بسم الله الرحمن الرحیم

به نام او که انسان را آفرید و به انسان قدرت تفکر، تجسم و خلاقیت بخشید.

او که به انسان قدرت تجزیه و تحلیل و آنالیز داد.

او که به انسان توان داد تا در جبر زندگی مختارانه عمل کند.

او که به انسان منطق داد تا در انتخاب مختارانه اش اندیشه کند.

او که به انسان درست و نادرست را نمود اما انتخاب مسیر را به خودش واگذار کرد.

مهندس بزرگی که به انسان هندسه آموخت تا از آن بهره ببرد.

دانشگاه ارومیه

همریختی‌های فشرده‌ی جبرهای URM

مستوره مفاخری

دانشکده‌ی علوم

گروه ریاضی

پایان‌نامه برای دریافت درجه‌ی کارشناسی ارشد

استاد راهنما:

دکتر علی عبادیان

بهمن ۸۷

پایان نامه مستوره مفاخری به تاریخ ۸۷/۱۱/۲۷ شماره ـــ مورد پذیرش هیات محترم داوران با رتبه عالی

و نمره ۱۸ هجده قرار گرفت.

۱- استاد راهنما و رئیس هیأت داوران: **دکتر علی عبادیان**

۲- استاد مشاور:

۳- داور خارجی: **دکتر سعید استاد باشی**

٤- داور داخلی: **دکتر رسول آقالاری**

٥- نماینده تحصیلات تکمیلی: **دکتر مجید اسم حسینی**

تقدیم به روح پدرم که اولین و بهترین مربی، معلم و مشوق من بود.

تقدیم به مادرم که اولین و بهترین مربی، معلم و مشوق من بوده و هست.

تقدیم به برادران و خواهرانم که همواره پشتیبان، راهنما و مشوق من بوده اند.

تقدیم به تمام کسانی که به نحوی در تعلیم، آموزش و یادگیری من سهیم بوده اند.

و تقدیم به تمام کسانی که برای گسترش علم و کشف اسرار خلقت و کمک به دیگران در تلاشند.

«دانشمند طبیعت را به خاطر فایده‌اش مطالعه نمی‌کند، آن‌را برای این مطالعه می‌کند که از آن لذت می‌برد و از طبیعت لذت می‌برد زیرا که زیباست. اگر طبیعت زیبا نبود، ارزش شناختن نداشت و اگر طبیعت ارزش شناختن نداشت، زندگی هم ارزش زیستن نداشت.
البته من در اینجا از آن‌گونه زیبایی که حواس را متأثر می‌کند یعنی از زیبایی اوصاف و ظواهر سخن نمی‌گویم، نه آنکه این‌گونه زیبایی را دست کم بگیرم، چنین نیست. اما این زیبایی ربطی به علوم ندارد، منظورم زیبایی ژرف‌تریست که از نظم هماهنگ اجزا به‌وجود می آید و هوش ناب قادر به درک آن است.»

هانری پوانکاره

ریاضیات جهانی پر از رمز و راز وشگفتی است که شور و هیجان کشف و دیدن جهانی تازه میل ورود به آن را ایجاد می‌کند. با ورود به این جهان در همان گام اول منطق ونظم زیبای اجزایش تفکرات را دگرگون می‌کند و با برداشتن هر گام دریچه‌ای از یک زیبایی وصف ناپذیر بر ذهن گشوده می‌شود.
در این دنیای سراسر نظم و پیچیدگی و زیبایی روان و ذهن آدمی متأثر می‌شود و موسیقی روح‌نواز آهنگ موزونش ذهن را به وجد می آورد. و این‌ها ذهن کنجکاو را بر آن می‌دارد تا جزء به جزء آن را ببیند. امّا گستردگی آن و عمر کم آدمی مجال این کار را به او نمی‌دهد. به ناچار انسان می‌ماند و یک جهان بزرگ پر از شگفتی که نمی‌تواند همه‌ی رازهای آن‌را کشف کند و ناچار است به قطره ای از دریا اکتفا کند. و بالاخره ذهن می‌ماند و شگفتی و اندک دانش و دنیایی پر از اسرار ناشناخته.

منت خدای را عزّ و جل که طاعتش موجب قربت است و به شکر اندرش مزید نعمت.
خدا را سپاس که به لطف عنایت و توجهش توانستم قدم در راهی بگذارم که روز به روز برای پیمودنش مشتاق‌تر می‌شوم.

از خانواده‌ی عزیزم که همیشه و در هر کار و تصمیمی یار، کمک و بهترین راهنما و مشاورانم بوده‌اند و با سخنان خود همواره به من دلگرمی داده‌اند، عزیزترین کسانی که همواره و در هر شرایطی مرا به ادامه تحصیل، کسب علم و رسیدن به مراحل بالاتر تشویق کرده‌اند، تشکر می‌کنم و امیدوارم که در سایه‌ی لطف خداوندی سالم و سربلند و موفق باشند.

از استاد راهنمای محترم آقای دکتر علی عبادیان که در این دوره با راهنمایی های استادانه‌شان نه تنها در انجام این پروژه بلکه در زمینه‌های دیگر نیز مرا راهنمایی کردند و همچنین از اساتید محترم دیگر آقایان دکترشمس، دکترآقالاری ، دکتراستادباشی، دکتراسکویی و دکترسزیده وهمچنین از آقای دکتر رضاپور که با تدریس زیبایشان مشوق اصلی من برای ادامه تحصیل در شاخه‌ی آنالیز بودند متشکرم و امیدوارم که همگی موفق و سربلند باشند و افراد بیشتری بتوانند از دانش و معلوماتشان بهره‌مند شوند.

همچنین از دوست خوبم خانم فرزانه میرزایی که همیشه دوستانه و صمیمانه به من کمک کرده است. و همچنین از تمامی دوستان عزیز و همکلاسی‌هایم تشکر می‌کنم و امیدوارم که همیشه موفق و سربلند باشند.

فهرست مندرجات

چکیده

در این پایان‌نامه با معرفی جبرهای URM و قسمت‌های گلیسون، شرایط فشردگی یا ضعیفاً فشرده بودن یک همریختی بر یک جبر URM را بررسی می‌کنیم. همچنین ثابت می‌کنیم که هر همریختی از یک جبر URM بتوی جبر $D^1(X)$ با اعمال شرایطی ویژه بر X فشرده است. همچنین ثابت می‌کنیم که هر همریختی ضعیفاً فشرده از یک جبر URM بتوی یک جبر یکنواخت یا یک جبر باناخ منظم یکدار فشرده است.

علاوه بر آن طیف خودریختی‌های فشرده‌ی جبرهای URM را بر فضاهای همبند فشرده‌ی هاسدورف مشخص می‌کنیم. در آخر ثابت می‌کنیم که هر همریختی از یک جبر URM بتوی یک جبر لیپ‌شیتس فشرده است و ازاین مطلب چند نتیجه می‌گیریم.

پیشگفتار

همان‌طور که می دانیم در آنالیز تابعی جبرهایی که دارای یک نرم تام باشند از اهمیت ویژه‌ای برخوردارند. همچنین همریختی‌های فشرده بین دو جبر نرمدار بسیار مورد استفاده قرار می‌گیرند. لذا این‌که بتوان ثابت کرد یک همریختی بر یک جبر نرمدار فشرده است دارای اهمیت خاصی است. بعلاوه می‌دانیم که مجموعه‌ی توابع مختلط مقدار پیوسته بر یک فضای هاسدورف فشرده بسیار مورد توجه است. جبرهای تابعی باناخ و جبرهای یکنواخت نیز چون زیر جبری از این مجموعه با داشتن شرایط خاص از جمله دارا بودن توابع ثابت ، و دارا بودن توابع جدا کننده‌ی فضا بسیار مورد توجه‌اند. ما در این پایان نامه مطالبی در زمینه این جبرها و همچنین فشردگی یک همریختی بر گروه خاصی از این جبرها ارایه می‌کنیم وچون این جبرها یکدار هستند قضایای مقدماتی را برای جبرهای یکدار بیان می‌کنیم. بعلاوه به‌دلیل حجم زیاد مطالب از آوردن بعضی از مفاهیم توپولوژی وآنالیز حقیقی که به کار برده‌ایم، خودداری کرده‌ایم. که در اینجا شرح مختصری از مطالب موجود در این پایان‌نامه را بیان می‌کنیم.

در فصل اول این پایان‌نامه، تعاریف و قضایایی را که در فصل‌های بعدی مورد نیاز است می آوریم.

در فصل دوم، تعاریف اصلی که زمینه‌ی کار ما را فراهم می‌کنند بیان می‌کنیم. تعاریفی از جمله جبرهای یکنواخت جبرهای منظم و قسمت‌های گلیسون و روابط و قضایای اساسی مربوط به این مفاهیم را بیان می‌کنیم. که قسمت‌های گلیسون در اثبات قضایای بعدی نقش اساسی دارند.

فصل سوم شامل مطالبی است که اساس کار ما را تشکیل می‌دهد. بدین صورت که اگر A و B دو جبر و $M(A)$ و $M(B)$ فضاهای ایده‌آل ماکسیمال این جبرها باشند، در بسیاری موارد از جمله در جبرهای لیپ‌شیتس و $H^\infty(\mathbb{D})$ و ... برای همریختی $T : A \longrightarrow B$ نگاشتی مانند $\varphi : M(A) \longrightarrow M(B)$ وجود دارد که T را القا می کند. بدین مفهوم که رابطه‌ی $\widehat{Tf} = \widehat{f}o\varphi$ برای هر $f \in A$ برقرار است.

دراین فصل شرایط فشردگی یک همریختی القا شده بوسیله‌ی نگاشت φ را بر جبرهای

یکنواخت خاصی به نام جبرهای URM بررسی می‌کنیم که این جبرها شامل جبرهای log—مدولار و دیریکله نیز هستند. بعلاوه ثابت می‌کنیم که هر همریختی ضعیفاً فشرده از یک جبر URM به یک جبریکنواخت یا یک جبر باناخ منظم یکدار فشرده است و شرط معادل دیگری نیز برای این فشردگی معرفی می‌کنیم.

همچنین ثابت می‌کنیم هر همریختی از یک جبر URM بتوی $D^1(X)$ زمانی که X شرایط خاصی دارد فشرده است.

در بخش سوم از فصل سوم طیف درون‌ریختی‌های فشرده‌ی یک جبر URM را بررسی می‌کنیم که قبلاً جی.اف.فاینشتاین و هربرت کاموویتز ثابت کرده‌اند که اگر $A = H^\infty(\mathbb{D})$ و T یک درون‌ریختی فشرده‌ی القاشده بوسیله‌ی نگاشت تحلیلی $\psi : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}$ باشد آن‌گاه مشتق ψ بر نقاط ثابت خودش طیف T را تعیین می‌کند که در این مقاله این مطلب به جبرهای URM تعمیم داده می‌شود.

در فصل چهارم جبرهای لیپ‌شیتس را که اولین بار توسط دونالد شربرت تعریف شده‌اند معرفی کرده و قضایایی در مورد آنها بیان می‌کنیم و سپس چند قضیه‌ی ثابت شده در فصل سوم را به جبرهای لیپ‌شیتس تعمیم می‌دهیم و ثابت می‌کنیم هر همریختی ضعیفاً فشرده از یک جبر URM بتوی یک جبر لیپ‌شیتس فشرده است و شرط معادل دیگری نیز برای فشردگی معرفی می‌کنیم.

فصل ۱

تعاریف و قضایای مقدماتی

این فصل شامل مفاهیم، تعاریف و قضایایی از آنالیز حقیقی،آنالیز تابعی و آنالیزمختلط است که در فصل‌های بعدی مورد استفاده قرار می‌گیرند.

۱.۱ مفاهیمی‌از آنالیزحقیقی

در این بخش مطالبی از آنالیز حقیقی که در این پایان نامه مورد نیاز هستند، ارائه می‌شود که بعضی ازآن‌ها را اثبات می‌کنیم و بعضی را به مراجعی که در آن‌مراجع اثبات شده‌اند ارجاع می‌دهیم.

تعریف ۱.۱.۱ فرض کنیم X یک مجموعه باشد و τ گردایه‌ای از زیرمجموعه‌های X باشد. τ را یک توپولوژی [۱] در X گوییم هرگاه

الف) $\emptyset \in \tau$ و $X \in \tau$،

ب) اگر $\{V_i\}_{i=1}^{n}$، گردایه‌ای متناهی از اعضای τ باشد، آن‌گاه $\bigcap_{i=1}^{n} V_i \in \tau$،

ج) اگر $\{V_\alpha\}$ گردایه‌ی دلخواهی از اعضای τ باشد، آن‌گاه $\bigcup_{\alpha} V_\alpha \in \tau$.

اگر τ یک توپولوژی در مجموعه‌ی X باشد، آن‌گاه X را فضای توپولوژیک نامیده و اعضای τ را مجموعه‌های باز در X می‌نامیم.

تعریف ۲.۱.۱ فرض کنیم X و Y دو فضای توپولوژیک باشند. اگر f نگاشتی از X بتوی Y باشد، f را پیوسته گوییم هرگاه اگر $V \subset Y$ مجموعه‌ی باز دلخواهی باشد آن‌گاه $f^{-1}(V)$ در X باز باشد.

---

[۱] topology

تعریف ۳.۱.۱ فرض کنیم X یک فضای توپولوژیک باشد $U \subset X$ را فشرده‌ی مشروط[1] می‌نامیم هرگاه $\bar{U}$ در توپولوژی X فشرده باشد.

تعریف ۴.۱.۱ فضای توپولوژیک X را دنباله‌ای فشرده [2] گوییم هرگاه هر دنباله از اعضای X دارای زیردنباله‌ای همگرا به عضوی از X باشد.

مثال ۵.۱.۱ هر زیر مجموعه‌ی متناهی از هر فضای توپولوژیک ، دنباله‌ای فشرده است .

تعریف ۶.۱.۱ فرض کنیم $\{X_i\}_{i\in I}$ گردایه‌ای از فضاهای توپولوژیک باشد. قرار می‌دهیم $X = \prod\limits_{i\in I} X_i$. دراین‌صورت گوییم X با توپولوژی حاصل‌ضربی یک فضای توپولوژیک است هر گاه برای هر $j \in I$، نگاشت π_j با ضابطه‌ی $\pi_j\{a_i\}_{a_i\in X_i} = a_j$ با این توپولوژی پیوسته باشد.

تعریف ۷.۱.۱ فرض کنیم X یک مجموعه و $\mathfrak{M}$ گردایه‌ای از زیرمجموعه‌های X باشد. $\mathfrak{M}$ را یک σ—جبر در X گوییم هرگاه

الف) $X \in \mathfrak{M}$،

ب) اگر $A \in \mathfrak{M}$، آن‌گاه $A^c \in \mathfrak{M}$،

ج) اگر $\{A_i\}_{i=1}^{n}$، گردایه‌ای شمارش‌پذیر از اعضای $\mathfrak{M}$ باشد، آن‌گاه $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathfrak{M}$.

تعریف ۸.۱.۱ اگر $\mathfrak{M}$ یک σ—جبر در مجموعه‌ی X باشد، آن‌گاه X را یک فضای اندازه‌پذیر و اعضای $\mathfrak{M}$ را مجموعه‌های اندازه‌پذیر می‌نامیم.

تعریف ۹.۱.۱ فرض کنیم X یک فضای توپولوژیک باشد. کوچکترین σ—جبر در X را، که شامل تمام مجموعه‌های باز فضای X است، σ—جبربورل [3] و اعضای آن‌را مجموعه‌های بورل X می‌نامیم.

تعریف ۱۰.۱.۱ فرض کنیم $\mathfrak{M}$ یک σ—جبر بر مجموعه‌ی X باشد. فرض کنیم μ تابعی از $\mathfrak{M}$ بتوی بازه‌ی $[0,\infty]$ باشد. μ را یک اندازه‌ی مثبت گوییم هرگاه جمعی شمارش‌پذیر باشد یعنی اگر $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ گردایه‌ای از اعضای دوبه‌دو مجزای $\mathfrak{M}$ باشد، آن‌گاه

$$\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_i).$$

[1] Conditionally Compact

[2] Sequentially Compact

[3] borel

تذکر ۱۱.۱.۱ گاهی اندازه‌ی مثبت را اندازه نیز می گوییم.

تعریف ۱۲.۱.۱ فرض کنیم $g : X \to [0, \infty]$ یک تابع اندازه‌پذیر باشد. هم‌چنین S مجموعه‌ی تمام αهای حقیقی باشد که

$$\mu(g^{-1}(\alpha, \infty]) = 0. \qquad (1)$$

اگر $S = \emptyset$، قرار می‌دهیم $\beta = \infty$. و اگر $S \neq \emptyset$، قرار می‌دهیم $\beta = infS$. چون

$$g^{-1}(\beta, \infty] = \bigcup_{n=1}^{\infty} g^{-1}(\beta + \frac{1}{n}, \infty]. \qquad (2)$$

و چون اجتماع گردایه‌ی شمارش‌پذیری از مجموعه‌ها از اندازه‌ی صفر دارای اندازه‌ی صفراست، پس $\beta \in S$. ما β را سوپریمم اساسی g می‌نامیم.

تذکر ۱۳.۱.۱ اگر f یک تابع اندازه‌پذیر مختلط بر X باشد، آن‌گاه $\|f\|_\infty$ را سوپریمم اساسی تابع $|f|$ تعریف می کنیم.

تعریف ۱۴.۱.۱ فرض کنیم X یک مجموعه‌ی اندازه‌پذیر و μ یک اندازه‌ی مثبت بر X باشد، $L^\infty(\mu)$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$L^\infty(\mu) := \{f : X \to \mathbb{C} \ : \ \text{و } f \text{ اندازه‌پذیر} \ \ \|f\|_\infty < \infty\}$$

تعریف ۱۵.۱.۱ فرض کنیم X یک فضای هاسدورف موضعاً فشرده باشد. گوییم تابع مختلط مقدار f بر X در بی‌نهایت صفر می‌شود هرگاه، به ازای هر $\varepsilon > 0$، زیرمجموعه‌ی فشرده‌ای مانند K در X موجود باشد به‌طوری‌که

$$|f(x)| < \varepsilon \qquad (x \notin K)$$

تعریف ۱۶.۱.۱ فرض کنیم X یک فضای هاسدورف موضعاً فشرده باشد. رده‌ی تمام توابعی که در بی‌نهایت صفر می‌شوند را با $C_0(X)$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۱۷.۱.۱ فرض کنیم X یک فضای توپولوژیک و f یک تابع مختلط مقدار بر X باشد.
بست مجموعه‌ی $\{x \in X : f(x) \neq 0\}$ را محافظ[1] تابع f بر X گوییم.
گردایه‌ی تمام توابع مختلط مقدار پیوسته بر فضای توپولوژیک X، که بر X محافظ فشرده دارند را با $C_c(X)$ نشان می‌دهیم.
$C_c(X)$ با اعمال جمع و ضرب اسکالر توابع یک فضای برداری است.

[1] support

مثال ۱۸.۱.۱ فرض کنیم X یک فضای هاسدورف فشرده باشد. اگر برای هر $f \in C(X)$، $\|f\|_X$ را به‌صورت $\|f\|_X = \sup_{x\in X} |f(x)|$ تعریف کنیم آن‌گاه، $\|\cdot\|_X$ بر $C(X)$ یک نرم است که این نرم را سوپریمم نرم می‌گوییم.

قضیه ۱۹.۱.۱ فرض کنیم X یک فضای هاسدورف موضعاً فشرده باشد. دراین‌صورت $C_\circ(X)$، تتمیم فضای $C_c(X)$ نسبت به متر تعریف شده بوسیله‌ی نرم سوپریمم آن است.
برهان : رجوع شود به [[۲۱]، قضیه‌ی [۱۷.۳]].■

تذکر ۲۰.۱.۱ هرگاه X فشرده باشد $C_c(X)$ مجموعه‌ی تمام توابع پیوسته بر X است که آن را با نماد $C(X)$ نشان می‌دهیم. دراین حالت $C_\circ(X) = C_c(X) = C(X)$.

قضیه ۲۱.۱.۱ (نمایش ریس).[۱] فرض کنیم X یک فضای هاسدورف موضعاً فشرده باشد و Λ یک تابعک خطی مثبت بر $C_c(X)$ باشد. دراین‌صورت یک σ−جبر مانند $\mathfrak{M}$ در X وجود دارد به‌طوری‌که شامل تمام مجموعه‌های بورل در X می‌باشد، و یک اندازه‌ی مثبت منحصربفرد مانند μ بر $\mathfrak{M}$ به‌طوری‌که Λ را به مفهوم زیر نمایش می‌دهد

الف) به ازای هر $f \in C_c(X)$، $\Lambda f = \int_X f d\mu$،

ب) به ازای هر زیر مجموعه‌ی فشرده‌ی X مانند K، $\mu(K) < \infty$،

ج) $\mu(E) = \inf\{\mu(V) : E \subset V,\ V \text{ باز باشد}\}$،

د) به‌ازای هر مجموعه‌ی باز E و هر $E \in \mathfrak{M}$ که $\mu(E) < \infty$، رابطه‌ی زیر برقرار است

$$\mu(E) = \sup\{\mu(K) : K \subset E,\ K \text{ فشرده باشد}\}$$

ه) اگر $E \in \mathfrak{M}$ و $A \subset E$ و $\mu(E) = \circ$، آن‌گاه $A \in \mathfrak{M}$.

برهان : [رجوع شود به [[۲۱]، قضیه‌ی [۱۴.۲]].■

تعریف ۲۲.۱.۱ فرض کنیم X یک مجموعه باشد مجموعه‌ی تمام اندازه‌های مثبت بورل بر X را با نماد $\mathfrak{M}(X)$ نشان می‌دهیم.

تذکر ۲۳.۱.۱ فرض کنیم X یک فضای هاسدورف فشرده باشد. دراین‌صورت مجموعه‌ی تمام تابعک های خطی مثبت بر $C(X)$ با $\mathfrak{M}(X)$ یک‌ریخت است.
برهان : بنا بر قضیه‌ی نمایش ریس و۲۰.۱.۱ حکم برقرار است.■

قضیه ۲۴.۱.۱ (هان−باناخ).[۲] هرگاه M زیرفضایی از فضای خطی نرمدار X بوده و f یک تابعک خطی کراندار بر M باشد، آن‌گاه f را می‌توان به یک تابعک خطی کراندار مانند F بر X طوری توسیع داد که $\|F\| = \|f\|$.
برهان : رجوع شود به [[۲۱]، قضیه‌ی [۱۶.۵]].■

[۱] Riesz representation theorem

[۲] Hahn-Banach

۲.۱ مفاهیمی از آنالیز تابعی

تعریف ۱.۲.۱ فرض کنیم X یک مجموعه و $\mathfrak{F}$ گردایه‌ای از توابع بر X باشد. هرگاه به‌ازای هر $x, y \in X$ که $x \neq y$،عضوی از $\mathfrak{F}$ مانند f موجود باشد به‌طوری‌که $f(x) \neq f(y)$. دراین‌صورت گوییم $\mathfrak{F}$ نقاط X را جدا می‌کند.

تعریف ۲.۲.۱ فرض کنیم τ یک توپولوژی بر فضای برداری X باشد به‌طوری‌که

الف) به ازای هر $x \in X$، $\{x\}$ بسته باشد،

ب) اعمال جمع برداری و ضرب اسکالر نسبت به توپولوژی τ پیوسته باشند.

دراین‌صورت توپولوژی τ را یک توپولوژی برداری بر X گوییم و X را، یک فضای برداری توپولوژیک می‌نامیم.

مثال ۳.۲.۱ فضاهای برداری نرمدار و متریک، فضاهای برداری توپولوژیک هستند.

تعریف ۴.۲.۱ فرض کنیم X یک مجموعه باشد و $\mathfrak{F}$ خانواده‌ای ناتهی از نگاشت‌های $f : X \longrightarrow Y_f$ باشد که در آن‌ها هر Y_f یک فضای توپولوژیک است. (در بسیاری از حالات مهم، Y_f به ازای تمام $f \in \mathfrak{F}$ یکسان است.) فرض کنیم τ گردایه‌ی تمام اجتماع‌ها از اشتراک‌های متناهی از مجموعه‌های $f^{-1}(V)$ باشد که $f \in \mathfrak{F}$ و V در Y_f باز است. دراین‌صورت τ یک توپولوژی بر X است و در واقع ضعیف‌ترین توپولوژی بر X است که هر $f \in \mathfrak{F}$، را پیوسته می‌سازد. یعنی هرگاه τ' توپولوژی دیگری با این خاصیت باشد، آن‌گاه $\tau \subset \tau'$. این توپولوژی τ را توپولوژی ضعیف القا شده بر X بوسیله‌ی $\mathfrak{F}$ می‌نامیم و آن را به اختصار با $\mathfrak{F}$—توپولوژی X، نشان می‌دهیم. اگر هر Y_f هاسدورف باشد و $\mathfrak{F}$ نقاط X را جدا کند، آن‌گاه $\mathfrak{F}$—توپولوژی X یک توپولوژی هاسدورف است.

تعریف ۵.۲.۱ فرض کنیم X یک فضای برداری توپولوژیک باشد گردایه‌ی همه‌ی تابعک‌های خطی پیوسته بر X را دوگان توپولوژیکی X می‌نامیم وآن را با نماد X^* نشان می‌دهیم.

اگر اعمال جمع نقطه‌ای و ضرب اسکالر را در X^* به صورت زیر تعریف کنیم، آن‌گاه X^* یک فضای برداری است.

به ازای هر $\Lambda_1, \Lambda_2 \in X^*$ و به ازای هر $x \in X$ و به ازای هر $\alpha \in \mathbb{F}$،

الف) $(\Lambda_1 + \Lambda_2)(x) = \Lambda_1(x) + \Lambda_2(x)$،

ب) $(\alpha\Lambda_1)(x) = \alpha\Lambda_1(x)$.

تعریف ۶.۲.۱ فرض کنیم X یک فضای برداری توپولوژیک با توپولوژی τ باشد که X^* نقاط X را جدا می‌کند. دراین‌صورت X^*—توپولوژی X را توپولوژی ضعیف X می‌نامیم و

این توپولوژی را با نماد τ_w یا $\sigma(X, X^*)$ نشان می‌دهیم.
چون هر $\Lambda \in X^*$، τ—پیوسته است پس $\tau_w \subseteq \tau$.

تعریف ۷.۲.۱ فرض کنیم X یک فضای برداری توپولوژیک باشد که دوگانش X^* است. به ازای هر $x \in X$، نگاشت $f_x : X^* \longrightarrow \mathbb{C}$ را با ضابطه‌ی $f_x(\Lambda) = \Lambda(x)$ در نظر می‌گیریم. f_x خوش تعریف و خطی است و $X' = \{f_x : x \in X\}$ نقاط X^* را جدا می‌کند. X'—توپولوژی X^* راتوپولوژی ضعیف‌ستاره بر X^* می نامیم و آن را با نماد τ_{w^*} یا $\sigma(X^*, X)$ نشان می‌دهیم. گردایه‌ی همه‌ی مجموعه‌های به‌صورت $V = \bigcap_{i=1}^{n} f_{x_i}^{-1}(B(0; r_i))$ که در آن $n \in \mathbb{N}$ و $f_{x_i} \in X'$ و $r_i > 0$ و $B(0; r_i)$ گوی باز به مرکز صفر و شعاع r_i در صفحه می‌باشند، یک پایه‌ی موضعی برای توپولوژی τ_{w^*} تشکیل می‌دهند.

تذکر ۸.۲.۱ چون هر عضو X'، به وسیله‌ی عضوی از X تعریف می‌شود، X'—توپولوژی را X—توپولوژی نیز می‌نامیم.

تعریف ۹.۲.۱ فرض کنیم X یک فضای نرمدار و X^* و X^{**} به ترتیب فضاهای دوگان ودوگان دوم X باشند نگاشت

$$: X \longrightarrow X^{**}$$
$$x \longrightarrow \varphi_x$$

را که در آن φ_x به‌صورت

$$\varphi_x(y^*) = y^*(x) \qquad (y^* \in X^*)$$

است. نگاشت نشاننده‌ی طبیعی گوییم.

قضیه ۱۰.۲.۱ فرض کنیم X یک فضای نرمدار باشد. دراین‌صورت نگاشت نشاننده‌ی طبیعی از X به X^{**}، یک یک‌ریختی و یک‌متری از X بروی یک زیرفضای X^{**} است.

برهان : رجوع شود به [[۵]، قضیه‌ی [۳.۱۹] از فصل ۲].■

قضیه ۱۱.۲.۱ (باناخ—آل‌اوغلو).[1] اگر V یک همسایگی از صفر در فضای برداری توپولوژیک X باشد و

$$K = \{\Lambda \in X^* : |\Lambda x| \leq 1, x \in V\}$$

آن‌گاه K با توپولوژی ضعیف‌ستاره فشرده است.

برهان : رجوع شود به [[۲۲]، قضیه‌ی [۱۵.۳]].■

نتیجه ۱۲.۲.۱ گوی واحد بسته در X^*، ضعیف ستاره فشرده است.

برهان : رجوع شود به [[۲۲]، قضیه‌ی [۳.۴]].■

[1] Banach-Alaoglu theorem

تعریف **۱۳.۲.۱** فرض کنیم X و Y دو فضای برداری توپولوژیک باشند و $T: X \longrightarrow Y$ یک نگاشت خطی باشد. T را کراندار گوییم هرگاه هر مجموعه‌ی کراندار در X را به یک مجموعه‌ی کراندار در Y بنگارد.

تذکر **۱۴.۲.۱** فرض کنیم X و Y دو فضای برداری توپولوژیک باشند. مجموعه‌ی تمام نگاشت‌های خطی کراندار از X بتوی Y را با نماد $B(X,Y)$ نشان می‌دهیم. مجموعه‌ی $B(X,X)$ را با نماد $B(X)$ نیز نشان می‌دهیم.
فرض کنیم X و Y دو فضای برداری توپولوژیک باشند. مجموعه‌ی $B(X,Y)$ با اعمال جمع وضرب اسکالر توابع یک فضای برداری تشکیل می‌دهد.

تذکر **۱۵.۲.۱** اگر X یک فضای برداری توپولوژیک باشد، آن‌گاه $B(X,\mathbb{C}) = X^*$.

قضیه **۱۶.۲.۱** فرض کنیم X و Y دو فضای نرمدار باشند. به ازای هر $\Lambda \in B(X,Y)$، $\|\Lambda\|$ را به صورت زیر تعریف می کنیم

$$\|\Lambda\| = \sup\{\|\Lambda(x)\| \quad : x \in X, \|x\| \leq ۱\}.$$

با این تعریف فضای برداری $B(X,Y)$ یک فضای نرمدار است که اگر فضای Y یک فضای باناخ باشد، آن‌گاه $B(X,Y)$ نیز با این نرم تبدیل به یک فضای باناخ می‌شود.
برهان : رجوع شود به [[۲۲]، قضیه‌ی ۱.۴].■

تعریف **۱۷.۲.۱** فرض کنیم X و Y دو فضای برداری توپولوژیک باشند و $T \in B(X,Y)$. متناظر با T، نگاشت $T^*: Y^* \longrightarrow X^*$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$< Tx, y^* > = < x, T^*y^* > \qquad (x \in X, y^* \in Y^*).$$

که T^* یک نگاشت خطی است و آن را نگاشت الحاق[1] T گوییم.

قضیه **۱۸.۲.۱** فرض کنیم X و Y دو فضای نرمدار باشند. به هر $T \in B(X,Y)$، یک $T^* \in B(Y^*, X^*)$ منحصربفرد نظیر است که در رابطه‌ی زیر صدق می کند

$$< Tx, y^* > = < x, T^*y^* > \qquad (x \in X, y^* \in Y^*).$$

بعلاوه، T^* در رابطه‌ی $\|T^*\| = \|T\|$ نیز صدق می کند.
برهان : رجوع شود به [[۲۲]، قضیه‌ی [۱۰.۴]].■

[1] adjoint map

قضیه ۱۹.۲.۱ فرض کنیم X و Y دو فضای برداری توپولوژیک باشند و $T \in B(X,Y)$. دراین‌صورت $T^* : Y^* \longrightarrow X^*$ نسبت به توپولوژی‌های X—توپولوژی روی X^* و Y—توپولوژی روی Y^* پیوسته است.
برهان : رجوع شود به [[۵]، لم [۲.۳] از فصل ٦].■

تعریف ۲۰.۲.۱ فرض کنیم X و Y دو فضای باناخ باشند. فرض کنیم $T : X \longrightarrow Y$ یک نگاشت خطی باشد و U گوی یکه‌ی باز در X باشد. دراین‌صورت نگاشت T را فشرده گوییم هرگاه بستار $T(U)$ در توپولوژی نرم Y فشرده باشد.
مجموعه‌ی تمام نگاشت‌های فشرده از X به Y را با نماد $B_{\circ}(X,Y)$ نشان می‌دهیم.

تذکر ۲۱.۲.۱ اگر T یک نگاشت خطی فشرده بر X باشد آن‌گاه، $T \in B(X,Y)$.

تذکر ۲۲.۲.۱ اگر T یک نگاشت خطی از فضای باناخ X به بتوی فضای باناخ Y باشد، آن‌گاه T فشرده است اگر و فقط اگر هر دنباله‌ی کراندار در X، مانند $\{x_n\}$ دارای زیردنباله‌ای مانند $\{x_{n_k}\}$ باشد به‌طوری‌که $\{Tx_{n_k}\}$ به عضوی از Y همگرا باشد.

قضیه ۲۳.۲.۱ فرض کنیم X و Y دو فضای باناخ باشند و $T \in B(X,Y)$. دراین‌صورت T فشرده است اگر و فقط اگر T^* فشرده باشد.
برهان : رجوع شود به [[۲۲]، قضیه‌ی [۱۹.۴]].■

قضیه ۲۴.۲.۱ فرض کنیم X و Y دو فضای باناخ باشند و $T \in B(X,Y)$. دراین‌صورت T فشرده است اگر و فقط اگر T^* دنباله‌های همگرا در Y—توپولوژی Y^* را به دنباله‌های همگرا در توپولوژی نرم X^* تصویر کند.
برهان : رجوع شود به [[۵]، قضیه‌ی [۵.٦] از فصل ٦].■

قضیه ۲۵.۲.۱ اگر A یک زیرمجموعه از فضای باناخ X باشد. آن‌گاه شرایط زیر معادلند

الف) A دنباله‌ای فشرده‌ی ضعیف است؛

ب) هر زیرمجموعه‌ی نامتناهی شمارا از A دارای حداقل یک نقطه‌ی حدی ضعیف است؛

ج) بستار A در توپولوژی ضعیف X، فشرده است.

برهان : رجوع شود به [[۵]، قضیه‌ی [٦.۱] از فصل ۵].■

تعریف ۲٦.۲.۱ فرض کنیم X و Y دو فضای باناخ باشند. فرض کنیم $T \in B(X,Y)$. اگر U گوی یکه‌ی باز در X باشد نگاشت T را ضعیفاً فشرده گوییم هرگاه بستار $T(U)$ در توپولوژی ضعیف Y فشرده باشد.