بسم الله الرحمن الرحیم

دانشکده علوم

گروه ریاضی

پایان‌نامه جهت اخذ کارشناسی ارشد در رشته ریاضی محض گرایش توپولوژی

موضوع:

علامت یک منیفلد

نگارش:

علیرضا بهشتی

استاد راهنما :

دکتر محمد علی اسدی

تاریخ دی ماه ۱۳۹۱

گزیده ای از دعای مکارم الاخلاق امام سجاد (علیه السلام)

پروردگارا، بر محمد و آل او درود فرست و ایمانم را به کاملترین درجه ایمان برسان و یقینم را بهترین یقین قرار ده و فرجام نیتم را بهترین نیتها بگردان و عملم را به بهترین اعمال برسان.

پروردگارا، با لطف خودت نیتم را نیکو گردان و یقینم را با رحمت بی‌پایانت از گزند انحراف، مصون‌دار و با قدرت بی انتهایت، هر عمل فاسدی که از من سر زده است اصلاح فرما.

پروردگارا، بر محمد و آل او درود فرست و اموری را که اهتمام به آنها مشغولم می‌کند کفایت فرما و مرا به کاری که فردای قیامت از من درخواست می‌کنی وادار کن و در ایام عمرم فراغتی بخش تا به کاری که برای آنم آفریده‌ای بپردازم و بی‌نیازم کن و به من روزی وسیع عطا فرما و عزت ببخش و گرفتار کبر و خودپسندی نکن و به عبادت خالص مشغولم دار و عبادتم را با عجب و غرور باطل نکن.

پروردگارا بر محمد و آل او درود فرست و به هر اندازه‌ای که میان مردم مرا مرتبه می‌بخشی پیش خودم به همان مقدار خوارم کن و هر عزت ظاهری که برایم پدیدار می‌سازی به همان اندازه پیش نفسم برای من خواری باطنی پدید آور.

پروردگارا بر محمد و آل او درود فرست و چنان کن که از هدایت شایسته بهره‌مند شوم و آن را با هیچ چیز عوض نکنم و از راه حق بهره‌مند گردم و از آن بیرون نروم و به نیت درست دست یابم و در آن شک نکنم و تا هنگامی که عمرم در راه طاعت تو می‌گذرد به من عمر بده و آنگاه که عمرم چراگاه شیطان شود، پیش از آنکه دشمنی سخت تو به من روی آورد یا خشم تو محکم و پایدار گردد جانم را بگیر.

پروردگارا، هیچ خصلتی را که مردم زشت بدانند در من نگذار مگر آنکه اصلاحش کنی و هیچ عادت ناپسندی را که مردم سرزنشم کنند باقی نگذار مگر آنکه نیکش سازی و هیچ خوی پسندیده‌ای را در من ناقص نگذار مگر آنکه کاملش کنی.

پروردگارا بر محمد و آل او درود فرست و دشمنی سخت دشمنان را درباره من به دوستی تبدیل کن و حسد و بدخواهی سرکشان را به محبت تغییر ده و بدگمانی صالحان را به اطمینان و دشمنی نزدیکان را به دوستی و بدرفتاری خویشان را به خوشرفتاری و خوار کردن نزدیکان را به یاری و دوستی مدارا کنندگان را به دوستی واقعی مبدل فرما.

اگر تنهاترین تنها شوم، باز خدا هست

او جانشین همه نداشتن هاست...

سپاس گزاری...

سپاس خداوندگار حکیم را که با لطف بی‌کران خود، آدمی را زیور عقل آراست.

در آغاز وظیفه خود می‌دانم از زحمات بی‌دریغ استاد راهنمای خود، جناب آقای دکتر محمد علی اسدی، صمیمانه تشکر و قدردانی کنم، چراکه راهنمایی‌های ارزنده و بسیار دقیق و کامل ایشان در به انتها رساندن این پایان‌نامه بسیار کمکم کرد. از مطالعه دقیق و راهنمایی‌های داوران ارجمند آقایان دکتر رضایی و دکتر سربازجانفدا نهایت سپاس و امتنان را دارم. درک محضر شریف اساتید ارجمند آقایان دکتر قاسمی و دکتر استادباشی افتخار بزرگی برایم بود. همچنین از همراهی لحظه‌به‌لحظه دوست و برادر اندیشمندم آقای دکتر حسن ظریفی‌منتظر نیز تشکر لازم را می‌نمایم که در اتمام این پایان‌نامه کمک‌های زیاد و سازنده‌ای به اینجانب نمودند.

در پایان، بوسه می‌زنم بر دستان خداوندگاران مهر و مهربانی، پدر و مادر عزیزم و بعد از خدا، ستایش می‌کنم وجود مقدس‌شان را و تشکر می‌کنم از خواهران عزیزم به پاس عاطفه سرشار و گرمای امیدبخش وجودشان، که در این سردترین روزگاران، بهترین پشتیبان من بودند.

علیرضا بهشتی

دی ماه ۹۱

تقدیم به

پدر و مادر مهربانم

چکیده

فرض می‌کنیم یک منیفلد ریمانی[1] فشرده، جهت‌دار[2]، بدونِ‌مرز[3] و از بُعد $n = ۴k$ مانند M داشته‌باشیم. علامت[4] M، همانند علامت فرم درجه‌دوم Q [5] تعریف می‌شود. در تعریف علامت Q، از دو ضرب متفاوت با تعاریف هم‌ارز استفاده می‌کنیم. یکی از آنها ضرب خارجی[6] فرم‌ها و دیگری ضرب ناوی[7] کلاس‌های کوهمولوژی می‌باشد. علامت یک منیفلد به عنوان یک محصول توپولوژیکی پایا[8] به اثبات رسیده‌است. علاوه‌براین با استفاده از متریک، یک عملگر دیراک[9] مناسب می‌توانیم تعریف کنیم که شاخص[10] آن بر علامت منیفلد منطبق می‌شود.

کلمات کلیدی:

منیفلد ریمانی، علامت فرم درجه‌دوم، ضرب ناوی، ضرب خارجی، فرم بسته، فرم کامل، فرم هم‌بسته، فرم هم‌کامل، فرم دیفرانسیل‌پذیر.

---

[1] Riemannian manifold

[2] Oriented

[3] Without boundary

[4] Signature

[5] Quadratic form

[6] Exterior product

[7] Cup product

[8] Invarient

[9] Dirac operator

[10] Index

فهرست مطالب

۱.۰ پیشگفتار

در بررسی منیفلدها، مساله‌ی رده‌بندی آنها از جایگاه ویژه‌ای برخوردار می‌باشد. در این رده‌بندی، منیفلدهای ۴-بُعدی پیچیدگی خاصی دارند که مورد توجه ریاضیدانان بزرگی از اوایل قرن بیستم تاکنون قرارگرفته‌است. یکی از این رده‌بندی‌ها توسط رنه تام[۱] در سال ۱۹۵۴ در حد کوبوردیسم[۲] انجام گرفته‌است. این مطالعات با ایجاد نظریه‌های مختلفی در هندسه و توپولوژی ادامه یافت تا آنجا که پایای توپولوژیکیِ علامت در سال ۱۹۵۰ توسط دانشمندی به نام روکلین[۳]، تعریف شد؛ که این پایا تنها برای منیفلدهایی می‌تواند غیرصفر باشد که بُعدی از مضرب ۴ داشته‌باشند. علامت یک منیفلد رهیافتی از جبرخطی برای تفکیک قایل شدن میان منیفلدهایی می‌باشد که بُعدی از مضرب ۴ دارند و با توجه به آسان بودن کار با عناصر جبری می‌تواند بسیار پُرکاربرد باشد.

علامت یک منیفلد نقش اساسی در مطالعه‌ی منیفلدها ایفا می‌کند و یک ابزار اصلی در مطالعه‌ی رده‌بندی منیفلدها به‌شمار می‌رود. به عنوان نمونه یکی از ویژگی‌های آن که از اهمیت بسیاری برخوردار می‌باشد این است که، علامت منیفلدهایی که مرز منیفلدی فشرده و جهت‌پذیر هستند، صفر است. اهمیت این کاربرد زمانی بیشتر حس می‌شود که عکس نقیض آن را به کار بریم. یعنی منیفلدی بیابیم که علامت غیر صفر داشته‌باشد که در این‌صورت نمی‌تواند مرز یک منیفلد فشرده و جهت‌پذیر باشد. همچنین اگر Ω^n را مجموعه ی کلاس‌های هم‌ارزی رابطه‌ی کوبوردیسم بر اساس مفروضات رنه تام درنظر بگیریم با توجه به اینکه علامت دو منیفلد کوبوردانت برابرند می‌توان همریختی غیربدیهی $\sigma : \Omega^{4k} \longrightarrow \mathbb{Z}$ را تعریف نمود و همچنین با توجه به این‌که علامت حاصل‌ضرب دو منیفلد برابر با حاصل‌ضرب علامت‌ها می‌باشد می‌توانیم همریختی $\sigma : \Omega \longrightarrow \mathbb{Z}$ را در سطح حلقه‌ها داشته‌باشیم که در آن داریم $\Omega = \bigoplus_{i\geq 0} \Omega^i$.

[۱] Rene Thom

[۲] Cobordism

[۳] Rohklin

همچنین با توجه به انواع کلاس‌های مشخصه‌ی تعریف شده روی منیفلدها مانند کلاس استیفل-ویتنی[۱]، کلاس اویلر[۲]،کلاس چرن[۳] و کلاس پونتریاگین[۴] ابزارهای وسیع‌تری وارد فضای پژوهش‌های هندسه، توپولوژی و جبر گردیده‌است.

به‌عنوان مثال فردریچ هایرزبروچ[۵] با تعریف L-رده[۶]ها بر اساس اعداد پونتریاگین و ارتباط آنها با گروه کلاس‌های کوهمولوژی از مرتبه ۴ توانست قضیه‌ای اساسی و بسیار پُرکاربرد را در [۱۰] اثبات نماید که براساس آن علامت یک منیفلد برابر با L-رده ای از اعداد پونتریاگین مربوط به آن منیفلد می‌شود. اهمیت این قضیه زمانی بیشتر روشن می‌شود که ابزارهای محاسبه‌ی علامت بسیار پیچیده‌تر از ابزارهای محاسبه‌ی L-رده‌ها هستند.

در این تحقیق که بر اساس [۱۵] تهیه و تنظیم شده‌است به معرفی این پایا پرداخته و راه‌های مختلف محاسبه‌ی آن‌را به همراه چند مثال بیان نموده و کاربردهایی از آن‌را نیز ارائه می‌نماییم.

---

[۱] Stiefel-Whitney

[۲] Euler

[۳] Chern

[۴] Pontrjagin

[۵] Freidrich Hirzebruch

[۶] L-Genus

فصل ۱

تعاریف و مفاهیم اولیه

۱.۱ مقدمه

بنای هر علمی بر یک سری اصول، تعاریف، اصطلاحات و قراردادها نهاده شده‌است. پی بردن به موضوعات ریاضی نیز مانند سایر علوم دیگر لازمه‌اش درک مفاهیم و تعاریف اولیه است. در این فصل تعاریف و قضایایی از توپولوژی عمومی، توپولوژی جبری و هندسه منیفلد را که نقش مهمی در فهم بهتر مطالب دارند، یادآور می‌شویم. فرض ما براین است که خواننده با مفاهیم اولیه توپولوژی آشنایی دارد. لذا از آوردن مطالب مقدماتی، اثبات قضایا و نتایج مربوط به آنها خودداری شده‌است، که توضیح و تعریف در اکثر منابع معرفی شده وجوددارد. تعاریف آورده‌شده با محوریت مقاله اصلی و استفاده از سایر منابع، همراه با مثال‌ها؛ طوری بیان شده‌است که خواننده بدون نیاز به مطالب دیگر آن را دریابد.

۲.۱ مفاهیم و قضایایی از هندسه منیفلد

تعریف ۱.۲.۱. فضای توپولوژیکی M، که هاسدورف و شمارای نوع‌دوم[۱] باشد را یک منیفلد توپولوژیکی گوییم، هرگاه خانواده‌ی $(\varphi_\alpha, U_\alpha)_{\alpha\in I}$ وجود داشته‌باشد به‌طوری‌که $M = \bigcup U_\alpha$ و همسان‌ریختی‌های $\varphi_\alpha : U_\alpha \longrightarrow \mathbb{R}^n$ هر U_α را به زیرمجموعه‌ی بازی از $\mathbb{R}^n$ مانند V_α بنگارند. $(\varphi_\alpha, U_\alpha)$ را یک کارت[۲] با دامنه‌ی U_α می‌نامیم و به خانواده کارت‌های $\{(\varphi_\alpha, U_\alpha)\}_{\alpha\in I}$ اطلس [۳] می‌گوییم.

دوکارت $(\varphi_\alpha, U_\alpha)$ و (φ_β, U_β) را C^∞ -سازگار [۴] گوییم هرگاه نگاشت تغییر مختصات[۵] C^∞ باشد، یعنی دارای مشتقات پیوسته از هر مرتبه‌ای باشد:

$$\varphi_\beta \ o\ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \longrightarrow \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta).$$

تعریف ۲.۲.۱. نگاشت $f : M \longrightarrow N$ بین منیفلدهای توپولوژیکی را همسان‌ریختی[۶] گوییم هرگاه پیوسته، یک به یک، پوشا و باز باشد. به‌عبارت‌دیگر f و f^{-1} پیوسته باشند. در این‌صورت M و N را همسان‌ریخت گوییم و با $M \approx N$ نشان می‌دهیم. یک خاصیت را پایای توپولوژیکی گوییم، هرگاه نسبت به همسان‌ریختی حفظ شود. مانند همبندی، فشردگی، داشتن بعد توپولوژیکی یکسان و ... .

[۱] Second countable: توپولوژی آن دارای پایه شماراست.

[۲] Chart

[۳] Atlas

[۴] Compatable

[۵] Coordinate change

[۶] Homeomorphism

تعریف ۳.۲.۱. یک اطلس روی M را از مرتبه C^r، $0 \leqslant r \leqslant \infty$ گوییم، اگر هر زوج از کارت‌هایش C^r-سازگار باشند. در این حالت یک اطلس ماکسیمال[۱] یکتا وجود دارد که شامل تمام کارت‌هایی است که C^r-سازگار هستند. منیفلد M همراه با چنین اطلسی را منیفلد دیفرانسیل‌پذیر[۲] از مرتبه r گوییم و در حالت $r = \infty$ به آن منیفلد هموار[۳] گفته می‌شود.

تعریف ۴.۲.۱. نگاشت $f : M^m \longrightarrow N^n$ بین منیفلدهای هموار M و N را هموار [۴] گوییم هرگاه برای هر $p \in M$ کارت (φ, U) و برای هر $f(x) \in N$ کارت (ψ, V) وجود داشته‌باشد که $f(U) \subset V$ و نگاشت

$$\psi\ o\ f\ o\ \varphi^{-1} : \varphi(U) \subset \mathbb{R}^m \longrightarrow \psi(V) \subset \mathbb{R}^n$$

هموار باشد.

تعریف ۵.۲.۱. نگاشت $f : M \longrightarrow N$ بین منیفلدهای هموار M و N را وابرریختی[۵] گوییم هرگاه همسان‌ریختی باشد و f و f^{-1} نیز نگاشت‌های هموار باشند، در این حالت M و N را وابرریخت گوییم وبا $M \cong N$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۶.۲.۱. فرض کنید $H^n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n |\ x_n \leq 0\}$ نیم‌فضای بالایی باشد، در این‌صورت منیفلد M را مرزدار[۶] گوییم هرگاه هر نقطه از آن دارای یک همسایگی باشد که با $\mathbb{R}^n$ یا H^n همسان‌ریخت است. نقاطی از M که هیچ یک از همسایگی‌های آن با $\mathbb{R}^n$ همسان‌ریخت نیستند

[۱] اطلس ماکسیمال: یعنی اطلسی که مشمول در اطلس دیگری نباشد.

[۲] Diferantiable manifold

[۳] Smooth

[۴] دارای مشتقات جزیی از هر مرتبه.

[۵] Diffeomorphism

[۶] Bounded manifold

تشکیل زیرمجموعه‌ای از M می‌دهند که آن‌را با ∂M نمایش می‌دهیم و مرز M می‌نامیم. به‌عبارت‌دیگر نقاطی که به $\{(x_1, \ldots, x_n) | \ \ x_n = 0\}$ نگاشته می‌شوند. اگر $\partial M = \varnothing$ آنگاه M را بدونِ‌مرز می‌نامیم.

تعریف ۷.۲.۱. یک منیفلد هموار با یک اطلس به‌گونه‌ای که هر دو کارت φ و ψ درون این اطلس این خاصیت را داشته‌باشند که ماتریس ژاکوبی[1] تغییر مختصات $\varphi \ o \ \psi^{-1}$ در هر نقطه از دامنه‌اش دارای دترمینان مثبت باشد را جهت‌دار گوییم. این چنین اطلسی را که با این ویژگی ماکسیمال باشد، جهت منیفلد می‌نامیم و هر منیفلد با این خاصیت را جهت‌پذیر می‌گوییم.

تعریف ۸.۲.۱. فرض کنید M یک منیفلد هموار باشد. برای هر $p \in M$ فضای کوتانژانت در نقطه ی p را که دوگان فضای T_pM می‌باشد به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$T_p^*M = (T_pM)^*.$$

اعضای T_p^*M هم بردارهای مماس در نقطه ی p یا فقط هم بردارها در p نامیده می‌شوند.

همچنین به اجتماع مجزای $(T_pM)^*$ به‌ازای تمامی $p \in M$ ها، کلاف کوتانژانت روی M گفته می‌شود.

تعریف ۹.۲.۱. فضای تمامی کلاف‌های کوتانژانت هموار روی M را با ΛT^*M نمایش می‌دهیم. همچنین داریم:

$$C^\infty(\Lambda T^*M) = \Omega(M).$$

[1] Jacobian matric

تعریف ۱۰.۲.۱. دو منیفلد M و N را کوبوردانت گوییم هرگاه بتوان منیفلدی مانند W پیدا کرد که رابطه‌ی $M \bigcup N = \partial W$ برقرار باشد. به‌راحتی می‌توان دید که این یک رابطه‌ی هم‌ارزی می‌باشد.[۱] همچنین علاقه‌مندان جهت کسب اطلاعات بیشتر در مورد منیفلدهای کوبوردانت و همچنین گروه کوبوردیسم‌های جهت‌دار و فضاهای مربوطه می‌توانند به [۱۰] فصل دوم و همچنین [۱۶] بخش اول و یا [۱۲] فصل هفدهم مراجعه فرمایند.

تعریف ۱۱.۲.۱. نگاشت حقیقی-مقدار μ را روی فضای برداری با بُعد متناهی V در نظر بگیرید. μ را درجه‌دوم گوییم هرگاه بتوان آن را به‌صورت زیر نشان داد:

$$\mu(v) = \sum_i l_i(v) \cdot l'_i(v)$$

که در آن l_i و l'_i خطی هستند. هر نگاشت درجه‌دوم یک فرم دوخطی متقارن[۲] به‌صورت زیر معین می‌کند.

$$\begin{cases} \cdot : V \times V \longrightarrow \mathbb{R} \\ (v, \omega) \longmapsto v \cdot \omega = \frac{1}{2}(\mu(v+\omega) - \mu(v) - \mu(\omega)) \end{cases}$$

توجه می‌کنیم که $v \cdot v = \mu(v) := |v|^2$ و متقارن بودن به معنای $v \cdot \omega = \omega \cdot v$ با توجه به تعریف واضح است.

تعریف ۱۲.۲.۱. فرم درجه‌دوم μ مثبتِ‌معین نامیده می‌شود هرگاه برای هر $v \neq 0$ داشته‌باشیم $\mu(v) > 0$.

تعریف ۱۳.۲.۱. فضای برداری اقلیدسی، فضای برداری حقیقی V همراه با یک نگاشت درجه‌دوم مثبتِ‌معین است $\mu : V \longrightarrow \mathbb{R}$. عدد حقیقی $v \cdot \omega$ حاصل‌ضرب داخلی بردارهای v و ω نامیده می‌شود. نگاشت μ یک متر روی فضاست که به متر اقلیدسی معروف است.

[۱] برای دیدن اثبات این مطلب به [۱۲] فصل ۱۷ لم ۲.۱۷ رجوع شود.

[۲] Symmetric bilinear form

تعریف ۱۴.۲.۱. اگر TM فضای مماسی روی منیفلد M^n باشد، یعنی:

$$TM \;=\; \{(x,v)|x\in M, v\in T_xM\}.$$

$\mu : TM \longrightarrow \mathbb{R}$ متر ریمانی نامیده می‌شود اگر به ازای هر x، μ_x یک متر اقلیدسی روی T_xM باشد و منیفلد M همراه با متر μ را منیفلد ریمانی گوییم.

مثال ۱۵.۲.۱. ساده‌ترین مثال از منیفلدهای ریمانی، $\mathbb{R}^n$ با ضرب داخلی معمولی است.

$$\mu(v,\omega) \;=\; \sum_{i=1}^{n} v_i\,\omega_i$$

که در آن $v=(v_1,\dots,v_n)\in\mathbb{R}^n$ و $\omega \;=\; (\omega_1,\dots,\omega_n)\in\mathbb{R}^n$.

تعریف ۱۶.۲.۱. فرم درجه‌دوم $Q(x)$ در n متغیر روی میدان F یک چند جمله‌ای همگن از درجه ۲ با ضرایب $c_{ij}\in F$ می‌باشد که به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$Q(x)=\sum_{i=1}^{n} c_{ii}x_i^2+\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} 2c_{ij}x_ix_j.$$

حال با انتخاب یک پایه مانند $\{e_1,\dots,e_n\}$ برای فضای برداری V فرض می‌کنیم $<e_i,e_j>_Q=c_{ij}$. همچنین فرض می‌کنیم $A\in M_n(F)$ یک ماتریس که i-امین وj-امین مولفه سطر وستون آن ضریب c_{ij} از $Q(x)$ باشد. ماتریس $A=(a_{ij})$ ماتریس وابسته به $Q(x)$ نامیده می‌شود. ماتریس A متقارن است و می‌توانیم فرم درجه‌دوم Q را به‌صورت $Q(x) \;=\; x^T\cdot A\cdot x$ که در آن $x\in V$ بنویسیم، به‌طوری‌که:

$$A=(a_{ij})=\begin{cases} c_{ii} & i=j \text{ اگر} \\ \frac{1}{2}c_{ij} & i<j \text{ اگر}. \\ \frac{1}{2}c_{ji} & j<i \text{ اگر}\end{cases}$$

مثال ۱۷.۲.۱. فرم درجه‌دوم $Q(x_1, x_2, x_3) = 9x_1^2 + 7x_2^2 + 3x_3^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3 - 6x_2x_3$ را در نظر می‌گیریم. هدف پیدا کردن ماتریس متقارن A که در بالا به آن اشاره شده‌است می‌باشد. برطبق مطالب گفته‌شده داریم:

$$A = \begin{bmatrix} 9 & -1 & 2 \\ -1 & 7 & -3 \\ 2 & -3 & 3 \end{bmatrix}$$

قضیه ۱۸.۲.۱ (سیلوستر). [1] برای هر فرم درجه‌دوم روی $\mathbb{R}$ یک پایه‌ی کانونی متناسب با ماتریسی که به فرم منصوب می‌شود وجود دارد:

$$M(V,B) = \begin{pmatrix} 1 & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & -1 & & \\ & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & -1 \end{pmatrix}$$

p تا مولفه‌ی $(+1)$ و q تا مولفه‌ی (-1) در این ماتریس قطری مستقل از انتخاب پایه هستند. علامت این فرم درجه‌دوم عبارت است از $p - q$، به عبارت دقیق‌تر علامت هر فرم درجه‌دوم برابر است با تعداد مقادیر ویژه‌ی مثبت منهای تعداد مقادیر ویژه‌ی منفی در این ماتریس قطری وابسته به فرم درجه‌دوم.

ملاحظه ۱۹.۲.۱. از آنجایی‌که برای تعریف فرم درجه‌دوم روی کلاف‌های برداری در فصل بعدی نیاز به ضرب خارجی فرم‌ها داریم تا با استفاده از آن ارتباطی میان گروه کلاس‌های کوهمولوژی و علامت یک منیفلد ایجاد نماییم، لذا در ادامه ضرب خارجی فرم‌ها را تعریف می‌کنیم. برای تعریف نیاز به مقدماتی داریم که به آن‌ها اشاره خواهیم‌کرد.

[1] Sylvester

تعریف ۲۰.۲.۱. یک k-تانسور هموردا[1] روی فضای برداری V یک تابع k-خطی حقیقی-مقدار از k-عضوی V می‌باشد که به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$T : \underbrace{V \times V \times \ldots \times V}_{k-copies} \longrightarrow \mathbb{R}$$

عدد k مرتبه T نامیده می‌شود. مجموعه‌ی همه‌ی k-تانسورهای هموردا روی V را با $T^k(V)$ نمایش می‌دهیم و از بُعد 2^k می‌باشد.

تعریف ۲۱.۲.۱. فرض کنیم $A^p(V)$ نشان دهنده‌ی فضای برداری همه‌ی p-فرمی های متناوب و p-خطی و از بُعد $\binom{n}{p}$ روی فضای برداری حقیقی V باشد، آنگاه اگر $\omega \in A^p(V)$، برای هر p-تایی $< X_1, \ldots, X_p >$ داریم:

$$\omega(X_{\sigma_1}, \ldots, X_{\sigma_p}) = sgn(\sigma)\omega(X_1, \ldots, X_p).$$

تعریف ۲۲.۲.۱. برای هر فضای برداری حقیقی از بُعد متناهی V، $A^k(V)$ نشان دهنده‌ی زیر فضایی از $T^k(V)$ شامل تانسورهای متناوب است.

نکته ۲۳.۲.۱. برای حالت $p = 0$ داریم: $A^0(V) = \mathbb{R}$ و $A^1(V) = V^*$ فضای دوگان[2] V می شود.

تعریف ۲۴.۲.۱. تابع متناوب‌ساز[3] عبارت است از نگاشت

$$Alt : T^k(V) \longrightarrow A^k(V)$$

که به‌صورت:

$$\begin{cases} Alt\ T = \frac{1}{k!}\sum_{\sigma\in S_k}(sgn\ \sigma)T^\sigma \\ (Alt\ T)(X_1, \ldots, X_k) = \frac{1}{k!}\sum_{\sigma\in S_k}(sgn\ \sigma)T(X_{\sigma_1}, \ldots X_{\sigma_k}) \end{cases}$$

[1] Covariant tensor

[2] Duall space

[3] Alternater

مشخص می‌شود .

تعریف ۲۵.۲.۱. فرض کنیم $\omega \in A^k(V)$ و $\eta \in A^l(V)$ در این‌صورت ضرب گوه‌ای[1] یا همان ضرب خارجی نگاشتی است مانند $\times : A^k(V) \times A^l(V) \longrightarrow A^{k+l}(V)$ که به‌صورت:

$$\omega \ \wedge \ \eta = \frac{(k+l)!}{k!l!} Alt \ (\omega \otimes \eta)$$

تعریف می‌شود. به‌عبارت‌دیگر:

$$\omega \wedge \eta \, (X_1, \ldots, X_k, X_{k+1}, \ldots, X_{k+l}) = \frac{(k+l)!}{k!l!} Alt \ (\omega \otimes \eta) \ (X_1, \ldots, X_k, X_{k+1}, \ldots, X_{k+l})$$

$$= \frac{(k+l)!}{k!l!} \cdot \frac{1}{(k+l)!} \sum_{\sigma} sgn \ (\sigma) \ \omega \ (X_{\sigma_1}, \ldots X_{\sigma_k}) \ \eta \ (X_{\sigma_{k+1}}, \ldots, X_{\sigma_{k+l}}).$$

جایی‌که جمع‌وند روی همه‌ی جایگشت[2] های σ از ۱ تا $k+l$ اثر می‌کند، به‌قسمی که

$$\sigma_1 < \sigma_2 < \ldots < \sigma_k$$

و

$$\sigma_{k+1} < \sigma_{k+2} < \ldots < \sigma_{k+l}$$

لذا توجه داریم که:

$$\omega \wedge \eta \, (X_1, \ldots, X_k, X_{k+1}, \ldots, X_{k+l}) = \frac{1}{k!l!} \sum_{\sigma} sgn \ (\sigma) \, \omega \ (X_{\sigma_1}, \ldots X_{\sigma_k}) \, \eta \ (X_{\sigma_{k+1}}, \ldots X_{\sigma_{k+l}}).$$

جایی‌که جمع‌وند روی همه جایگشت‌ها اثر می‌کند.

[1] Wedge product

[2] Permutation

تعریف ۲۶.۲.۱. فرض کنید M^n یک منیفلد هموار باشد. یک k-فرمی دیفرانسیل‌پذیر روی M تابعی است دیفرانسیل‌پذیر که به هر نقطه‌ی $x \in M$ یک عضو مانند ω_x از $A^k(T_xM)$ متناظر می‌کند. در این تعریف دیفرانسیل‌پذیری به این معنی است که در مولفه‌های موضعی $x_1, \ldots, x_n$ حول x، T_x^*M دارای پایه‌ی $dx_1, \ldots, dx_n$ می‌باشد که $dx_i(\frac{\partial}{\partial x_j}) = \delta_j^i$ بنابراین می‌توان نوشت:

$\omega_x = \sum f_{i_1 \ldots i_k} dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k}$ که $f_{i_1 \ldots i_k}$ها هموار هستند.

نکته ۲۷.۲.۱. اگر $(X_1, \ldots, X_p)$ میدان‌های برداری روی M باشند و ω یک p-فرمی آنگاه $\omega(X_1, \ldots, X_p)$ یک تابع حقیقی-مقدار روی M است، به‌طوری‌که X_iها به هر نقطه‌ی M یک بردار منصوب می‌کنند و ω، بردارها را به اعداد حقیقی می‌برد.

ملاحظه ۲۸.۲.۱. در تعریف فرم‌های درجه‌دوم روی کلاف‌های برداری هموار نیاز به انتگرال‌گیری روی فرم‌ها داریم لذا در ادامه تعریف کوتاه و مختصری از انتگرال‌گیری روی فرم‌ها می‌آوریم تا خواننده محترم در فهم مطالب دچار اشکال نشود.

تعریف ۲۹.۲.۱. فرض کنیم ω یک n-فرمی روی $U \subset \mathbb{R}^n$ با محمل[۱] فشرده باشد. می‌توانیم ω را روی U به‌صورت $\omega = f(x_1, \ldots, x_n) dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n$ نمایش دهیم و در خارج از مجموعه‌های فشرده f را صفر تعریف می‌کنیم. بنابراین می‌توانیم انتگرال روی فرم ω را تعریف کنیم.

$$\int_U \omega = \int_{\mathbb{R}^n} \omega = \iint \ldots \int_{\mathbb{R}^n} f(x_1, \ldots, x_n) dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n.$$

جایی‌که انتگرال سمت راست، انتگرال ریمانی[۲] است. در حقیقت این کافی است که f فقط انتگرال‌پذیر ریمان با محمل فشرده برای درنظر گرفتن جهت باشد.

[۱] Support

[۲] Riemannian integral