دانشکده ریاضی، آمار و علوم کامپیوتر

« گروه ریاضی »

پایان نامه کارشناسی ارشد ریاضی

عنوان

منظم بودن در حلقه ی درون ریختی

نگارش

سمانه امامقلی

استاد راهنما

دکتر ناهید اشرفی

استاد مشاور

دکتر رحمان بهمنی سنگسری

۱۳۹۰

بسم الله الرحمن الرحيم

قدردانی

در اینجا از کلیه افرادی که به من در تهیه این پایان نامه و همچنین در این دوره تحصیلی یاری نموده‌اند، خصوصاً از اساتید ارجمند سرکار خانم دکتر اشرفی و جناب آقای دکتر بهمنی تشکر و قدردانی می‌نمایم.

تقدیم به :

دستان پر مهر و چشمان همیشه منتظر مادرم

چکیده

فرض کنیم R یک حلقه ی یک دار و A و M، R ـ مدول های راست یکانی باشند. نگاشت $f \in Hom_R(A, M)$ را منظم می نامیم هر گاه $g \in Hom_R(M, A)$ ای موجود باشد که $fgf = f$. یک زیر مجموعه از $Hom_R(A, M)$ را منظم گوییم هرگاه هر عضو از آن منظم باشد.
در این پایان نامه به بررسی خواص بزرگ ترین زیرمدول منظم از $Hom_R(A, M)$ که آن را با نماد $Reg(A, M)$ نشان می دهیم می پردازیم. اما بیشتر توجه و بحث اصلی را روی $Reg(A, A)$ که در آن A یک گروه آبلی است متمرکز کرده و خواص آن را که بزرگ ترین ایده آل منظم از حلقه ی درون ریختی A است، تحقیق می کنیم. قضیه های ۳.۲.۱۰ و ۳.۲.۳۰، نتیجه ی ۳.۲.۳۱ و قضیه ی ۳.۲.۳۲ از مهم ترین نتایج حاصل هستند. البته لازم به ذکر است که بررسی برخی از نتایج حاصل را می توان در مورد دسته ی خاصی از گروه ها به نام گروه های آبلی مخلوط تحقیق کرد. ما در این پایان نامه در دو قضیه ی پایانی، بزرگ ترین ایده آل منظم از حلقه ی درون ریختیِ یک گروه آبلی مخلوط را مورد مطالعه قرار می دهیم.
واژه‌های کلیدی: حلقه ی درون ریختی، ضرب مستقیم گروه های مقدماتی، گروه آبلی مخلوط، گروه کاهشی، نگاشت منظم.

مقدمه

حلقه ی R را حلقه ی منظم وان نیومن [۱] گوییم هرگاه برای هر $r \in R$، $x \in R$ ای موجود باشد که $rxr = r$. نگاشت $f \in Hom_R(A, M)$ را منظم گوییم هر گاه $g \in Hom_R(M, A)$ ای موجود باشد که $fgf = f$. یک زیر مجموعه از $Hom_R(A, M)$ منظم است هر گاه هر عضو از آن منظم باشد. اگر قرار دهیم $S := End(M_R)$ و $T := End(A_R)$، آن گاه $Hom_R(A, M)$ یک $S - T$ دو مدول است. نشان می دهیم $Hom_R(A, M)$ دارای بزرگ ترین $S - T$ زیرمدول منظم است که آن را $Reg(A, M)$ نام گذاری می کنیم . اما اگر $A = M$ در نظر گرفته شود خواهیم داشت $Hom_R(A, M) = Hom_R(A, A) = End(A_R)$، که در این حالت تعریف بیان شده برای منظم بودن $Hom_R(A, M)$ همان تعریفی است که برای حلقه ی منظم R داریم.

براون[۲] و مک کوی [۳] [۴]، در سال ۱۹۵۰ نشان دادند که حلقه ی منظم R دارای بزرگ ترین ایده آل منظم است و اطلاع از وجود چنین ایده آلی ما را بر این داشت که خصوصیات کلی تری از بزرگ ترین ایده آل منظم حلقه ی درون ریختی یک گروه آبلی را بررسی کنیم.

فاکس[۴] و رنگسوامی [۵] [۷]، در سال ۱۹۶۸ گروه های آبلی که دارای حلقه ی درون ریختی منظم هستند را توصیف کرده اند مگر دسته ی خاصی از گروه ها به نام C^* ـ گروه ها (تعریف ۱۳.۲.۳ را ببینید). آن ها نشان داده اند که یک گروه کاهشی با حلقه ی درون ریختی منظم به این دسته از گروه ها متعلق است اما عکس آن برقرار نیست. ما در این پایان نامه توانستیم در قضیه ی ۱۰.۲.۳، گروه کاهشی A را که $Reg(A, A) \neq 0$، توصیف کنیم. گلس [۶] و ویکلس [۷] [۱۰]، در سال ۱۹۹۴، دسته ی C^* ـ گروه ها را به طور وسیعی بررسی کرده اند و نتایج زیادی در مورد منظم بودن حلقه ی درون ریختی این گروه ها به دست آورده اند. اما کار آن ها نشان می دهد که پاسخ به سوال های باقی مانده از شرایط منظم بودن حلقه ی درون ریختی و خواص بزرگ ترین ایده آل منظم حلقه ی درون ریختی

---

[۱] Von Neumann
[۲] Brown
[۳] McCoy
[۴] Fuchs
[۵] Rangaswamy
[۶] Glaz
[۷] Wickless

این دسته ی خاص از گروه ها بسیار مشکل می باشد.

مفاهیم و قضایای مورد نیاز را در فصل اول بیان کرده ایم. قضایا و گزاره های موجود در فصل دوم برگرفته از مقاله ی [۱۶] می باشند و به عنوان قضایای اصلی و کلیدی، به طور مکرر در فصل سوم استفاده شده اند. بخش پایانی با استفاده از مقاله ی [۲۰] تنظیم گردیده است.

فهرست مندرجات

فصل ۱

مفاهیم اولیه

در این فصل با تعاریف و قضایای مورد نیاز آشنا خواهیم شد که شامل دو بخش می باشد، بخش اول مفاهیم و تعاریف مورد نیاز در نظریه ی گروه ها و بخش دوم قضایا و تعاریفی از مبحث حلقه و مدول هاست.

۱.۱ مفاهیم و تعاریف مورد نیاز در نظریه ی گروه ها

تعریف ۱.۱.۱ گروه ابلی D را گروه بخشی می نامیم هرگاه برای هر $a \in D$ و هر عدد صحیح و غیرصفر n، $n \mid a$.

یا به عبارت دیگر برای هر $a \in D$ و هر عدد صحیح و غیرصفر n، $x \in D$ ای موجود باشد به طوری که $a = nx$.

بنابراین گروه D بخشی است اگرو تنها اگر برای هر عدد صحیح و غیرصفر n، رابطه ی $nD = D$ برقرار باشد.

مثال ۲.۱.۱ $\mathbb{Q}$، میدان اعداد گویا، گروهی بخشی است.

تعریف ۳.۱.۱ فرض کنیم p عددی اول باشد. گروه D، pـ بخشی نامیده می شود هرگاه برای هر عدد صحیح و مثبت k، $p^kD = D$.

تذکر ۴.۱.۱ $pD = D$، p ـ بخشی بودن را نتیجه می دهد، زیرا برای هر عدد صحیح و مثبت k :

$$p^kD = p^{k-1} \times \underbrace{pD}_{=D} = p^{k-1}D = p^{k-2} \times \underbrace{pD}_{=D} = \ldots = p^2D = p \times pD = pD = D$$

و لذا طبق تعریف D بخشی خواهد بود.

قضیه ۵.۱.۱ گروه D بخشی است اگر و تنها اگر D برای هر عدد اول p، pـ بخشی باشد.

برهان: فرض کنیم D گروهی بخشی باشد، لذا طبق تعریف گروه بخشی برای هر عدد اول p، $pD = D$ پس D، pـ بخشی است.

بر عکس: فرض کنیم n عددی صحیح باشد، لذا $n = p_1^{t_1} \ldots p_k^{t_k}$، که در آن $t_1, \ldots, t_k$ اعداد صحیح مثبت و $p_1, \ldots, p_k$ اعداد اول متمایز هستند. در این صورت:

$$nD = p_1^{t_1} \ldots p_k^{t_k} D$$

و چون D، pـ بخشی است لذا $p_k^{t_k} D = D$، بنابراین:

$$nD = p_1^{t_1} \ldots p_k^{t_k} D = p_1^{t_1} \ldots p_{k-1}^{t_{k-1}} D$$

و با همین روند، $nD = p_1^{t_1} D = D$ و لذا D بخشی خواهد بود. $\square$

تعریف ۶.۱.۱ گروه G را pـ گروه می نامیم هرگاه مرتبه ی هر عضو آن توانی از عدد اول p باشد.

تعریف ۷.۱.۱ اگر گروه G شامل عنصری از مرتبه ی p باشد، p را عدد اول مربوط به G می نامیم.

قضیه ۸.۱.۱ هر pـ گروه، بخشی است اگر و تنها اگر pـ بخشی باشد.

برهان: فرض کنیم D یک pـ گروه باشد، لذا طبق تعریف گروه بخشی $pD = D$، پس D یک گروه pـ بخشی است.

برعکس: فرض کنیم D یک pـ گروه pـ بخشی باشد، نشان می دهیم D بخشی یا برای هر عدد اول q، $qD = D$ است. اما D یک گروه آبلی است لذا $\mathbb{Z}$ ـ مدول است پس $qD \subseteq D$ برقرار است. بنابراین کافی است نشان دهیم $D \subseteq qD$.

فرض کنیم $x \in D$ دلخواه باشد چون D، pـ گروه است t مثبتی موجود است که $p^t x = 0$. فرض کنیم q متمایز با p باشد، بنابر این $(p, q) = 1$ و $(p^t, q) = 1$. لذا اعداد صحیح u, v موجودند که $p^t u + qv = 1$، پس $x = p^t ux + qvx$. اما $p^t ux = up^t x = 0$، پس $x = qvx \in qD$ و این یعنی $D \subseteq qD$.

اما اگر $p = q$ باشد طبق فرض $qD = pD = D$. بنابراین برای هر عدد اول q، $qD = D$ و لذا D بخشی است. $\square$

قضیه ۹.۱.۱ هر جمع مستقیم و حاصل ضرب مستقیم از گروه ها بخشی است اگر و تنها اگر هر مولفه بخشی باشد.

برهان: به مرجع [۹] بخش ۲۰ مراجعه شود. $\square$

قضیه ۱۰.۱.۱ فرض کنیم برای هر $i \in I$، D_i زیر گروهی بخشی از گروه A باشد، آن گاه $\sum_{i\in I} D_i$ نیز زیر گروهی بخشی از A است.

برهان: به مرجع [۹] بخش ۲۰ مراجعه شود. $\square$

قضیه ۱۱.۱.۱ هر زیر گروه بخشی D از گروه A، یک جمعوند مستقیم برای A است.

برهان: به مرجع [۹] قضیه ی ۲۱.۲ مراجعه شود. □

گزاره ۱۲.۱.۱ هر گروه خارج قسمتی از یک گروه بخشی، بخشی است.

برهان: فرض کنیم D بخشی و $N \subseteq D$ و $x = y + N \in D/N$ دلخواه باشد، لذا $y \in D$ و چون D بخشی است برای هر $\circ \neq n \in \mathbb{Z}$، $y' \in D$ ای هست که $y = ny'$، بنابر این $x = ny' + N = n(y' + N)$ که در آن $y' + N \in D/N$. □

گزاره ۱۳.۱.۱ تصویر هم ریخت هر گروه بخشی ، بخشی است.

برهان: فرض کنیم $A_۱$ گروهی بخشی و $f : A_۱ \longrightarrow A_۲$ هم ریختی پوشا باشد. برای هر عدد اول p، $pA_۱ = A_۱$، بنابر این :

$$pA_۲ = pf(A_۱) = f(pA_۱) = f(A_۱) = A_۲$$

و این یعنی $A_۲$، بخشی است. □

گزاره ۱۴.۱.۱ اگر A یک گروه بخشی و B جمعوند مستقیمی برای A باشد آن گاه B هم بخشی است.

برهان: $B \subseteq^{\oplus} A$ لذا $C \subseteq A$ ای هست که $A = B \oplus C$.

اگر $b \in B$ باشد به ازای هر $c \in C$، $b + c \in B \oplus C = A$ و چون A بخشی است برای هر $\circ \neq n \in \mathbb{Z}$، $y = b' + c' \in A$ ای هست $(b' \in B, c' \in C)$ که:

$$b + c = ny = n(b' + c') = nb' + nc' \Longrightarrow \underbrace{b - nb'}_{\in B} = \underbrace{nc' - c}_{\in C}$$

$$\Longrightarrow b - nb' \in C \cap B = \circ \Longrightarrow b = nb'.$$

بنابر این B بخشی است. □

قضیه ۱۵.۱.۱ هرگروه آبلی دارای بزرگ ترین زیرگروه بخشی است.

برهان: فرض کنیم A یک گروه باشد، اگر D را زیرگروه تولید شده توسط تمام زیرگروه های بخشی A در نظر بگیریم آن گاه طبق قضیه ی ۱۰.۱.۱، D بخشی است، بنابراین D بزرگ ترین زیرگروه بخشی از A است. □

تذکر ۱۶.۱.۱ D تعریف شده در برهان فوق می تواند زیرگروه صفر باشد و این در حالتی است که A هیچ زیرگروه بخشی نداشته باشد.

قضیه ۱۷.۱.۱ فرض کنیم B زیرگروهی از گروه A باشد، هر هم ریختی $\tau : B \to D$ قابل توسیع به هم ریختی $\chi : G \to D$ است، که در آن D گروهی بخشی است.

برهان: به مرجع [۸] قضیه ی ۱٦.۱ مراجعه شود. □

قضیه ۱۸.۱.۱ هر گروه آبلی در یک گروه بخشی نشانده می شود.

برهان: به مرجع [۲۵] قضیه ی ۱۰.۲۳ مراجعه شود. □

تعریف ۱۹.۱.۱ فرض کنیم A گروهی آبلی باشد و dA را زیرگروه تولید شده توسط تمام زیرگروه های بخشی A در نظر بگیریم، اگر $dA = 0$ باشد A را گروه کاهشی می نامیم.

قضیه ۲۰.۱.۱ فرض کنیم A یک گروه آبلی باشد، در این صورت A را می توان به صورت جمع $A = D \oplus C$ نوشت که در آن D گروهی بخشی و C گروه کاهشی است.

برهان: به مرجع [۹] قضیه ۲.۳ مراجعه شود. □

تعریف و نمادگذاری ۲۱.۱.۱ فرض کنیم p عددی اول و ثابت باشد، p^k امین ریشه ی مختلط واحد را در نظر بگیریم که در آن k عدد طبیعی است. این عناصر گروهی نامتناهی تولید می کنند که

آن را گروه شبه دوری از مرتبه ی p^∞ می نامیم و با نماد $C(p^\infty)$ نشان می دهیم. این گروه به صورت زیر تعریف می شود:

$$C(p^\infty) := \langle\{c_۱, c_۲, \ldots, c_n, \ldots\}\rangle$$

که در آن $c_۱ \neq ۰$ و $pc_۱ = ۰$ و $c_۱ = pc_۲$ و $c_۲ = pc_۳$ و ... و $c_n = pc_{n+۱}$ و .... بنابراین $o(c_n) = p^n$. هر عضو از $C(p^\infty)$ به صورت مضرب چند c_n نوشته می شود، یعنی اگر $x \in C(p^\infty)$ باشد به صورت $x = \sum_{i=۱}^{k} n_i c_i$ نوشته می شود که در آن $k \in \mathbb{N}$ و برای هر i، $n_i \in \mathbb{Z}$ است.

گزاره ۲۲.۱.۱ فرض کنیم D زیرگروهی دلخواه از $C(p^\infty)$ باشد، D شامل تمام مولدهای c_n از $C(p^\infty) = \langle\{c_۱, c_۲, \ldots, c_n, \ldots\}\rangle$ نیست، در واقع هر زیرگروه از $C(p^\infty)$ یک زیرگروه سره از آن است.

برهان: به مرجع [۸] بخش ۴ مراجعه شود. □

گزاره ۲۳.۱.۱ تمام زیرگروه های سره از $C(p^\infty)$ گروه های دوری متناهی از مرتبه ی p^n هستند که در آن $n = ۱, ۲, ۳, \ldots$ و تنها یک زیرگروه از مرتبه ی p^n وجود دارد که آن را با نماد $C(p^n)$ نشان می دهیم.

برهان: به مرجع [۸] بخش ۴ مراجعه شود. □

قضیه ۲۴.۱.۱ اگر گروه A شامل عناصری با مرتبه ی متناهی باشد آن گاه عدد اولی چون p موجود است که $C(p^n)$ جمعوندی برای A است ($۱ \leq n \leq \infty$).

برهان: به مرجع [۸] نتیجه ی ۲۴.۳ مراجعه شود. □

تعریف ۲۵.۱.۱ فرض کنیم گروه A دارای دو تجزیه ی $A = \bigoplus_{i\in I} A_i$ و $A = \bigoplus_{j\in J} A'_j$ باشد، گوییم این دو تجزیه یکریخت هستند هرگاه $\bigoplus_{i\in I} A_i \cong \bigoplus_{j\in J} A'_j$.

قضیه ۲۶.۱.۱ (نظریه ی ساختاری گروه های آبلی بخشی)
هر گروه آبلی بخشی به صورت جمع مستقیم کپی هایی از $C(p^{\infty})$ (برای p های متمایز) و کپی هایی از گروه جمعی اعداد گویا ست و هر دو چنین تجزیه ای یکریخت اند.

برهان: به مرجع [۸] قضیه ی ۱۹.۱ مراجعه شود. □

تعریف ۲۷.۱.۱ فرض کنیم p عددی اول و $a \in A$ به گونه ای باشد که مرتبه ی آن برابر با p^n است، در اینجا n را توان a می نامیم و با نماد $E(a)$ نشان می دهیم.

تعریف ۲۸.۱.۱ فرض کنیم $a \in A$ دلخواه و k بزررگ ترین عدد صحیح نامنفی r باشد به طوری که $p^r x = a$ برای $x \in A$ ای قابل حل باشد، در این صورت k را بلندی یا ارتفاع a می نامیم و با نماد $H(a)$ نشان می دهیم. اگر چنین k ای موجود نباشد گوییم a دارای بلندی بی نهایت است و می نویسیم $H(a) = \infty$.

تعریف ۲۹.۱.۱ گروه آبلی A را گروه تابی یا تاب دار می نامیم هرگاه مرتبه ی تمام اعضای آن متناهی باشد.

تعریف ۳۰.۱.۱ گروه آبلی A را گروه بدون تاب می نامیم هرگاه تنها عضو آن که دارای مرتبه ی متناهی است صفر باشد.

تعریف ۳۱.۱.۱ گروه J را انژکتیو گوییم هر گاه برای هر تکریختی $f : A \to B$ و هم ریختی $g : A \to J$، هم ریختی $h : B \to J$ موجود باشد که نمودار زیر را جابه جا کند :

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g"'] & B \arrow[d, "h"] \\ & & J \end{tikzcd}$$

یعنی $hof = g$.

گزاره ۳۲.۱.۱ فرض کنیم A یک گروه آبلی بدون تاب باشد و $0 \neq x \in A$، در این صورت هم ریختی $f_x : A \longrightarrow \mathbb{Q}$ موجود است که $f_x(x) \neq 0$.

برهان: نگاشت $h_x : \mathbb{Z}x = \langle x \rangle \longrightarrow \mathbb{Q}$ را با ضابطه ی $h_x(tx) = t$ در نظر می گیریم، h_x خوش تعریف است زیرا اگر $t_1 x = t_2 x$ باشد آن گاه $(t_1 - t_2)x = 0$، اما $0 \neq x \in A$ و A بدون تاب است پس $t_1 - t_2 = 0$ و $t_1 = t_2$ خواهد بود.
$\mathbb{Q}$ یک گروه آبلی بخشی است بنابر این یک $\mathbb{Z}$ ـ مدول انژکتیو است و لذا $\lambda_x : A \longrightarrow \mathbb{Q}$ ای هست که نمودار

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathbb{Z}x \arrow[r, hook, "g"] \arrow[d, "h_x"'] & A \arrow[dl, "\lambda_x"] \\ & \mathbb{Q} & \end{tikzcd}$$

را جا به جا می کند، بنابر این :

$$\lambda_x g = h_x \Longrightarrow \lambda_x g(x) = h_x(x) \Longrightarrow \lambda_x(x) = h_x(x)$$

$$= h_x(1.x) = 1 \neq 0 \Longrightarrow \lambda_x(x) \neq 0.$$

□

گزاره ۳۳.۱.۱ فرض کنیم A یک گروه آبلی بدون تاب باشد، در این صورت $A \cong \bigoplus \mathbb{Q}$.

برهان: طبق قضیه ی ۱۸.۱.۱، گروه بخشی D و $f : A \longrightarrow D$ موجودند که f یک تکریختی است . از طرفی طبق نظریه ی ساختاری گروه های آبلی بخشی، $D \overset{g}{\cong} \bigoplus \mathbb{Q} \oplus (\bigoplus C(p^\infty))$. لذا نگاشت زیر را داریم:

$$h : A \xrightarrow{f} D \overset{g}{\cong} \bigoplus \mathbb{Q} \oplus (\bigoplus C(p^\infty)) \xrightarrow{\pi} \bigoplus \mathbb{Q}$$

اما طبق قضیه ی اول یکریختی $A/Ker(h) \cong Im(h) \subseteq \bigoplus \mathbb{Q}$. اگر $x \in Ker(h)$ باشد $(\pi g f)(x) = 0$. از طرفی $gf(x) = y_1 + y_2$ که در آن $y_1 \in \bigoplus \mathbb{Q}$ و $y_2 \in \bigoplus C(p^\infty)$، پس $y_1 = (\pi g f)(x) = 0$.

لذا با تقریب یکریختی $(gf)(x) = y_2 \in \bigoplus C(p^\infty)$ که در این صورت $(gf)(x)$ دارای مرتبه ی متناهی است، پس $n \in \mathbb{N}$ ای موجود است که $gf(nx) = n(gf(x)) = 0$ و چون gf یک به یک است $nx = 0$. از طرفی $Ker(h) \subseteq A$ بدون تاب است پس $x = 0$ و لذا $Ker(h) = 0$. بنابر این $A \cong Im(h) \subseteq \bigoplus \mathbb{Q}$، $\mathbb{Q}$ میدان است و زیر گروه غیرصفر آن خود $\mathbb{Q}$ است لذا هر زیرگروه از $\bigoplus \mathbb{Q}$ به صورت $\bigoplus_K \mathbb{Q}$ است که در آن K مجموعه ای اندیس گذار و $\bigoplus_K \mathbb{Q} \subseteq \bigoplus \mathbb{Q}$ است و در نتیجه $Im(h) = \bigoplus_K \mathbb{Q}$ و $A \cong \bigoplus_K \mathbb{Q}$. □

تعریف ۳۴.۱.۱ گروه A را گروه مخلوط می نامیم هرگاه هم شامل عناصر غیر صفر با مرتبه ی متناهی و هم شامل عناصری با مرتبه ی نامتناهی باشد.

قضیه ۳۵.۱.۱ T را مجموعه ی تمام عناصر گروه A درنظر می گیریم که دارای مرتبه ی متناهی باشند، در این صورت T زیرگروه تابی از A است و گروه خارج قسمتی A/T بدون تاب است.

برهان: بدیهی است . □

گزاره ۳۶.۱.۱ T بزرگ ترین زیرگروه تابی برای A است.

برهان: طبق قضیه ی قبل بدیهی است. □

تعریف ۳۷.۱.۱ گروه A را تجزیه ناپذیر گوییم هرگاه نتوان آن را به صورت جمع مستقیم زیر گروه های غیرصفرش نوشت، یعنی اگر $A = A_1 \oplus A_2$، آن گاه $A_1 = 0$ یا $A_2 = 0$.

قضیه ۳۸.۱.۱ در بین گروه هایی که بدون تاب نیستند تنها $C(p^k)$ که $1 \leq k \leq \infty$، تجزیه ناپذیر است .

برهان: به مرجع [۸] نتیجه ی ۲۴.۴ مراجعه شود. □

تعریف ۳۹.۱.۱ زیرگروه S از گروه آبلی A را زیرگروه محض می نامیم هرگاه برای هر عدد صحیح n، $nA \bigcap S = nS$.

تذکر ۴۰.۱.۱ چون A گروهی آبلی است رابطه ی $nS \subseteq nA \bigcap S$ همیشه برقرار است. بنابراین محض بودن منوط به برقراری طرف دیگر تساوی است. لذا محض بودن چنین بیان می کند که اگر $s = na$ $(a \in A, s \in S)$ را داشته باشیم در این صورت $s' \in S$ ای موجو د است که $s = ns'$. به بیان دیگر اگر عضوی از S توسط n در A تقسیم شود آن گاه در S هم توسط n تقسیم می شود.

برای برهان تمامی گزاره های ۴۱.۱.۱ الی ۵۰.۱.۱ به مرجع [۸] بخش ۲۳ مراجعه شود.

گزاره ۴۱.۱.۱ اگر برای هر عدد اول p و هر عدد صحیح k، $S \cap p^kA = p^kS$ برقرار باشد آن گاه S زیرگروه محض برای A است.

گزاره ۴۲.۱.۱ هر جمعوند مستقیم از یک گروه، زیرگروه محض است و زیرگروه های بدیهی محض هستند.

گزاره ۴۳.۱.۱ هر زیرگروه بخشی از یک گروه، زیرگروهی محض است. در گروه های بخشی زیر گروه محض بودن معادل با زیر گروه بخشی بودن است.

گزاره ۴۴.۱.۱ بزرگ ترین زیرگروه تابی از یک گروه مخلوط، زیرگروه محض برای آن است.

گزاره ۴۵.۱.۱ محض بودن خاصیت تعدی دارد، یعنی اگر S زیرگروه محض از T و T در A محض باشد آن گاه S در A محض می باشد.

گزاره ۴۶.۱.۱ اجتماع هر زنجیر افزایشی از زیرگروه های محض زیرگروهی محض است.

گزاره ۴۷.۱.۱ اگر گروه خارج قسمتی A/S بدون تاب باشد در این صورت S در A محض است.

گزاره ۴۸.۱.۱ فرض کنیم A یک p- گروه باشد، در این صورت زیرگروه S از A محض است اگر و تنها اگر برای هرعدد طبیعی k، $S\bigcap p^kA=p^kS$.

گزاره ۴۹.۱.۱ اگر S زیرگروه محض برای A باشد و T زیرگروهی برای S باشد در این صورت S/T در A/T محض است.

گزاره ۵۰.۱.۱ اگر T زیرگروه محض از A باشد و S/T زیرگروهی محض برای A/T باشد در این صورت S در A محض است.

تعریف ۵۱.۱.۱ گروه A را کران دار می نامیم هرگاه عددی طبیعی چون n موجود باشد که $nA=0$.

قضیه ۵۲.۱.۱ هر گروه کران دار به صورت جمع مستقیم گروه های دوری است.

برهان: به مرجع [۸] قضیه ی ۱۱.۲ مراجعه شود. □

قضیه ۵۳.۱.۱ هر زیرگروه کران دار و محض از یک گروه، جمعوند مستقیمی برای آن است.

برهان: به مرجع [۸] قضیه ی ۲۵.۴ مراجعه شود. □

قضیه ۵۴.۱.۱ زیرگروه S از A محض است اگر و تنها اگر برای هر عدد طبیعی n، S/nS جمعوند مستقیم برای A/nS باشد.

برهان: به مرجع [۸] قضیه ی ۲۴.۹ مراجعه شود. □