوج $(X, \|\ .\ \|)$ است، که در آن X یک فضای برداری است و $\|\ .\ \|$ یک نرم روی X است. یک فضای باناخ یک فضای نرمد ار است که نسبت به متر تعریف شده متناظر نرمش کامل است.

تعریف ۴.۱ .یک جبر A یک فضای برداری با یک نگاشت دو خطی

$$A^2 \longrightarrow A, \quad (a, b) \longmapsto ab$$

است به طوری که

$$a(bc) = (ab)c \quad (a, b, c \in A)$$

تعریف ۵.۱ .یک زیر فضای برداری B از A را یک زیر جبر می‌گوییم هرگاه $b, b' \in B \Longrightarrow bb' \in B$؛ در واقع هرگاه B با ضرب القایی A خود یک جبر باشد.

تعریف ۶.۱ .یک نرم روی جبر A را می‌گوییم دارای خاصیت زیر ضربی است، هرگاه

$$\|ab\| \leq \|a\|\|b\| \quad (a.b \in A)$$

باشد. جبر A را که دارای نرم زیر ضربی است، یک جبر نرمدار می‌گوییم.

تذکر ۷.۱ .اگر A دارای عنصر همانی ۱ باشد، یعنی $a = ۱a = a۱$ برای همه $a \in A$ و $\|۱\| = ۱$، آن‌گاه A را یک جبر نرمدار یکدار می‌گوییم.

تعریف ۸.۱ .یک جبر نرمدار کامل را جبر باناخ می‌نامیم؛ یک جبر نرمدار یکدار کامل را جبر باناخ یکدار می‌گوییم.

تعریف ۹.۱ .منظور از یک مشخصه روی جبر آبلی A همریختی غیر صفر $\tau : A \longrightarrow \mathbb{C}$ است. مجموعهٔ همه مشخصه های روی جبر A را با $\Omega(A)$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۱۰.۱ .فرض کنید A یک جبر باناخ آبلی است به طوری که $\Omega(A)$ مخالف تهی باشد، نگاشت $\hat{a}$ را به صورت

$$\hat{a} : \Omega(A) \longrightarrow \mathbb{C}, \quad \tau \longrightarrow \tau(a)$$

تعریف می‌کنیم.

قضیه ۱۱.۱ .فرض کنید A یک جبر باناخ آبلی یکدار است. در این صورت شرایط زیر برقرار هستند:

(۱) اگر $\tau \in \Omega(A)$، آن‌گاه $\|\tau\| = ۱$ است.

(۲) مجموعه $\Omega(A)$ غیر تهی است و نگاشت $\tau \longrightarrow ker(\tau)$ یک دو سویی از $\Omega(A)$ به مجموعهٔ

همه ایده‌آل‌های ماکسیمال جبر A است.

اثبات . رجوع شود به [۳۵] □

قضیه ۱۲.۱ .$(Gelfand\ \ Representation)$ فرض کنید A یک جبر باناخ آبلی است و $\Omega(A)$ ناتهی است. در این صورت نگاشت

$$A \longrightarrow C_{\circ}(\Omega(A))\ ,\ a \longrightarrow \hat{a}$$

یک همریختی کاهنده نرم و

$$r(a) = \|\hat{a}\|_{\infty} \quad (a \in A)$$

است که در آن $r(a)$ را به صورت

$$r(a) = \sup\{|\lambda| : \lambda - \text{۱}a \text{ وارون پذیر نیست} \}$$

تعریف می کنیم.

اثبات . رجوع کنید به [۳۵].□

تعریف ۱۳.۱ .یک فضای برداری توپولوژیک (TVS) یک فضای برداری X همراه با توپولوژی است که نسبت به آن توپولوژی

الف)نگاشت $X \times X \longrightarrow X$ که به صورت $(x,y) \longmapsto x+y$ تعریف می شود، پیوسته است؛

ب)نگاشت $F \times X \longrightarrow X$ که به صورت $(\alpha,x) \longmapsto \alpha x$ تعریف می شود، پیوسته است.

تعریف ۱۴.۱ .فضای برداری موضعاً محدب (LCS) یک فضای برداری توپولوژیکی (TVS) است که توپولوژی روی آن بوسیله خانواده P از نیم نرم ها دارای ویژگی $\bigcap_{p\in P}\{x:\ p(x)=\circ\}=\{\circ\}$ است، تولید می‌شود.

تعریف ۱۵.۱ .اگر X یک فضای نرمدار باشد، فضای همه تابعک های خطی کراندار روی X را با X^* نشان می‌دهیم.

تعریف ۱۶.۱ .فرض کنید X یک فضای نرمداراست، برای هر x^* در X^* تعریف می‌کنیم $p_{x^*}(x) = \|x^*(x)\|$، در این صورت P_{x^*} یک نیم نرم است؛ اگر $P = \{p_{x^*} : \ x^* \in X^*\}$ را در نظر بگیریم، آن‌گاه خانواده P، X را به یک فضای برداری موضعاً محدب (LCS) تبدیل می‌کند. توپولوژی تعریف شده روی X با استفاده از نیم نرم ها را توپولوژی ضعیف می‌نامیم و معمولاً آن را با نماد $\sigma(X, X^*)$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۱۷.۱ .فرض کنید X یک فضای نرمد ار است، برای هر x در X $p_x : X^* \longrightarrow [0, +\infty)$ را به صورت $p_x(x^*) = \|x^*(x)\|$ تعریف می‌کنیم در این صورت p_x یک نیم نرم است و خانوادهٔ $P = \{p_x : \ x \in X\}$، X^* را به یک فضای برداری موضعاً محدب (LCS) تبدیل می‌کند. توپولوژی تعریف شده به وسیله خانواده نیم نرم ها را توپولوژی ضعیف ستاره روی X^* می‌نامیم و آن را معمولاً با نماد $\sigma(X^*, X)$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۱۸.۱ .یک نیم گروه زوج $(S, .)$ است که در آن S یک مجموعه غیر تهی و $(.)$ یک عمل دو تایی شرکتپذیر است یعنی:

$$(s, t) \longrightarrow s.t \ : S \times S \longrightarrow S$$

$$r.(s.t) = (r.s).t \quad (r, s, t \in S)$$

تعریف ۱۹.۱ .برای هر عضو t از نیم گروه S نگاشت‌های $\rho_t : S \longrightarrow S$ و $\lambda_t : S \longrightarrow S$ را به صورت

$$\rho_t(s) = st \quad \lambda_t(s) = ts \quad (s \in S)$$

تعریف می‌کنیم.

تعریف ۲۰.۱ .فضای همه توابع پیوسته، کراندار و مختلط مقدار روی فضای توپولوژیکی S را با $C(S)$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۲۱.۱ .فرض کنید S یک نیم گروه و یک فضای توپولوژیکی باشد S را

الف) نیم گروه توپولوژیکی راست می‌نامیم هر گاه $\rho_s : S \longrightarrow S$ برای هر $s \in S$ پیوسته باشد؛

ب) نیم گروه نیم توپولوژیک می‌نامیم هر گاه $\rho_s : S \longrightarrow S$ و $\lambda_s : S \longrightarrow S$ برای هر $s \in S$ پیوسته باشند.(یعنی ضرب $S \times S \longrightarrow S \ : st \longrightarrow (s,t)$ به طور مجزا پیوسته باشد؛)

پ) نیم گروه توپولوژیکی می‌گوییم هر گاه ضرب $S \times S \longrightarrow S \ : st \longrightarrow (s,t)$ به طور همزمان پیوسته باشد؛

ت) یک گروه توپولوژیکی راست می‌گوییم هر گاه S یک گروه و یک نیم گروه راست توپولوژیکی باشد؛

ث) یک گروه نیم توپولوژیکی می‌گوییم هر گاه S یک گروه و یک نیم گروه نیم توپولوژیکی باشد؛

ج) یک گروه توپولوژیکی می‌گوییم هر گاه S یک گروه و یک گروه نیم توپولوژیکی باشد و نگاشت وارون $S \longrightarrow S \ : s^{-1} \longrightarrow s$ پیوسته باشد.

تعریف ۲۲.۱ .فرض کنید S یک نیم گروه نیم توپولوژیک باشد. تابع $f \in C(S)$ را یک تابع تقریباً متناوب می‌گوییم، اگر مجموعه $R_s f$ انتقال های راست f فشرده نرم نسبی در $C(S)$ باشد؛ مجموعه همه توابع تقریباً متناوب روی S را با $AP(S)$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۲۳.۱ .فرض کنید S یک نیم گروه نیم توپولوژیک باشد تابع $f \in C(S)$ را یک تابع تقریباً متناوب ضعیف می‌گوییم، اگر مجموعه $R_s f$ انتقال های راست f فشرده ضعیف نسبی در $C(S)$ باشد؛ مجموعه همه توابع تقریباً متناوب ضعیف روی S را با $WAP(S)$ نشان می‌دهیم.

تذکر ۲۴.۱ .در این پایان نامه از این جا به بعد منظورمان از G یک گروه‌آبلی موضعاً فشرده است مگر اینکه خلاف آن ذکر شود. در ریاضیات گروه حلقوی را که با نماد $\mathbb{T}$ نشان می دهیم، گروه ضربی از همه اعداد مختلط با قدر مطلق یک است. این گروه همان دایره یکه در صفحه اعداد مختلط است که به صورت

$$\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} \ : \ |z| = ۱\}$$

نشان می دهیم.

تذکر ۲۵.۱ .یک مشخصه از گروه G یک همریختی از G به گروه $\mathbb{T}$ است. مجموعه‌ی همه مشخصه های پیوسته گروه G تشکیل یک گروه به نام Γ را می‌دهد و آن را گروه دوگان G می‌نامیم. فرض کنید $x_۱, x_۲ \in G$ و $\gamma \in \Gamma$ است. منظور از همریختی تساوی

$$\prec x_۱ + x_۲, \gamma \succ = \prec x_۱, \gamma \succ \prec x_۲, \gamma \succ$$

است.

تعریف ۲۶.۱ .عمل جمع زیر Γ را به یک گروه تبدیل می‌کند.

$$(\gamma_1 + \gamma_2) = \gamma_1\gamma_2 \quad (x \in G;\ \gamma_1\ , \gamma_2 \in \Gamma)$$

تذکر ۲۷.۱ .با توجه به قضیه دو گانگی بین G و Γ برای نشان دادن مقدار γ در نقطه x به جای $\gamma(x)$ از نماد $\prec x, \gamma \succ$ استفاده می‌کنیم.

مثال ۲۸.۱ .اگر $G = \mathbb{Z}$ باشد، آن گاه گروه دوگان آنΓ، گروه ضربی $\mathbb{T}$، زیر مجموعه اعداد مختلط با قدرمطلق یک است.

اثبات . به صفحهٔ ۳۶۶ مرجع [۲۲] مراجعه کنید.

مثال ۲۹.۱ .اگر $G = \mathbb{T}$ باشد، آن‌گاه گروه دوگان آن Γ، گروه جمعی اعداد صحیح $\mathbb{Z}$ است.

اثبات . به صفحه ۳۶۶ مرجع [۲۲] مراجعه کنید.

مثال ۳۰.۱ .اگر $G = \mathbb{R}$ باشد، آن‌گاه گروه دوگان آن Γ، گروه جمعی اعداد حقیقی $\mathbb{R}$ است.

اثبات . به صفحه ۳۶۷ مرجع [۲۲] مراجعه کنید.

قضیه ۳۱.۱ .الف) $\prec x, \gamma \succ$ یک تابع پیوسته روی $G \times \Gamma$ است؛

ب) فرض کنید K و C به ترتیب زیر مجموعه‌های فشرده از G و Γ باشند، همچنین فرض کنید U_r مجموعه همه اعداد مختلط z با خاصیت $r > |z - 1|$ باشد. قرار می‌دهیم:

$$N(K,r) = \{\gamma\ :\ \prec x,\gamma \succ \in U_r,\ x \in K \text{ برای هر}\}$$

$$N(C,r) = \{x\ :\ \prec x,\gamma \succ \in U_r,\ \gamma \in C \text{ برای هر}\}$$

در این صورت $N(K,r)$ و $N(C,r)$ به ترتیب زیر مجموعه‌های باز از Γ و G هستند؛

پ) خانوادهٔ همه مجموعه‌های $N(K,r)$ و انتقال‌های آنها یک پایه برای توپولوژی Γ تشکیل می‌دهند؛

ث) Γ یک گروه موضعاً فشرده است.

اثبات . به صفحه‌ی ۱۰ مرجع [۳۹] مراجعه شود.□

قضیه ۳۲.۱ .(*Pontryagin Duality Theorem*) هر گروه آبلی موضعاً فشرده گروه دوگان، دوگان خودش است.

اثبات . به صفحه‌ی ۲۸ مرجع [۳۹] مراجعه شود.□

تعریف ۳۳.۱ .به ازای هر $f \in L^1(G)$ تابع $\hat{f}$ روی Γ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\hat{f}(\gamma) = \int_G f(x) \prec -x, \gamma \succ dx \quad (\gamma \in \Gamma)$$

مجموعه همه تبدیلات فوریه را با $A(\Gamma)$ نشان می‌دهیم.

قضیه ۳۴.۱ .ویژگی های جبری تبدیلات فوریه به صورت زیر است :

(۱) $\alpha, \beta \in \mathbb{C} \quad (\widehat{\alpha f + \beta g}) = \alpha \hat{f} + \beta \hat{g}$ ؛

(۲) $(\widehat{f * g}) = \hat{f}.\hat{g}$؛

(۳) $A(\Gamma)$ یک زیرجبر جدا کننده و خود الحاق از $C_\circ(\Gamma)$ است؛ لذا با استفاده از قضیه استون-وایر اشتراس $A(\Gamma)$ در $C_\circ(\Gamma)$ چگال است.

(۴) $[\chi_x(\gamma) = \prec x, \gamma \succ] \; x \in G, \quad \widehat{[L_x f]} = \bar{\chi}_x \hat{f}$؛

(۵) $[\chi_\gamma(x) = \prec x, \gamma \succ] \; \gamma \in \Gamma, \quad \widehat{[\chi_\gamma f]} = L_\gamma \hat{f}$؛

اثبات . به صفحه‌ی ۱۹ مرجع [۳۹] مراجعه شود.□