

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ



دانشگاه آزاد اسلامی

واحد تهران مرکزی

دانشکده علوم پایه گروه ریاضی و آمار

پایان نامه کارشناسی ارشد

گرایش محض - جبر

عنوان:

گراف وابسته به ایده آل‌های یک حلقه

استاد راهنما:

جناب آقای دکتر مهرداد آزادی

اساتید مشاور:

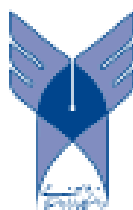
جناب آقای دکتر حمیدرضا رحیمی

جناب آقای دکتر حمیدرضا میمنی

نگارش:

حمیدرضا خریدار

زمستان ۹۲



مجلس شورای اسلامی

به نام خدا

شور اخلاقی پژوهش

پیدی از خداوند بهی و انتخاب بی کیم حضرت خدایست اولی الامر را اولی الامر به طریقی پشت تمام خداوند پژوهش و عکس است
باید انگار استی و رنگه تنی و شری و انجیمی و همه ریت علی و ساری و انگار استی و ساری کیم اصل زید و نفیم
نهایتی پژوهش شود نظر و همه در آن عمل کنیم

- ۱-۱ اصل ریاست: انزوم بر ریاست علی از مولا که خبر خودی را حرام وضع نیست بر کسی که خدا هم در شان او باشد ای فری می باشد.
- ۱-۲ اصل ریاست اخلاقی و ادبیت: نصب و انتخاب از مولا که جانب داری فری می و مخالفت از اموال انجیزت و هیچ در وقت.
- ۱-۳ اصل نوعی: نصب بر این و انانگی و تحقیقات و احوال آن به احوال علی و انجیمی به خبر از مولا که هیچ کافی دارد.
- ۱-۴ اصل انزوم: نصب ریاست بر مولا است از تمام تحقیقات و ریاست جانب خدا خودی از مولا که دوست کنی.
- ۱-۵ اصل ریاست حق: انزوم بر ریاست کمال حق پژوهشگر بر پژوهشگر انانگی بر این ریاست بر مولا که هیچ.
- ۱-۶ اصل زاری: نصب ریاست از مولا و اخلاقیات مولا خودی را که کند و بجز خودی از مولا که هیچ.
- ۱-۷ اصل شجاعت: کاش در انانگی بر مولا شجاعت و صفای بر آن خودی از مولا که هیچ شجاعت.
- ۱-۸ اصل یکتاری: ساری و نصب ریاست کمال حق خودی را ساری و انگار که بجز مولا که هیچ.
- ۱-۹ اصل ساری: نصب ریاست ساری در مولا که هیچ و پژوهشگر خودی از مولا که هیچ.

تعهد نامه اصالت پایان نامه کارشناسی ارشد

اینجانب حمیدرضا خریدار دانش آموخته مقطع کارشناسی ارشد نا پیوسته به شماره دانشجویی ۸۸۱۰۵۱۰۲۲۰۰ در رشته ریاضی محض که در تاریخ ۹۲/۱۱/۱۸ از پایان نامه خود تحت عنوان: گراف وابسته به ایده آلهای یک حلقه با کسب نمره هفده و درجه دفاع نموده ام بدینوسیله متعهد می شوم:

- ۱- این پایان نامه حاصل تحقیق و پژوهش انجام شده توسط اینجانب بوده و در مواردی که از دست آوردهای علمی و پژوهشی دیگران (اعم از پایان نامه ، کتاب ، مقاله و ...) استفاده نموده ام ، مطابق ضوابط و رویه های موجود ، نام منبع مورد استفاده و سایر مشخصات آن را در فهرست ذکر و درج کرده ام.
- ۲- این پایان نامه قبلا برای دریافت هیچ مدرک تحصیلی (هم سطح ، پایین تر یا بالاتر) در سایر دانشگاه ها و موسسات آموزش عالی ارائه نشده است .
- ۳- چنانچه بعد از فراقت از تحصیل ، قصد استفاده و هر گونه بهره برداری اعم از چاپ کتاب ، ثبت اختراع و ... از این پایان نامه داشته باشم ، از حوزه معاونت پژوهشی واحد مجوز های مربوطه را اخذ نمایم .
- ۴- چنانچه در هر مقطع زمانی خلاف موارد فوق ثابت شود ، عواقب ناشی از آن را بپذیرم و واحد دانشگاهی مجاز است با اینجانب مطابق ضوابط و مقررات رفتار نموده و در صورت ابطال مدرک تحصیلی ام هیچ گونه ادعایی نخواهم داشت .

حمیدرضا خریدار

تاریخ و امضاء

باسمه تعالی

در تاریخ :

دانشجوی کارشناسی ارشد آقای حمیدرضا خریدار از پایان نامه خود دفاع نموده و با نمره
بحروف و با درجه مورد تصویب قرار گرفت .

امضاء استاد راهنما

❖ تقدیم به:

همسر صبور و مهربانم که با همدلی هایش مرا تشویق نموده و از هیچ کمکی دریغ نکرد. او که سختی ها را صبورانه تحمل کرد ، کاستی ها را نادیده گرفت و حتی لحظه ای خم به ابرو نیاورد.

❖ سپاسگزاری:

خداوندا : به امیدت قدم در این راه نهادم و همواره به یاریت نیازمندم و اگر دست محبتت را از من دریغ می کردی یارای گام برداشتن نداشتم . بارالها ، از اقیانوس بی کران ادب قطره ای مرا بچشان که تو خود دانی تشنه ی این قطره ام.

خداوندا : تو را سپاس که در به سامان شدن کار راهنمایم بودی . الهها ، لطف تو ظاهر است و زبان از سپاس قاصر

بر خود واجب می دانم از الطاف بی دریغ استاد بزرگوار و فرزانه جناب آقای دکتر مهرداد آزادی که با راهنمایی های ارزنده خویش همواره یاریم کردند و لحظه لحظه مشوقم بودند سپاسگزاری کنم .

از اساتید بزرگوار جناب آقای دکتر حمیدرضا رحیمی ، جناب آقای دکتر حمیدرضا میمنی و جناب آقای دکتر پورفرج که با صبر ، حوصله و دقت نظر خویش مرا یاری کردند صمیمانه سپاسگزارم .

در پایان از تمامی عزیزانی که مرا در این راه یاری داده اند سپاسگزاری می نمایم و برای همه آنان از درگاه ایزد منان سلامتی و موفقیت آرزو می کنم.

باسمه تعالی

دانشکده علوم پایه گروه ریاضی و آمار

(این چکیده به منظور چاپ در پژوهش نامه دانشگاه تهیه شده است)

نام واحد دانشگاهی : تهران مرکزی	کد واحد : ۱۰۱	کد شناسایی پایان نامه :
عنوان پایان نامه : گراف وابسته به ایدالهای یک حلقه		
نام و نام خانوادگی دانشجو : حمیدرضا خریدار	تاریخ شروع پایان نامه :	تاریخ اتمام پایان نامه :
شماره دانشجویی : ۸۸۱۰۵۱۰۲۲۰۰		
رشته تحصیلی : ریاضی محض (جبر)		
استاد/استادان راهنما : آقای دکتر مهرداد آزادی	استاد/استادان مشاور : آقای دکتر حمیدرضا رحیمی و آقای دکتر حمیدرضا میمنی	
چکیده پایان نامه (شامل خلاصه ، اهداف ، روش های اجرا و نتایج به دست آمده) : در این رساله به بررسی یک گراف وابسته به حلقه ها می پردازیم. گراف G که مجموعه رئوس آن ایده آل های راست محض و نا صفر حلقه بوده و دو راس a و b در آن مجاور هستند. هرگاه $I + J = R$ در نظر بگیریم ، این گراف را با $\Gamma_+(R)$ نمایش می دهیم. ابتدا به بررسی پارامترهای گرافی این گراف می پردازیم، این پارامترها عبارتند از درجه رئوس ، همبندی، مسطح بودن و ... همچنین مجموعه احاطه گر این گراف را مورد بررسی قرار می دهیم و در پایان حلقه $C(X)$ و گراف $\Gamma_+(C(X))$ را بررسی می کنیم.		

تاریخ و امضا

نظر استاد راهنما برای چاپ در پژوهش نامه دانشگاه مناسب است

مناسب نیست

فهرست مطالب

۱	چکیده فارسی
۲	مقدمه
۴	هدف
۵	پیشینه تحقیق
۶	روش کار تحقیق
۷	فصل صفر
۸	۱-۰ گروه
۱۱	۲-۰ همریختی گروه ها
۱۲	۳-۰ حلقه و میدان
۱۷	۴-۰ همریختی و یکرختی حلقه ها
۱۸	۵-۰ رادیکال جیکوبسن
۲۰	۶-۰ مدول ها و فضا های برداری
۲۳	۷-۰ حلقه نوتری و آرتینی
۲۵	۸-۰ گراف

۳۳	۹-۰ قضیه ها و لم های کاربردی
۴۰	فصل اول معرفی گراف Γ
۴۳	فصل دوم معرفی گراف $\Gamma_+(R)$
۴۷	فصل سوم چه زمانی گراف $\Gamma_+(R)$ کامل است
۵۳	فصل چهارم مسطح سازی گراف $\Gamma_+(R)$
۵۹	فصل پنجم رئوس متعامد
۶۵	فصل ششم مجموعه های احاطه گر در $\Gamma_+(R)$
۷۰	منابع
۷۲	واژه نامه

❖ چکیده:

در این پایان نامه به بررسی یک گراف وابسته به ایده آل‌های یک حلقه می پردازیم.

گراف G که مجموعه رئوس آن ایده آل های راست محض و نا صفر حلقه بوده و دو راس I و J

در آن مجاور هستند هرگاه $I + J = R$ ، این گراف را با $\Gamma_+(R)$ نمایش می دهیم.

ابتدا به بررسی پارامتر های گرافی این گراف می پردازیم، این پارامتر ها عبارتند از درجه رئوس،

همبندی، مسطح بودن و ...

همچنین مجموعه احاطه گر این گراف را مورد بررسی قرار می دهیم.

❖ مقدمه

مطالعه نظریه گراف یکی از موضوعات جالب ریاضی است و به سال 1973 برمی گردد، زمانی که نورمن بیگز کار خود را با عنوان "نظریه جبری گراف"^۱ منتشر کرد.

او در مقدمه کتابش هدف خود را ترجمه خواص گراف ها در خصوصیات جبری و سپس استفاده از نتایج و روشهای جبری برای استنتاج قضایای گراف ها، بیان کرده است .

بیگز از جبر و روشهای جبری صحبت داشته و اغلب از جبر خطی استفاده می کند و برخی خواص چند جمله ای ها را مورد بررسی قرار می دهد. بعد از آن بک در مقاله ای تحت عنوان رنگ آمیزی حلقه های جا به جایی^۲ ، در مورد گراف مقسوم علیه صفر حلقه تعویض پذیر تحقیقاتی داشت. بیگز بیشتر به رنگ آمیزی علاقه داشت. مقاله بک درباره رنگ آمیزی گراف مقسوم علیه های صفر حلقه تعویض پذیر بود، که توسط اندرسن و نصیر^۳ ادامه داده شد، به طوری که توجه نظریه پردازان جبر و نظریه گراف را به گراف مقسوم علیه صفر جلب کرد.

تقریبا تمام منابع در پایان این مقاله به این دسته گراف مرتبط است.

برای مثال منابع ۱-۷ و ۱۲ و ۱۵ از این جمله اند.

در این پایان نامه مشابه هدف بیگز را دنبال می کنیم ، در ضمن می خواهیم درباره گراف دیگری از حلقه همبند نیز مطالعه کنیم.

1- N. Biggs, *Algebraic Graph Theory*, Cambridge University Press (Cambridge, 1973).

2 - I. Beck, *Coloring of commutative rings*, *J. Algebra*, 116 (1988), 208-226.

3 -D. D. Anderson and M. Naseer, *Beck's coloring of a commutative ring*, *J. Algebra*, 159 (1993), 500-514.

برای هر حلقه R ، یک گراف $\Gamma_+(R)$ که رئوس آن، ایده آل های اصلی (سره) راست غیر صفر R هستند، و دو ایده آل راست در $\Gamma_+(R)$ ، که اگر Co-Maximal باشند، مجاورند، را به هم ارتباط می دهیم.

قبل از مطالعه خواص گراف $\Gamma_+(R)$ برای حلقه R ، ابتدا در فصل صفر تعاریف اولیه را مطالعه می کنیم، پس از آن در فصل یک گراف Γ و خصوصیات آن را مطالعه می کنیم. در بخش ۲ برای هر حلقه R ، گراف $\Gamma_+(R)$ را تعریف می کنیم. اغلب می خواهیم در مورد عدد جرگه ای و عدد رنگی گراف $\Gamma_+(R)$ بدانیم، و خواهیم دید عدد جرگه ای و عدد رنگی و تعداد اعضای مجموعه ایده آل های راست ماکزیمال R برابرند.

در بخش ۳ شرح می دهیم چه زمانی $\Gamma_+(R)$ یک گراف کامل است.

بخش ۴ راجع به مسطح سازی گراف $\Gamma_+(R)$ است و شروط لازم و کافی برای این که گراف $\Gamma_+(R)$ یک درخت یا جنگل باشد را پیدا می کنیم.

در بخش ۵ رئوس متعامد گراف $\Gamma_+(R)$ را بررسی می کنیم و ارتباط این رئوس را با جمعونده مستقیم مورد مطالعه قرار می دهیم.

در بخش ۶ عدد احاطه گر گراف $\Gamma_+(R)$ را خواهیم یافت.

در

(F. Azarpanah and M. Motamedi, Zero-divisor graph of $C(X)$, Acta Math. Hungar., 108 (2005), 25-36.)

مطالعات بسیاری درباره گراف مقسوم علیه های صفر $C(X)$ صورت گرفته است.

در سراسر این مقاله منظور از یک حلقه، حلقه شرکت پذیر با عنصر همانی، و $J(R)$ رادیکال جیکوبسن حلقه R در نظر گرفته می شود.

❖ هدف

در ریاضی همواره ارتباط بین رشته ها و مفاهیم مختلف ریاضی مورد توجه ریاضی دانان بوده و کاربردهای زیادی دارد. در این پایان نامه هدف ترجمه خواص گراف ها در خصوصیات جبری و سپس استفاده از نتایج و روشهای جبری برای استنتاج قضایای گراف ها، است.

از جبر و روشهای جبری صحبت داشته، اغلب از جبر خطی استفاده می کنیم و برخی خواص چند جمله ای ها را مورد بررسی قرار داده و به گراف مقسوم علیه صفر حلقه تعویض پذیر می پردازیم.

سپس به رنگ آمیزی گراف ها پرداخته و رنگ آمیزی گراف مقسوم علیه های صفر حلقه تعویض پذیر را بررسی می کنیم.

❖ پیشینه تحقیق

موضوعی که در این پایان نامه مورد بررسی قرار می گیرد یکی از تازه های علمی در زمینه گراف وابسته به ایدالهای یک حلقه است . موضوع مورد بررسی از مقاله ای با عنوان

ON A GRAPH OF IDEALS

است که در سال ۲۰۱۱ به چاپ رسیده است.

در این تحقیق به بررسی گراف $\Gamma_+(R)$ پرداخته و در فصول مختلف آن به بررسی خواص و نتایج مختلف این گراف ها و ارائه برخی مثالهای مرتبط با آن خواهیم پرداخت .

❖ روش کار تحقیق

در بررسی و انجام این پایان نامه از مقالات و کتب موجود در کتابخانه دانشگاه و سایر بخش های مرتبط استفاده شده و بعضی از منابع و مراجع به زبان انگلیسی از سایتهای اینترنتی تهیه شده است. در ابتدا با تعاریفی که در فصل صفر آمده است مفاهیم اولیه که مورد نیاز در سایر فصول می باشد را بیان می کنیم و در سایر فصل ها به بررسی خواص گراف $\Gamma_+(R)$ می پردازیم.

❖ فصل صفر:

مقدمات

۱-۰ گروه:

تعریف ۱-۱-۰

یک گروه عبارت است از جفت مرتب $(G, *)$ ، که در آن G مجموعه ای ناتهی و $*$ عملی دو تایی روی آن است به طوری که خاصیت های زیر برقرار باشند:

(الف) قانون شرکت پذیری: به ازای هر $a, b, c \in G$

$$a * (b * c) = (a * b) * c$$

(ب) وجود عنصر همانی: عنصر $e \in G$ وجود دارد به طوری که به ازای هر $a \in G$

$$a * e = a = e * a$$

(ج) وجود عنصر معکوس: به ازای هر $a \in G$ ، عنصر $b \in G$ موجود باشد به طوری که

$$a * b = e = b * a$$

تعریف ۲-۱-۰

فرض کنید $(G, *)$ یک گروه و H زیر مجموعه ای ناتهی از آن باشد. در این صورت $(H, *)$ زیر گروه $(G, *)$ نامیده می شود هر گاه $(H, *)$ یک گروه باشد.

تعریف ۳-۱-۰

یک نیم گروه عبارت است از جفت مرتب $(S, *)$ ، که در آن S مجموعه ای ناتهی و $*$ یک عمل دوتایی شرکت پذیر روی S است.

بنابراین یک نیم گروه، دستگاه ریاضی با عمل دوتایی است به طوری که عمل دو تایی آن شرکت پذیر است. توجه کنید که هر گروه $(G, *)$ ، نیم گروه است.

تعریف ۴-۱-۰

فرض کنید G یک گروه و S زیر مجموعه ای از آن باشد. همچنین فرض کنید:

$$S = \{H \mid S \subseteq H \text{ و } H \text{ زیر گروه } G \text{ است}\}$$

حال $\langle S \rangle = \bigcap_{H \subseteq S} H$ را تعریف می کنیم، یعنی، $\langle S \rangle$ اشتراک تمام زیر گروه های H از G است به طوری که $S \subseteq H$. در این صورت زیر گروه $\langle S \rangle$ از G ، زیر گروه تولید شده به وسیله S نامیده می شود. اگر $G = \langle S \rangle$ ، آنگاه S را یک مجموعه مولد برای G نامند.

تعریف ۵-۱-۰

گروه G را دوری نامند هر گاه $a \in G$ ای موجود باشد به طوری که

$$G = \langle a \rangle$$

توجه داشته باشید با توجه به این تعریف $\langle a \rangle = \{a^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$.

تعریف ۶-۱-۰

فرض کنید G یک گروه باشد. زیر گروه H از G را زیر گروه نرمال G نامند هر گاه به ازای هر

$$aH = Ha, \quad a \in G$$

تعریف ۷-۱-۰

فرض کنید G یک گروه و H زیر گروهی نرمال از آن باشد. گروه G/H را گروه خارج قسمت G بوسیله H نامند.

تعریف ۸-۱-۰

فرض کنید G گروهی دلخواه و S مجموعه ای ناتهی باشد. کنش (چپ) G روی S تابعی است

مانند $G \times S \rightarrow S$ ، به طوری که به ازای هر $x \in S$ و $g_1, g_2 \in G$:

$$(g_1 g_2) \cdot x = g_1 \cdot (g_2 \cdot x) \quad (\text{الف})$$

(ب) $e \cdot x = x$ که در آن e عنصر همانی است.

اگر کنشی چپ از G روی S موجود باشد، گوییم که G روی S از چپ کنش می دهد و S یک G -مجموعه است .

تعریف ۹-۱-۰

فرض کنید G گروهی دلخواه، S یک G -مجموعه باشد، $a \in S$ و $g \in G$. در این صورت a به وسیله g ثابت نامیده می شود هرگاه $ga = a$.

اگر به ازای هر $g \in G$ ، $ga = a$ ، آنگاه a ثابت شده به وسیله G نامیده می شود .

تعریف ۱۰-۱-۰

فرض کنید p عددی اول باشد. گروه G را یک p -گروه نامند اگر مرتبه هر عنصر G توانی از p باشد. زیر گروه H از گروه G را یک p -زیر گروه نامند هر گاه H یک p -گروه باشد.

۲-۰ همریختی گروهها