بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه سیستان و بلوچستان
تحصیلات تکمیلی

پایان نامه کارشناسی ارشد در رشته ریاضی محض

عنوان:

عملگرهای هرمیتی و توابع محدب

استاد راهنما:
رحمت الله لشکری پور

تحقیق و نگارش:
موسی شامحمدی

بهمن ۸۶

بسمه تعالی

این پایان نامه با عنوان عملگرهای هرمیتی و توابع محدب قسمتی از برنامه آموزشی دوره کارشناسی ارشد ریاضی محض توسط دانشجو موسی شامحمدی تحت راهنمایی استاد پایان نامه دکتر رحمت الله لشکری پور تهیه شده است. استفاده از مطالب آن به منظور اهداف آموزشی با ذکر مرجع و اطلاع کتبی به حوزه تحصیلات تکمیلی دانشگاه سیستان و بلوچستان مجاز می باشد.

موسی شامحمدی

این پایان نامه ۶ واحد درسی شناخته می شود و در تاریخ ۸۶/۱۱/۴ توسط هیئت داوران بررسی و درجه ...عالی... به آن تعلق گرفت.

	نام و نام خانوادگی	امضاء	تاریخ
۱- استاد را هنما:	دکتر رحمت الله لشکری پور		
۲- داور ۱:	دکتر غلامرضا رضایی		
۳- داور ۲:	دکتر اکبر گلچین		
۴- نماینده تحصیلات تکمیلی:	دکتر حسن رضایی		

دانشگاه سیستان و بلوچستان

تعهدنامه اصالت اثر

اینجانب موسی شامحمدی تأیید می کنم که مطالب مندرج در این پایان نامه حاصل کار پژوهشی اینجانب است و به دستاوردهای پژوهشی دیگران که در این نوشته از آن استفاده شده است مطابق مقررات ارجاع گردیده است. این پایان نامه پیش از این برای احراز هیچ مدرک هم سطح یا بالاتر ارائه نشده است.

کلیه حقوق مادی و معنوی این اثر متعلق به دانشگاه سیستان و بلوچستان می باشد.

موسی شامحمدی

امضاء

تقدیم به:

ساحت مقدس مولایم علی (ع)

خانواده ام

و همسفر زندگی ام

سپاسگزاری

با حمد و سپاس فراوان به درگاه خداوند متعال که به بنده حقیر سعادت تلاش و کوشش در راه کسب علم و دانش را عنایت نمود. امیدوارم با یاری خداوند تعالی آنچه را فراگرفته ام، در راه رضای او و پیشرفت جامعه به کار گیرم.

پیمودن این راه میسر نمی شد مگر با یاد خدا و راهنمایی های استاد گرامی، دکتر رحمت الله لشکری پور که با متانت و خلق و خوی نیکو مرا یاری نمودند. از آقایان دکتر رضایی و دکتر گلچین که داوری پایان نامه ام را متقبل شده اند، سپاسگزارم.

از کارشناسان محترم گروه ریاضی، سرکار خانم پاک، مبینی، راشکی و دوستان عزیزم اصغر قربانپور، آنوش ترک قشقایی، ابراهیم مرادی، محمد هادی رستمی قربانی، محسن یزدی، غلامرضا طالبی، و همچنین از سرکار خانم حسینی و تمام کسانی که به نحوی اینجانب را یاری رسانند، تشکر و قدر دانی می کنم. از خداوند متعال برای این عزیزان موفقیت و کامیابی خواستارم.

از همسر گرامیم و خانواده محترم ایشان، که در مراحل انجام پایان نامه محیطی سرشار از آرامش و اعتماد به نفس فراهم ساختند بسیار سپاسگزارم.

از پدر خوبم، برادران و خواهرانم که در طول دوران تحصیل همواره مشوق و یاریگرم بوده اند کمال تشکر و قدردانی دارم.

در پایان از تمام کسانی که در انجام پایان نامه همکاری صمیمی داشته اند تشکر می نمایم.

موسی شامحمدی

چکیده

در این پایان نامه ابتدا نشان می دهیم که برای هر عملگر هرمیتی A و هر تابع محدب یکانی f عملگر یکانی U روی $\mathcal{E}$ وجود دارد بطوریکه

$$f(A_{\varepsilon}) \leq Uf(A)_{\varepsilon}U^{*}.$$

رابطه بالا در حالت کلی برای توابع محدب برقرار نیست. اما برای هر عملگر هرمیتی A، تابع محدب f و زیر فضای $\mathcal{E}$ عملگرهای یکانی مانند U و V روی $\mathcal{E}$ موجودند بطوریکه ،

$$f(A_{\varepsilon}) \leq \frac{Uf(A)_{\varepsilon}U^{*} + Vf(A)_{\varepsilon}V^{*}}{2}$$

کلمات کلیدی: عملگرهای هرمیتی، مقادیر ویژه، نامساوی های عملگری، نامساوی جن–سن

مقدمه

یکی از زمینه‌های تحقیقاتی در آنالیز ماتریسی و جبرخطی ارائه نامساوی‌های عملگری به ویژه عملگرهای هرمیتی است.

در سال ۱۹۵۴ ون نیومن[1] نامساوی های زیادی از جمله نامساوی اثری ون نیومن برای عملگرهای هرمیتی را بیان و اثبات کرد. در ادامه این، بهاتیا[2] مقالاتی زیادی در سال های ۱۹۸۱ و ۱۹۸۷ در زمینه نامساوی های عملگرهای هرمیتی و توابع محدب به چاپ رساند.

در حال حاضر نیز ریاضی دانان زیادی از جمله هن سن و پدرسن از دانمارک و بورین[3] از فرانسه در این زمینه تحقیق می نمایند و نامساوی های محدبی و مقعری برای عملگرهای هرمیتی را بیان و اثبات کرده‌اند.

در این پایان نامه نیر کارهای بورین که نشان داده این نامساوی های عملگری را می توان با استفاده از متراکم سازی برای همه توابع محدب توسیع داد، مورد بررسی قرار می‌دهیم.

---

[1] Von Neuman

[2] R. Bhatia

[3] J. C. Bourin

فهرست مندرجات

۱ تعاریف و قضایای مقدماتی ۴

۱.۱ مقدمه ۵

۲.۱ عملگرها و ماتریس‌های هرمیتی ۵

۳.۱ توابع یکنوای عملگری و محدب عملگری ۱۲

۴.۱ عملگر تصویر و بیان چند نامساوی مشهور ۲۱

۲ نامساوی های محدبی یا مقعری برای عملگرهای هرمیتی ۲۵

۱.۲ مقدمه ۲۶

۲.۲ متراکم سازی و توابع محدب ۲۷

۳.۲ انقباض ها و توابع محدب ۳۴

۴.۲ نامساویی هایی شامل عملگرهای انبساطی ۴۱

۳ عملگرهای هرمیتی و توابع محدب ۵۴

۱.۳ متراکم سازی ۵۶

۲.۳ ترکیبات محدب ۶۰

A نامساوی اثری راتفلد ۶۳

B مراجع ۶۵

C واژه‌نامه انگلیسی به فارسی ۶۷

فصل ۱

تعاریف و قضایای مقدماتی

۱.۱ مقدمه

در این فصل تعاریف و قضایای اساسی مورد نیاز را بیان می کنیم.
در بخش دوم ابتدا فضاهای هیلبرت، عملگرهای خطی هرمیتی، معین، نیمه معین، یکانی، مقادیر ویژه و طیف یک عملگر را تعریف و خواص آنها را بررسی می کنیم. سپس در بخش سوم پس از تعریف توابع یکنوا عملگری و محدب عملگری، به بیان خواص آنها خواهیم پرداخت و مثال ها و قضایایی را در این مورد ارائه می کنیم.
در نهایت در بخش چهارم به بیان عملگر تصویر و چند نامساوی مشهور از توابع محدب و عملگرهای هرمیتی می پردازیم.

۲.۱ عملگرها و ماتریس‌های هرمیتی

ابتداد در این بخش عملگر خطی را تعریف و ویژگی های آن را مورد بررسی قرار می دهیم.
در تمام فصول این پایان نامه فضای ماتریس های مختلط $m \times n$ را با $M_{m\times n}$ و $n \times n$ را با M_n نشان خواهیم داد.
حروف $A, B, ..., Z$ برای ماتریس‌های مختلط $n \times n$ و یا عملگرهای روی فضای هیلبرت با بعد متناهی $\mathcal{H}$، و فضای همه عملگرهای خطی کراندار روی فضای هیلبرت جدایی پذیر $\mathcal{H}$ را با $B(\mathcal{H})$ نمایش می دهیم.

تعریف ۱.۲.۱: یک فضای ضرب داخلی یک فضای برداری مختلط به همراه یک ضرب داخلی، $\langle .,. \rangle : X \times X \to F$ است که در شرایط زیر صدق می کند:

(۱) برای هر $x, y \in X$ و $\alpha, \beta \in F$ $\qquad \langle \alpha x + \beta y, z\rangle = \alpha\langle x, z\rangle + \beta\langle y, z\rangle$

(۲) برای هر $x, y \in X$ $\qquad \langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$

(۳) برای هر $x, y \in X$ و $\alpha, \beta \in F$ $\qquad \langle x, \alpha y + \beta z\rangle = \overline{\alpha}\langle x, y\rangle + \overline{\beta}\langle x, z\rangle$

(۴) اگر $\langle x, x\rangle = 0$، آنگاه $x = 0$.

با توجه به ضرب داخلی بالا، نرم زیر را روی فضای ضرب داخلی X تعریف می کنیم:

$$||x|| = \langle x, x\rangle^{\frac{1}{2}}.$$

یک فضای هیلبرت، فضای ضرب داخلی است، که تحت نرم $||x|| = \langle x, x\rangle^{\frac{1}{2}}$ کامل است.

تعریف ۲.۲.۱: فرض کنید $\mathcal{H}$ و $\mathcal{K}$ فضاهای هیلبرت باشند. $T : \mathcal{H} \to \mathcal{F}$ یک نگاشت خطی است هرگاه برای هر $h_1, h_2 \in \mathcal{H}$ و $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathcal{F}$ داشته باشیم:

$$T(\alpha_1 h_1 + \alpha_2 h_2) = \alpha_1 T(h_1) + \alpha_2 T(h_2).$$

در این صورت T را یک عملگر خطی از فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ به توی $\mathcal{K}$ می‌گوییم و مجموعه همه عملگرهای خطی کراندار از $\mathcal{H}$ به توی $\mathcal{K}$ را با $\mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ نمایش می دهیم.

قضیه ۳.۲.۱: فرض کنید $u : \mathcal{H} \times \mathcal{K} \to \mathcal{F}$ یک شبه خطی و دارای کران M باشد. آنگاه عملگرهای منحصربفرد $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ و $B \in \mathcal{B}(\mathcal{K}, \mathcal{H})$ وجود دارند بطوریکه برای هر $h \in \mathcal{H}$، $k \in \mathcal{K}$ و $||A||, ||B|| \leq M$

$$u(h, k) = \langle Ah, k\rangle = \langle h, Bk\rangle.$$

تعریف ۴.۲.۱: نرم عملگر خطی T را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$\begin{aligned} ||T|| &= sup \ \ \{||Th|| \ : h \in H \quad , ||h|| \leq 1\} \\ &= sup \ \ \{||Th|| \ : ||h|| = 1\} \\ &= sup \ \ \{\tfrac{||Th||}{||h||} \ : h \neq 0\} \\ &= inf \ \ \{c > 0 \ : ||Th|| \leq c||h||, h \in H\}. \end{aligned}$$

تعریف ۵.۲.۱: اگر $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$، آنگاه عملگر منحصربفرد $B \in \mathcal{B}(\mathcal{K}, \mathcal{H})$، که در تساوی $\langle Ah, k\rangle = \langle h, Bk\rangle$ صدق می کند، الحاق A نامیده می شود و به صورت $B = A^*$ نمایش می دهیم. در حقیقت برای هر $h \in \mathcal{H}$ و $k \in \mathcal{K}$ داریم

$$\langle Ah, k\rangle = \langle h, A^* k\rangle.$$

تعریف ۶.۲.۱: اگر $A = A^*$، عملگر A را خود الحاق یا هرمیتی می نامیم.

تعریف ۷.۲.۱: ماتریس $A \in M_n$ را هرمیتی گوییم، اگر با ترانهاده مزدوج خود برابر باشد، یعنی

$$A = A^* = \bar{A}^T.$$

بطور مثال:

$$A = \begin{pmatrix} ۳ - ۲i & ۱ \\ ۱ & i \end{pmatrix} \qquad \text{و} \qquad \bar{A}^T = \begin{pmatrix} ۳ + ۲i & ۱ \\ ۱ & -i \end{pmatrix}$$

هر ماتریس $T \in M_{m\times n}$ را می توان به صورت $T = A + iB$ نوشت، که B و A هرمیتی هستند:

$$A = \frac{T + T^*}{۲}, \qquad B = \frac{T - T^*}{۲i}.$$

این یک تجزیه دکارتی از ماتریس است و A و B به ترتیب قسمت های حقیقی و موهومی T نامیده می شوند.

تعریف ۸.۲.۱: اگر $A^*A = AA^*$، عملگر A را نرمال می نامیم.

تعریف ۹.۲.۱: اگر $AA^* = I = A^*A$، عملگر A را یکانی می نامیم.

قضیه ۱۰.۲.۱ [۲] (قضیه طیفی برای ماتریس های هرمیتی): فرض کنید $A \in M_n$. دراین صورت A هرمیتی است اگر و فقط اگر ماتریس یکانی $U \in M_n$ و ماتریس قطری حقیقی $D \in M_n$ وجود داشته باشد بطوریکه $A = UDU^*$. بعلاوه A حقیقی و هرمیتی است اگر و فقط اگر ماتریس متعامد حقیقی $P \in M_n$ و ماتریس قطری $D \in M_n$ وجود داشته باشد بطوریکه $A = PDP^T$.

تعریف ۱۱.۲.۱: یک نرم روی ماتریس های $M_{m\times n}$ متقارن است اگر برای هر $A \in M_{m\times n}$ و عملگرهای یکانی U و V داشته باشیم:

$$||UAV|| = ||A||.$$

قضیه ۱۲.۲.۱ [٦] : اگر $\mathcal{H}$ یک فضای $\mathbb{C}-$ هیلبرت و $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$، آنگاه A هرمیتی است اگر و تنها اگر برای هر $h \in \mathcal{H}$

$$\langle Ah, h\rangle \in \mathbb{R}.$$

قضیه ۱۳.۲.۱ [٦] : اگر $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ یک عملگر هرمیتی باشد، آنگاه

$$||A|| = sup \ \{\langle Ah, h\rangle \quad : h \in H \quad , ||h|| = ۱\}.$$

تعریف ۱۴.۲.۱: اگر $||A|| \leq ۱$، عملگر A را انقباض می نامیم.

گزاره ۱۵.۲.۱ [۱] : عملگر A روی $\mathcal{H}$ انقباض است اگر و تنها اگر عملگر $\begin{pmatrix} I & A^* \\ A & I \end{pmatrix}$ روی $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$ مثبت باشد.

تعریف ۱٦.۲.۱: عملگر هرمیتی A را نیمه معین مثبت گوییم، اگر برای هر $h \in \mathcal{H}$، $\langle Ah, h\rangle \geq ۰$. در حقیقت A یک عملگر مثبت است و معمولا با نماد $A \geq ۰$ نشان می دهیم. از طرفی برای هر $A \in M_n$ و $x, y \in \mathcal{H}$، داریم

$$۴\langle Ax \ , \ y\rangle = \sum_{k=۰}^{۳} i^k \langle A(x + i^k y) \ , \ x + i^k y\rangle, \qquad (۱-۱)$$

$$۴\langle x \ , \ Ay\rangle = \sum_{k=۰}^{۳} i^k \langle x + i^k y \ , \ A(x + i^k y)\rangle, \qquad (۲-۱)$$

که $i = \sqrt{-۱}$.

بنابراین برای هر ماتریس نیمه معین مثبت A داریم،

$$\langle Ax \ , \ x\rangle = \langle x \ , \ Ax\rangle. \qquad (۳-۱)$$

تساوی های $(۱-۱)$، $(۱-۲)$ و $(۱-۳)$ نتیجه می دهند که هر ماتریس نیمه معین مثبت لزوماً هرمیتی است.

تعریف ۱۷.۲.۱: اگر برای هر $۰ \neq h \in \mathcal{H}$ ،$\langle Ah, h\rangle > ۰$، A معین مثبت یا مثبت سره است

و به صورت $A > 0$ نمایش می دهیم.

تعریف ۱۸.۲.۱: برای هر عملگر A، A^*A همیشه مثبت است و $|A| = (A^*A)^{\frac{1}{2}}$. حال مقادیر تکین A همان مقادیر ویژه $|A|$ می باشند و برای $j = 1, 2, ...$ با $s_j(A)$ نشان می دهیم، که در یک ترتیب غیر صعودی به تعداد تکرارشان (لزوما متناهی) مرتب شده‌اند:

$$s_1(A) \geq s_2(A) \geq ...$$

تعریف ۱۹.۲.۱: عدد مختلط λ یک مقدار ویژه ماتریس مربعی A است، اگر یک بردار ناصفر u در C^n وجود داشته باشد بطوریکه

$$Au = \lambda u.$$

عدد u را یک بردار ویژه متناظر با λ می نامیم. مجموعه مقادیر ویژه را طیف نقطه‌ای A می نامیم و با $\sigma_p(A)$ نمایش می دهیم. یک مقدار ویژه A ریشه چند جمله ای مشخصه است. در حقیقت λ یک مقدار ویژه A است اگر و تنها اگر

$$det(A - \lambda I) \equiv P_A(\lambda) = 0.$$

ماکزیمم قدر مطلق همه مقادیر ویژه A شعاع طیفی A نامیده می شود و با $\rho(A)$ نمایش می دهیم:

$$\rho(A) = \max_{\lambda \in \sigma(A)} |\lambda|.$$

تعریف ۲۰.۲.۱: اثر یک ماتریس جمع همه عنصرهای روی قطر آن است، یعنی

$$tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

یادآوری: اگر مقادیر ویژه به طور صعودی مرتب شده باشند، یعنی $\lambda_1(A) \leq \lambda_2(A) \leq ...$، به صورت $\lambda_j^{\uparrow}(A)$ یا $\lambda^{\uparrow}(A) = (\lambda_1^{\uparrow}(A), \lambda_2^{\uparrow}(A), ...)$ و اگر به صورت نزولی مرتب شده باشند با $\lambda_j^{\downarrow}(A)$ یا $\lambda^{\downarrow}(A) = (\lambda_1^{\downarrow}(A), \lambda_2^{\downarrow}(A), ...)$ نمایش می دهیم و همراه با تعداد تکرارشان در نظر می گیریم.

قضیه ۲۱.۲.۱ (نامساوی پوانکاره [1]): فرض کنید A یک عملگر هرمیتی روی $\mathcal{H}$ و $\mathcal{M}$ زیر

[1] poincare

فضای k بعدی از $\mathcal{H}$ باشد. دراین صورت بردارهای یکه x و y در $\mathcal{M}$ وجود دارند بطوریکه

$$\langle x, Ax\rangle \ \leq \ \lambda_k{}^{\downarrow}(A), \quad \langle y, Ay\rangle \ \geq \ \lambda_k{}^{\uparrow}(A).$$

برهان: فرض کنید $\mathcal{N}$ زیر فضای تولید شده توسط بردارهای ویژه $u_n, ..., u_k$ متناظر با مقادیر ویژه $\lambda_n{}^{\downarrow}, ..., \lambda_{k+1}{}^{\downarrow}, \lambda_k{}^{\downarrow}$ باشد. آنگاه

$$\dim \mathcal{M} + \dim \mathcal{N} = k + (n - k + 1) = n + 1.$$

بنابر این اشتراک $\mathcal{N}$ و $\mathcal{M}$ نابدیهی است، زیرا اگر بدیهی باشد،

$$\dim(\mathcal{M} + \mathcal{N}) + \dim(\mathcal{N} \cap \mathcal{M}) = \dim \mathcal{M} + \dim \mathcal{N} = n + 1.$$

پس با توجه به فرض خلف $\dim(\mathcal{N} \cap \mathcal{M}) = 0$ به تناقض رسیدیم. بردار یکانی x در $\mathcal{M} \bigcap \mathcal{N}$ را در نظر بگیرید. آنگاه $x = \sum_{j=k}^{n} \xi_j u_j$، که $\sum_{j=k}^{n} |\xi_j|^2 = 1$. بنابراین

$$\langle x, Ax\rangle = \sum_{j=k}^{n} |\xi_j|^2 \lambda^{\downarrow}{}_j(A) \leq \sum_{j=k}^{n} |\xi_j|^2 \lambda^{\downarrow}{}_k(A) = \lambda^{\downarrow}{}_k(A).$$

لذا حکم قسمت اول اثبات شد.

همچنین با تکرار دلایل ذکر شده و بکارگیری آنها روی فضای k بعدی $\mathcal{M}$ و $(n - k + 1)$ بعدی تولید شده با بردارهای $u_1, u_2, ..., u_{n-k+1}$، و جایگزین کردن $-A$ با A قسمت دوم را می توان نتیجه گرفت.
∎

قضیه ۲۲.۲.۱ (اصل مینیمم – ماکزیمم[۲]): فرض کنید A یک عملگر هرمیتی روی $\mathcal{H}$ باشد. آنگاه

$$\lambda_j(A) = \max_{\substack{\mathcal{M} \subset \mathcal{H} \\ \dim \mathcal{M} = k}} \ \min_{\substack{x \in \mathcal{M} \\ \|x\| = 1}} \langle x, Ax\rangle = \min_{\substack{\mathcal{M} \subset \mathcal{H} \\ \dim \mathcal{M} = n-k+1}} \ \max_{\substack{x \in \mathcal{M} \\ \|x\| = 1}} \langle x, Ax\rangle\,.$$

برهان: بنابه نامساوی پوانکاره، اگر $\mathcal{M}$ یک زیرفضای k–بعدی دلخواه از فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ باشد، آنگاه

$$\min \langle x, Ax\rangle \ \leq \ \lambda^{\downarrow}{}_k(A),$$

[۲] Minimax

که x بردار یکانی در $\mathcal{M}$ است. اما اگر $\mathcal{M}$ فضای تولید شده توسط $\{u_1, u_2, ..., u_k\}$ باشد، آنگاه این نامساوی به تساوی تبدیل می شود. در این صورت قسمت اول بدست می آید.

حکم دوم، از به کار بردن $-A$ به جای A بدست می آید.

■

حال چند رابطه بین مقادیر ویژه ماتریس های هرمیتی A و B و $A+B$، که به نامساوی های ویل مشهور است، را بیان می کنیم. نماد $A \leq B$ به این معنی است که A و B هرمیتی هستند و $B-A$ مثبت است. نماد «$\leq$» یک ترتیب جزئی روی ماتریس های هرمیتی است.

لم ۲۳.۲.۱ [۲] (اصل یکنوایی ویل[۳]): برای $A, B \in M_n$ داریم

$$A \geq B \qquad \Rightarrow \qquad \lambda_j(A) \geq \lambda_j(B).$$

قضیه ۲۴.۲.۱ [۱] : فرض کنید A و B ماتریس های هرمیتی $n \times n$ باشند. آنگاه

$$\lambda_j^{\downarrow}(A+B) \leq \lambda_j^{\downarrow}(A) + \lambda_{j-i+1}^{\downarrow}(B), \qquad i \leq j,$$

$$\lambda_j^{\downarrow}(A+B) \geq \lambda_j^{\downarrow}(A) + \lambda_{j-i+n}^{\downarrow}(B), \qquad i \geq j.$$

و اگر برای هر $j = 1, 2, ...$ قرار دهید $i = j$، داریم

$$\lambda_j^{\downarrow}(A) + \lambda_n^{\downarrow}(B) \leq \lambda_j^{\downarrow}(A+B) \leq \lambda_j^{\downarrow}(A) + \lambda_1^{\downarrow}(B).$$

لم ۲۵.۲.۱ [۱۲] (اصل مینیمم): فرض کنید $A \in M_n$ هرمیتی باشد. آنگاه برای هر $1 \leq k \leq n$ داریم

$$\sum_{j=n-k+1}^{n} \lambda_j(A) = \min\{trU^*AU \quad : U^*U = I \quad \text{و} \quad U \in M_n\}.$$

لم ۲۶.۲.۱ [۱۲] : فرض کنید $A \in M_n$ هرمیتی باشد. آنگاه برای هر $1 \leq k \leq n$ داریم

$$\sum_{j}^{k} \lambda_j(A) = \max \sum_{j}^{k} \langle Ax_j, x_j \rangle,$$

---

[۳] Weyl

که ماکزیمم روی k تائی های یکه $(x_1, x_2, ..., x_n) \in C^n$ گرفته می شود.

تعریف ۲۷.۲.۱: اگر $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$، آنگاه طیف عملگر T مجموعه همه λ هایی است که $T - \lambda I$ معکوس پذیر نباشد:

$$\sigma(T) = \{\lambda \in F \quad : \quad T - \lambda I \quad \text{معکوس پذیر نباشد}\},$$

که $\mathcal{F}$ میدان اسکالر فضای $\mathcal{H}$ می باشد.

قضیه ۲۸.۲.۱: اگر $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$، آنگاه

$$\sigma(T^*) = \{\bar{\lambda} \quad : \quad \lambda \in \sigma(T)\}.$$

برهان: T معکوس پذیر است اگر و تنها اگر T^* معکوس پذیر باشد و $T - \lambda$ معکوس پذیر است اگر و تنها اگر $(T - \lambda)^*$ معکوس پذیر باشد. لذا $T - \lambda$ معکوس ناپذیر است اگر و تنها اگر $T^* - \bar{\lambda}$ معکوس ناپذیر باشد.

بنابراین $\quad \lambda \in \sigma(T) \Leftrightarrow \bar{\lambda} \in \sigma(T^*)$

لذا با توجه به قضیه بالا قضیه زیر را داریم.

قضیه ۲۹.۲.۱ [۶] : اگر T خود الحاق باشد، آنگاه $\sigma(T) \subseteq R$

گزاره ۳۰.۲.۱ [۶] : اگر $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ هرمیتی باشد، آنگاه

$$\sigma(T) \subseteq [-||T||, ||T||].$$

با توجه به قضیه‌های بیان شده در بالا عملگرهای هرمیتی طیف خود را روی محور حقیقی اختیار می کنند.

۳.۱ توابع یکنوای عملگری و محدب عملگری

در این بخش یک رده بندی مفید از توابع با مقدار حقیقی، که یکنوای عملگری نامیده می شود، را ارائه می دهیم.

تعریف ۱.۳.۱: فرض کنید $S \subset \mathbb{R}^n$ محدب باشد. تابع $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ روی S محدب است، اگر به ازا هر $x, y \in S$ و $\lambda \in [۰, ۱]$

$$\varphi((۱-\lambda)x + \lambda y) \leq (۱-\lambda)\varphi(x) + \lambda\varphi(y).$$

تعریف ۲.۳.۱: تابع φ مقعر نامیده می شود، اگر $\varphi-$ محدب باشد.

فرض کنید تابع با مقدار حقیقی f روی بازه I تعریف شده باشد. اگر $D = diag(\lambda_۱, ..., \lambda_n)$ یک ماتریس قطری باشد بطوریکه λ_j ها، درایه های روی قطر آن، در بازه I هستند. $f(D)$ را بصورت زیر تعریف می کنیم

$$f(D) = diag(f(\lambda_۱), ...f(\lambda_n)).$$

اگر A یک ماتریس هرمیتی باشد بطوریکه λ_j ها مقادیر ویژه آن در بازه I باشند، آنگاه بنا به قضیه طیفی برای ماتریس های هرمیتی عملگر یکانی U وجود دارد بطوریکه $A = UDU^*$ در اینجا D قطری است و تعریف می کنیم:

$$f(A) = Uf(D)U^*.$$

بنابراین می توانیم $f(A)$ را برای همه ماتریس های هرمیتی (با هر مرتبه‌ای) با مقادیر ویژه در I تعریف کنیم.

تعریف ۳.۳.۱: تابع f یکنوای ماتریسی از مرتبه n گفته می شود، اگر نسبت به ترتیب جزئی ماتریس های هرمیتی $n \times n$ مرتب باشد، به این معنی که اگر $A \leq B$، آنگاه

$$f(A) \leq f(B).$$

تعریف ۴.۳.۱: اگر f یکنوای ماتریسی برای هر n باشد، آنگاه f یکنوای ماتریسی یا یکنوای عملگری است.

تعریف ۵.۳.۱: تابع f محدب ماتریسی از مرتبه n گفته می شود، اگر برای همه ماتریس های هرمیتی $n \times n$، A و B و برای هر عدد حقیقی $۰ \leq \lambda \leq ۱$، داشته باشیم:

$$f((۱-\lambda)A + \lambda B) \leq (۱-\lambda)f(A) + \lambda f(B).$$