دانشگاه تبریز
۱۳۲۶

دانشکده علوم ریاضی
گروه ریاضی کاربردی

پایان‌نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته
ریاضی کاربردی، گرایش معادلات دیفرانسیل

عنوان

رفتار مجانبی جوابهای انتگرال چند گانهٔ لاپلاس گونه از معادلات دیفرانسیل خطی

استاد راهنما

دکتر علی اصغر جدیری اکبرفام

استاد مشاور

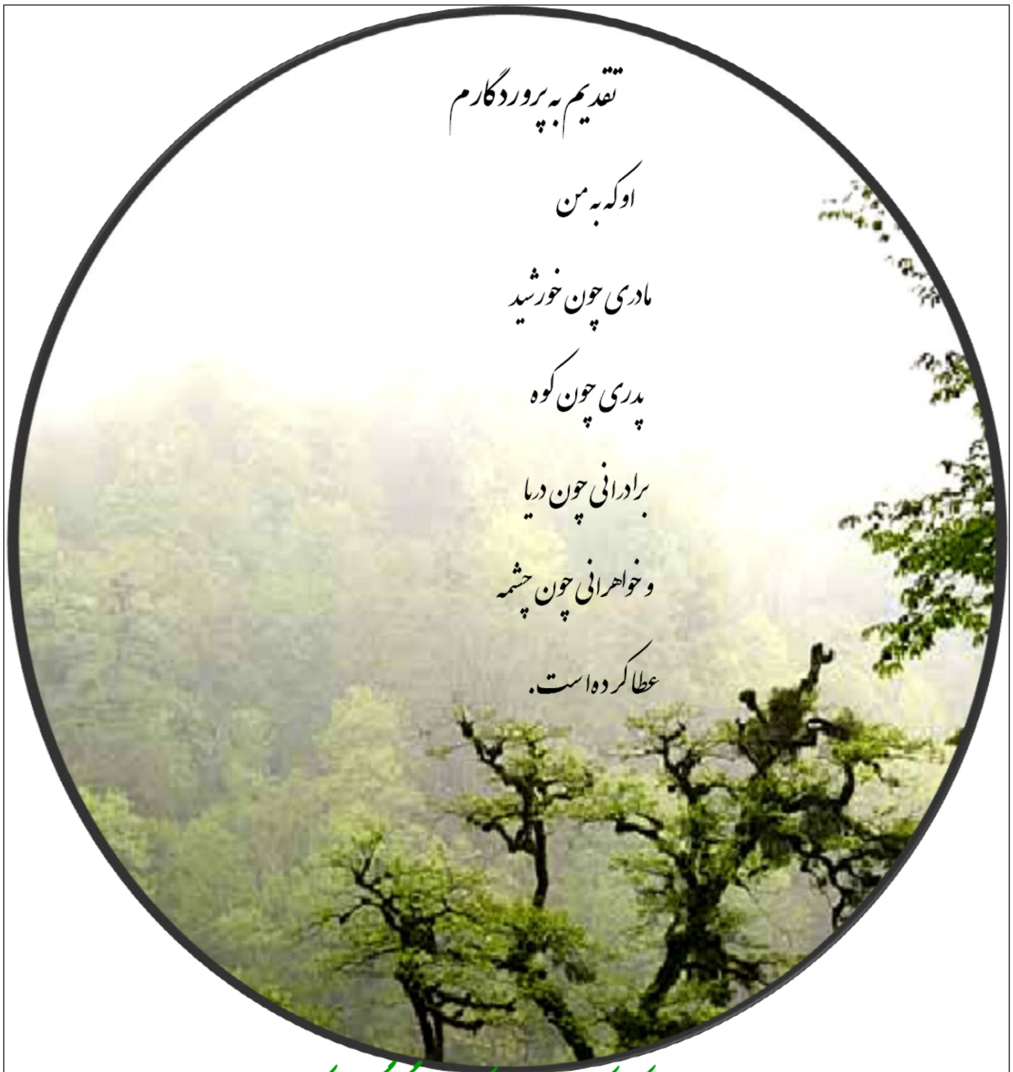
دکتر صداقت شهمراد مغانلو

پژوهشگر

محمّد بهشتی دمیرچی

دی ۱۳۸۹

بسم الله الرحمن الرحيم



تقدیم به پروردگارم

اوکه به من

مادری چون خورشید

پدری چون کوه

برادرانی چون دریا

و خواهرانی چون چشمه

عطا کرده است.

تقدیم به کسانی که به سخن آن چنان که قرآن می گوید گوش می کنند:

"فَبَشِّرْ عِبَادِ الَّذِينَ يَسْتَمِعُونَ الْقَوْلَ فَيَتَّبِعُونَ أَحْسَنَهُ أُوْلَئِکَ الَّذِينَ هَدَاهُمُ اللَّهُ وَأُوْلَئِکَ هُمْ أُوْلُوا الْأَلْبَابِ"

سوره الزمر-آیه ۱۸

سپاس گزاری...

ستایش و سپاس بیکران بایسته ی آن ایزد دانایی است که چراغ دانش را در اندیشه انسان فروزان می دارد تا در پرتو آن، هستی را از دورترین مرزهای کهکشان تا پیچاپیچ هزار توی یاخته ها بکاود و رازهای آن بگشاید و بدین گونه خود را از بردگی جهل و خرافات برهاند و به آزادی و توانایی و بهروزی دست یابد. با پای محکم، با اعتماد و با توکل گام برداشتم و از سختی ها و موانع گذشتم. در راه، سختی، مشقت و دلتنگی بود و در کنار ما، همیشه دستی یاری گر و چراغی روشنگر قوت قلب و راهنمای راهمان بود.

اینک که در انتهای این راه و در آغاز راهی دیگر ایستاده ام وظیفه شاگردی خود می دانم تا مراتب سپاس و قدردانی خویش را با خلوص و صمیمیت هرچه تمامتر به محضر استاد گرانمایه، آقای دکتر علی اصغر جدیری اکبرفام، تقدیم دارم که در مقام استاد راهنمایی، با بزرگواری و سعه ی صدر مرا از راهنمایی های خویش بی هیچ مضایقه ای بهرمند نمودند. و از جناب آقای دکتر صداقت شهمراد مغانو که مشاوره ی این پژوهش را بر عهده داشتند و هم چنین از استاد ارجمند جناب آقای دکتر محمد جهانشاهی که قبول زحمت فرمودند داوری و بازخوانی این تحقیق را متقبل گشتند کمال تشکر و قدردانی را دارم.

از کلیه استادهای گرامی دوران تحصیلم، مخصوصاً از آقای دکتر حسین خیری مدیرگروه ریاضی کاربردی،

دکتر میرکمال میرنیا، خانم دکتر بهرامی، دکتر کریم ایواز، دکتر مهرداد لکستانی و نیز کارکنان محترم دانشکده علوم ریاضی که در مدت تحصیلات اینجانب زحمات فراوانی را متحمل شده اند، تشکر می نمایم. و بوسه می زنم بر دستان خداوندگاران مهر و مهربانی، پدر و مادر عزیزم و بعد از خدا ستایش می کنم وجود مقدسشان را به پاس عاطفه سرشار و گرمای امید بخش وجودشان که در این سردترین روزگاران بهترین پشتیبان من بودند.

در پایان از همراهی و مساعدت دوستان عزیزم، همکلاسی های گرامی ام و هم اتاقی های مهربانم، دکتر شهریاری، امیر شفیعلو، ایوب احمدی، مهدی امیری، احمد عالی، مهدی ساعد شعار، حسین فضلی و تمام کسانی که در طی مدت تحصیل محبت و مهرشان در گوشه گوشه ی ذهن و قلبم جای دارد، بی نهایت متشکرم.

محمد بهشتی دمیرچی

دی ۱۳۸۹

نام خانوادگی: بهشتی دمیرچی **نام:** محمّد

عنوان پایان‌نامه: رفتار مجانبی جوابهای انتگرال چند گانهٔ لاپلاس گونه از معادلات دیفرانسیل خطی

استاد راهنما: دکتر علی اصغر جدیری اکبرفام

استاد مشاور: دکتر صداقت شهمراد مغانلو

مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد **رشته:** ریاضی کاربردی **گرایش:** معادلات دیفرانسیل

دانشگاه: تبریز **دانشکده:** علوم ریاضی

تاریخ فارغ‌التحصیلی: دی ۱۳۸۹ **تعداد صفحه:** ۸۵

کلیدواژه‌ها: بسط مجانبی، انتگرالهای ملین-بارنس تکراری، دیاگرام نیوتن، نقطهٔ منفرد بحرانی

چکیده:

ابتدا نمایشی از انتگرالهای لاپلاس دوگانه با عنوان انتگرالهای ملین-بارنس تکراری را معرفی می‌کنیم. در ادامه با استفاده از قضیهٔ مانده، بسطهای مجانبی جدیدی برای انتگرالهایی به صورت $\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\lambda f(x,y)} g(x,y) dx dy$ به دست می‌آوریم که تابع فاز f متعلق به ردهٔ بزرگی از توابع و g تابع نوسانی است. f می‌تواند چند جمله‌ای (حتی با توانهای صحیح) و شامل نقطهٔ منفرد منزوی در مبدأ باشد. آن مانده‌ای که برای ساختار بسط مجانبی به کار گرفته می‌شود، با استفاده از هندسهٔ مقدماتی مشخص می‌شود. مثالهای عددی برای روشن نمودن اهمیت به کارگیری بسطها در رابطه با بحث بین روابط هندسی نمودار نیوتن تابع فاز و مقدار مجانبی گردآوری شده است.

فهرست مطالب

فهرست مطالب ح

لیست تصاویر د

لیست جداول ذ

مقدمه ر

۱ تعاریف و قضایای مقدماتی ۱

۱.۱ تعاریف مقدماتی ۱

۱.۱.۱ نمادهای $\mathcal{O}$ و o ۱

۲.۱.۱ تبدیل لاپلاس ۳

۳.۱.۱ نمودار نیوتن ۵

۴.۱.۱ فرمول انتگرال کوشی و قضایای کوشی - گورسا و مانده ۶

۵.۱.۱ تابع گاما ۷

۶.۱.۱ تابع دی گاما ۱۱

۲.۱ نمایشی از انتگرال ملین-بارنس ۱۲

۲ مجانبهایی از انتگرال لاپلاس ۱۶

۱.۲ مجانبها با یک نقطهٔ درونی ۱۶

۱.۱.۲ نقطهٔ درونی P_1 جلوی یال پشتی ۱۷

۲.۱.۲ نقطهٔ درونی P_1 روی یا پشت یال پشتی ۱۸
۳.۱.۲ مقدار کنترلی نمودار و مرتبهٔ جمله‌های پیشرو ۱۹
۲.۲ مجانبها با دو نقطهٔ درونی ۲۱
۱.۲.۲ حالت محدّب برای دو نقطهٔ درونی ۲۲
۲.۲.۲ دو نقطهٔ درونی در یک خط مستقیم ۲۸
۳.۲.۲ یکی از نقاط درونی پشت نمودار نیوتن ۳۱
۴.۲.۲ یکی از نقاط درونی روی یا پشت یال پشتی ۳۳
۵.۲.۲ مقدار کنترلی نمودار و مرتبهٔ جمله‌های پیشرو ۳۸
۶.۲.۲ تغییرات هندسی در اندازهٔ مجانبها ۴۱
۳.۲ مجانبها با نقاط داخلی سه یا بیشتر ۴۳
۱.۳.۲ حالت محدّب برای سه نقطهٔ درونی ۴۳
۲.۳.۲ حالت محدّب برای نقطه‌های درونی زیاد ۵۵

۳ مثالها و نتیجه‌گیری ۵۹
۱.۳ مثالهای عددی ۵۹
۱.۱.۳ مثال برای انتگرالی با یک نقطهٔ درونی ۵۹
۲.۱.۳ مثال برای انتگرالی با دو نقطهٔ درونی ۶۳
۲.۳ مثالهایی از معادلات دیفرانسیل خطی ۶۸
۱.۲.۳ انتگرال اسپیتزر ۶۹
۲.۲.۳ انتگرال مولینس ۷۲
۳.۳ نتایج ۷۴

مراجع ۷۸

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی ۸۰

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی ۸۳

لیست تصاویر

۱.۱ نمودار نیوتن برای $۲x^۵ + x^۳y^۲ + xy^۲ + ۳y^۵$ ۵
۲.۱ تابع گاما ۸
۳.۱ مسیر انتگرالگیری هنکل ۹
۴.۱ تابع دی گاما ۱۱

۱.۲ نمودار نیوتن برای $\delta_۱ > ۰$ ۲۰
۲.۲ مساحت قسمت هاشور خورده بیانگر کمیت Δ است ۲۲
۳.۲ نمودار نیوتن برای دو نقطهٔ درونی در حالت محدّب ۲۳
۴.۲ نمودار نیوتن برای دو نقطهٔ درونی (a) همخط باشند (b) $P_۲$ جلوی نمودار نیوتن و پشت یال پشتی ۳۰
۵.۲ نمودار نیوتن برای دو نقطهٔ درونی (a) $P_۲$ روی یال پشتی (b) $P_۲$ پشت یال پشتی ۳۴
۶.۲ نمودار نیوتن برای دو نقطهٔ درونی $P_۱$ و $P_۲$ که هر دو زیر قطر $m = n$ قرار گرفته‌اند. ۳۹
۷.۲ نمودار نیوتن برای دو نقطهٔ درونی $P_۱$ و $P_۲$، که در دو طرف خط $m = n$ قرار گرفته‌اند. ۴۰
۸.۲ نواحی مثلثی برای صورت محدّب با دو نقطهٔ درونی در نمودار نیوتن ۴۲
۹.۲ نمودار نیوتن برای حالت محدّب در سه نقطهٔ درونی، مقادیر $(۱_m), (۲_m), \cdots$ و $(۱_n), (۲_n), \cdots$ در متن توضیح داده شده است. ۴۶

لیست جداول

۱.۲ محدودیتهای خطی برای سریهای مجانبی ۵۳

۱.۳ مقایسهٔ مقادیر مجانبی از $I(\lambda)$، با یک نقطهٔ درونی ۶۲

۲.۳ مقایسهٔ مقادیر مجانبی از $I(\lambda)$، با یک نقطهٔ درونی برای مقدار مختلط λ . . ۶۴

۳.۳ مقایسهٔ مقادیر مجانبی از $I(\lambda)$، با دو نقطهٔ درونی ۶۵

من هستم، پس میاندیشم.

دکتر هشترودی

مقدمه

در این پایان‌نامه که بر اساس مراجع [۱۰] و [۴] تنظیم شده است، بسط مجانبی انتگرالهای n بعدی لاپلاس گونهٔ

$$I(\lambda) = \int_0^\infty \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty e^{-\lambda f(x_1, x_2, \ldots, x_n)} g(x_1, x_2, \ldots, x_n) dx_1 dx_2 \cdots dx_n, \quad (1)$$

را زمانی که $\lambda \to \infty$، مورد مطالعه قرار می‌دهیم. ابتدا فرض می‌کنیم که $g \equiv 1$ و f یک چند جمله‌ای با ضرایب مثبت باشد، توانها غیر صحیح هم می‌توانند باشند. بعداً نشان می‌دهیم که بعضی از محدودیتها را نیز باید قائل شویم. برای اطمینان از وجود جواب (۱) فرض خواهیم کرد که f شامل جملاتی به صورت $x_1^{\mu_1} + x_2^{\mu_2} + \cdots + x_n^{\mu_n}$ باشد که در آن $\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_n$ حقیقی مثبت هستند.

انتگرالهای از نوع (۱) و شکل هم ارز نوسانگر آن، بوسیلهٔ مؤلفین زیادی مورد مطالعه قرار گرفته است. مسألهٔ مشخص نمودن این انتگرال تحت فرضیاتی برای حالت $n = 1$ برای λ های بزرگ خیلی شناخته شده است. برای انتگرالهای لاپلاس چندگانه، مسأله به طور قابل ملاحظه‌ای مشکل بوده و اکثراً به مشخصهٔ کیفی تحت فرضیات وسیعی مربوط می‌شود. برای حالت کلّی f و g (f حقیقی و تحلیلی، g هموار) مطالعه توسط مالگرانژ [1] [۱۳] در سال ۱۹۷۴ منجر به اثبات قضیهٔ ساختار فرم بسط مجانبی برای $I(\lambda)$ شده است. اثبات بر اساس استفاده از مانده‌های تکین تابع فاز f در مبدأ است که محاسبهٔ آنها دور از دسترس نیست.

مطالعهٔ اخیر توسط آرنولد [2] در سال ۱۹۸۸ به نتیجهٔ بهتری منجر شده است که شامل تخمین مرتبهٔ جملهٔ پیشرو با استفاده از نمودار نیوتن [3] تابع فاز f است (برای تعریف نمودار نیوتن تابع

[1] B. Malgrange
[2] V. I. Arnold
[3] Newton diagram

به بخش ۳.۱.۱ مراجعه کنید). امّا به خاطر اینکه مطالعهٔ ایشان بر اساس روش توپولوژی جبری است، اطلاعات کمتری در مورد ساختار کلّی بسط $I(\lambda)$ به دست می‌دهد. مطالعهٔ مشابه توسط واسیلو [۴] [۲۲] در سال ۱۹۷۷، جملهٔ پیشرو بسط مجانبی و مرتبهٔ صحیح برحسب مقدار کنترلی نمودار [۵] نیوتن بدست می‌دهد امّا این روش برای بدست آوردن تقریب مراتب بالاتر مناسب نیست (برای تعریف مقدار کنترلی نمودار به بخش ۳.۱.۱ مراجعه کنید). تلاشهای زیادی برای استنتاج رفتار مجانبی $I(\lambda)$ با استفاده از نمودار نیوتن صورت گرفته است که یکی از تلاشهای مشهور بوسیلهٔ دنف [۶] و سارقوس [۷] [۸] در سال ۱۹۸۹ صورت گرفته، آنها با توجّه به صورتهای نمودار نیوتن و شیبهای اطراف، دقّت منفردها را با تغییر متغیرهای مختلف بالا بردند.

این اشخاص همچنین جزئیات بیشتر در مورد قطبها روی تابع توزیع $f_+^s \equiv max(f^s, 0)$ تعریف شده به صورت

$$\phi \to \int_{R^n} f_+^s(x_1, \cdots, x_n)\phi(x_1, \cdots, x_n), \qquad \forall \phi \in C_0^\infty(R^n),$$

بدست آوردند که در آن $C_0^\infty(R^n)$ مجموع توابع تست روی فضای n بُعدی R^n می‌باشد. قطبها را برای هر صورت از نمودار نیوتن که در مجانبهای f_+^s ظاهر شده، ارائه داده‌اند. این نتایج برای انتگرالهای نمایی یا نوسانگر بوسیلهٔ ملین [۸] تعمیم داده شده است. بعد این روش را وانگ [۹] و مکلور [۱۰] [۲۴] در سال ۱۹۸۱ به کار بردند. نظریات بیشتری بوسیلهٔ دوستال [۱۱] و گاوئو [۱۲] [۶] که آرگومان را به کار بردند، موجود است. برای هر صورت از نمودار نیوتن بسط مجانبی ارائه می‌دهیم امّا با مضاربی که تابع نوسان پیدا نکند.

یک روش مقدماتی توسط دوستال و گاوئو به کار گرفته شد که آرگومان استفاده شده برای تنظیم تابع فاز چند جمله‌ای f که در اینجا امتحان خواهیم نمود، برای هر یال نمودار نیوتن منجر

---

[۴] V. A. Vasil'ev
[۵] Remotness
[۶] J. Denef
[۷] P. Sargos
[۸] Mellin
[۹] R. Wong
[۱۰] J. P. McClure
[۱۱] M. Dostal
[۱۲] B. Gaveau

به تقریب مجانبی می‌شود امّا ضرایب برحسب انتگرالهای تابع نمایی حاصل از بازنگری عملیات است.

اگر کسی مایل باشد که استفاده از محتوای هندسی نمودار f را کنار گذارد در این صورت نتایج هنوز کاملاً محدود است. به طور خلاصه، با نمایش انتگرال مکرر $I(\lambda)$ به صورت تبدیل فوریه یا تبدیل لاپلاس با انتگرالهای با بُعد کمتر همچنان که جان [۱۳] و کلین [۱۴] [۹] یا وانگ و مکلور [۲۴]، انجام دادند، می‌توان شکل مجانبی تعریف شده توسط انتگرالهای با بُعد کمتر و با به کارگیری لم واتسون یا بحثی مشابه آن استنتاج کرد. با این وجود، این روش زمانی که تابع فاز دارای ماتریس هیسان [۱۵] ناتبهگن در مبدأ نباشد، ناهنجار می‌شود.

روش ما برای حل مسئله، دوری کردن از مشکلات مربوط به تکینی تابع f است و تلاش نمی‌کنیم که انتگرال را به عنوان تبدیل انتگرالی یک تابع تعریف شده توسط انتگرال یک شیئ با بُعد کمتر نمایش بدهیم. حتی می‌توانیم با مشکلات ناشی از تحلیلی بودن که در روش ذکر شده مواجه می‌شویم، دوری کنیم. همچنین اطلاعات هندسی بسیاری از نمودار نیوتن یک تابع فاز، برای بدست آوردن بسط مجانبی (۱) تهیه کنیم. بعلاوه، بسط مجانبی از (۱) را با توجه به مسیر هندسهٔ نمودار نیوتن توسعه می‌دهیم و بسطهای ترکیبی شامل یک سری، برای هر صورت از نمودار نیوتن، برای $I(\lambda)$ پیدا می‌کنیم.

تابع فاز f را محدود به داشتن یک نقطهٔ بحرانی در مبدأ می‌کنیم و در هیچ جای دیگر از دامنهٔ انتگرالدهٔ (۱) نقطهٔ بحرانی نداشته باشد. نقطهٔ بحرانی در مبدأ به هیچ وجه نقشی در بررسی و تحلیل ما ندارد.

بعد از ارائهٔ یک خلاصهٔ کوتاه از اصطلاحات فنّی و تعدادی ارزیابی مقدماتی، مانده را برای تبدیل نمایشی از انتگرال ملین ـ بارنس [۱۶] تکراری در این پایان‌نامه به کار می‌بریم.

---

[۱۳] D. S. Jones
[۱۴] M. Kline
[۱۵] matrix hessian
[۱۶] Mellin-Barnes

من می کوشم چنان بنویسم که، هر کسی که آن را می خواند،
بتواند به معنای درونی آن پی ببرد و سرچشمه های آن را پیدا کند
به نحوی که گویا، خودش آن را یافته است.

ویلیام لایبنیتز

فصل ۱

تعاریف و قضایای مقدماتی

۱.۱ تعاریف مقدماتی

۱.۱.۱ نمادهای $\mathcal{O}$ و o

فرض کنیم $f(z)$ و $g(z)$ توابعی با متغیر مختلط z روی دامنهٔ D باشند و حدشان وقتی که $z \to z_0$ در D موجود باشد. نمادهای $\mathcal{O}$ و o را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

تعریف ۱.۱.۱. گوییم $\boldsymbol{f(z) = \mathcal{O}(g(z))}$ وقتی $z \to z_0$، هرگاه ثابتهای مثبتی چون K و δ موجود باشند به طوری که برای $0 < |z - z_0| < \delta$ داشته باشیم، $|f| \le K|g|$. یا به طور معادل:

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = K \neq 0.$$

گوییم $\boldsymbol{f(z) = o(g(z))}$ وقتی $z \to z_0$، هرگاه به ازای هر $\epsilon > 0$، $|f| \le \epsilon|g|$ هنگامی که z متعلق به یک δ -همسایگی کوچک از z_0 باشد. یا به طور معادل داشته باشیم:

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = 0.$$

واضح است که در صورت بی‌کران بودن D، z_0 می‌تواند برابر بینهایت نیز شود. در مسائل آنالیز مجانبی z_0 اکثراً برابر صفر یا بینهایت گرفته می‌شود، در غیر این صورت واضح است که

این حالت می‌تواند با تغییر متغیر $\epsilon = z - z_0$ یا $\epsilon = 1/(z - z_0)$ اتفاق بیافتد. اگر $g(z)$ در همسایگی سفته‌ای از z_0 صفر نشود آنگاه

$f(z) = \mathcal{O}(g(z))$ نتیجه می‌دهد که f/g کراندار است وقتی که $z \to z_0$.

$f(z) = o(g(z))$ نتیجه می‌دهد که $f/g \to 0$ وقتی که $z \to z_0$.

توجه کنید که در $f(z) = o(g(z))$ تساوی از یک طرف برقرار است و نمی‌توان آن را به صورت $o(f(z)) = g(z)$ تغییر داد به عبارتی این دو معادل نیستند. معمولاً $o(1)$ برای نمایش تابعی که در حد صفر است و $\mathcal{O}(1)$ برای نمایش تابعی که کراندار است به کار می‌رود.

واضح است که اگر $f(z) = o(g(z))$ وقتی $z \to z_0$، آنگاه $f(z) = \mathcal{O}(g(z))$ وقتی $z \to z_0$. امّا از آنجایی که مفهوم $\mathcal{O}$ اطلاعات دقیقی از تابع در نقطهٔ مورد نظر می‌دهد، لذا در آنالیز مجانبی مفهوم $\mathcal{O}$ از مفهوم o مهمتر است. برای مثال اگر $f(z) \to 0$ وقتی $z \to 0$، مفهوم $\mathcal{O}$ بیان می‌دارد که $f(z)$ با چه سرعتی به صفر میل می‌کند در حالی که مفهوم o صرفاً مشخص می‌کند که $f(z)$ به صفر میل می‌کند. برای روشن شدن این مطلب مثال زیر را در نظر می‌گیریم.

از این که $\sin z = z + \mathcal{O}(z^3)$ وقتی $z \to 0$ نتیجه می‌گیریم $\sin z - z$ دقیقاً مثل z^3 به صفر میل می‌کند در حالی که برای $n = 1, 2$، $\sin z = z + o(z^n)$ وقتی $z \to 0$، نتیجه می‌دهد که $\sin z - z$ به ترتیب سریعتر از z و z^2 به صفر میل می‌کند.

توجه کنیم که مرتبهٔ یک تابع الزاماً از توان ساده نیست، برای مثال $z^2 \log z + z^3 = \mathcal{O}(z^2 \log z)$ وقتی که $z \to 0$. دامنهٔ D نقش بسیار مهمی در روابط مرتبهٔ آنالیز مجانبی ایفا می‌کند. برای مثال تابع $f(z) = 2z + z\cos z$ به ازای z های حقیقی توسط z و $3z$ کراندار می‌شود لذا برای z حقیقی داریم $f(z) = \mathcal{O}(z)$ وقتی $z \to \infty$. اما اگر z را موهومی محض با رابطهٔ $z = iy$ در نظر بگیریم آنگاه وقتی که z به بینهایت میل می‌کند، $f(z) = \mathcal{O}(ye^y)$.

قضیه ۲.۱.۱. *برای $x \to x_0$ روابط زیر برقرار است:*

الف) $o(f(x)) \mp o(f(x)) = o(f(x))$

ب) *اگر* $c \neq 0$ $\quad o(cf(x)) = o(f(x))$, و $\mathcal{O}(cf(x)) = \mathcal{O}(f(x))$

ج) $f(x).o(g(x)) = o(f(x)g(x))$

د) $o(o(f(x))) = o(f(x))$

ه) *و اگر برای* n *,* $i = 1, 2, \cdots$ *داشته باشیم* $f_i = \mathcal{O}(g_i)$ *و* $|g_i| \leq |g|$ *آنگاه* $\sum_{i=1}^{n} a_i f_i = \mathcal{O}(g)$ *و* $\prod_{i=1}^{n} f_i = \mathcal{O}\left(\prod_{i=1}^{n} g_i\right)$ *که* a_i *ها اعداد ثابتی‌اند.*

برهان. ر. ک. [۱۵] فصل اوّل. □

۲.۱.۱ تبدیل لاپلاس

تبدیل لاپلاس یک تبدیل انتگرالی است که شاید نسبت به تبدیل انتگرال فوریه در حل مسائل فیزیکی در رتبهٔ دوّم قرار داشته باشد. تبدیل لاپلاس به ویژه در حل معادلات دیفرانسیل معمولی که در تجزیه و تحلیل مدارهای الکترونیکی مطرح می‌شوند، دارای کاربرد فراوان است.

تبدیل لاپلاس یک طرفه که آن را هم معمولاً با $\mathcal{L}$ نشان می‌دهند و نباید آن را با مشتق لی اشتباه گرفت، برای $f(t)$ که $t \geq 0$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mathcal{L}[f(t)](s) = \int_{0}^{\infty} f(t)e^{-st}dt.$$

این تبدیل عموماً آن چیزی است که با عنوان **تبدیل لاپلاس** شناخته می‌شود. حال می‌خواهیم ببینیم تحت چه شرایطی، تبدیل لاپلاس یک تابع وجود دارد.

تعریف ۳.۱.۱. تابع f را بر فاصلهٔ $[a, b]$ **قطعه‌ای پیوسته** می‌گوییم، اگر f به جز احتمالاً در تعدادی متناهی نقاط مثل $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$ از $[a, b]$ پیوسته باشد و در هر نقطهٔ ناپیوستگی، حد چپ و راست آن موجود باشد.

توجه شود اگر $f(x)$ روی بازهٔ $[a, b]$ قطعه‌ای پیوسته باشد، آنگاه عدد مثبتی مانند M وجود دارد به طوری که به ازای هر x متعلق به $[a, b]$ داریم:

$$|f(x)| \leq M$$

به عبارت دیگر $f(x)$ بر $[a, b]$ کراندار است.

قضیه ۴.۱.۱. *فرض کنیم توابع $f(x)$ و $g(x)$ بر فاصلهٔ $[a,b]$ قطعه‌ای پیوسته باشند و به ازای هر x متعلق به $[a,b]$ داشته باشیم: $|f(x)| \leq g(x)$ در این صورت اگر $\int_a^\infty g(x)dx$ همگرا باشد آنگاه $\int_a^\infty f(x)dx$ نیز همگراست.*

برهان. ر. ک. [۳] قضیهٔ ۱.۶ . □

قضیهٔ زیر وجود تبدیل لاپلاس f را وقتی که f از مرتبهٔ نمایی باشد را بیان می‌کند.

قضیه ۵.۱.۱. *فرض کنیم f بر هر بازه به صورت $[0,b]$ به ازای $b > 0$ قطعه‌ای پیوسته باشد و برای هر ثابتی چون a داشته باشیم $f(x) = \mathcal{O}[e^{ax}]$ در این صورت تبدیل لاپلاس f حداقل به ازای $s > a$ وجود دارد.*

برهان. ر. ک. [۳] قضیهٔ ۲.۶ . □

یک تبدیل لاپلاس دو طرفهٔ دیگر نیز داریم که معمولاً به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mathcal{L}^2[f(t)](s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-st}dt.$$

قضیه ۶.۱.۱. *فرض می‌کنیم تابع $f(x)$ بر $[0,c]$ قطعه‌ای پیوسته باشد و $f(x) = \mathcal{O}[e^{ax}]$ و $\mathcal{L}\{f(x)\} = F(s)$ آنگاه $\lim_{s\to\infty} F(s) = 0$.*

برهان. ر. ک. [۳] قضیهٔ ۴.۶ . □

با توجه به این قضیه واضح است، شرط لازم برای اینکه تابع $F(s)$ تبدیل لاپلاس تابع $f(x)$ باشد، آن است که $\lim_{s\to\infty} F(s) = 0$ در غیر این صورت تابعی مانند $f(x)$ وجود نخواهد داشت که $F(s)$ تبدیل لاپلاس آن باشد.

فرض کنیم تابع $f(x)$ بر بازهٔ $[0,\infty)$ تعریف شده باشد و وقتی که $s \to \infty$، $F(s)$ به صفر میل کند، در این صورت تابعی مانند f که به آن **تبدیل معکوس** F می‌گوییم را به صورت $f = \mathcal{L}^{-1}\{F\}$ نمایش می‌دهیم.

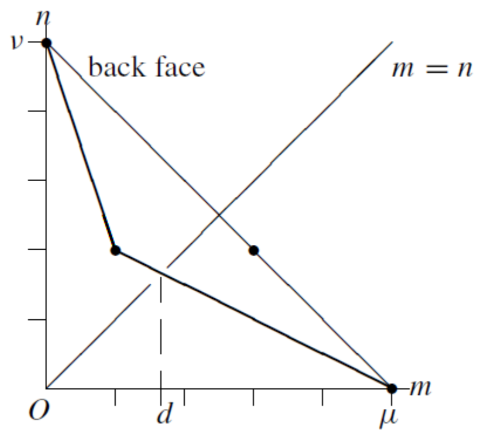
۳.۱.۱ نمودار نیوتن

تابع تحلیلی f با سری مکلورن [1]

$$f(x,y)=\sum_{m,n\geqq \circ} a_{mn}x^m y^n$$

را در نظر می‌گیریم. نمودار نیوتن $f(x,y)$ را بوسیلهٔ دستگاه جفتهای منظم، با سری مکلورن به صورت $\{(m,n) : a_{mn}\neq \circ, \quad m,n\varepsilon Z^+\}$ تعریف می‌کنیم.

به عنوان مثال نمودار نیوتن $۳y^۵+xy^۲+x^۳y^۲+۲x^۵$ به صورت زیر است: توجه کنید که



شکل ۱.۱: نمودار نیوتن برای $۳y^۵+xy^۲+x^۳y^۲+۲x^۵$

نمودار را در ربع اوّل در نظر می‌گیریم. چند ضلعی بوجود آمده را **نمودار نیوتن** گوییم.

تعریف ۷.۱.۱. نقاط $\{(m,n) : a_{mn}\neq \circ, \quad m,n\neq \circ\}$ **نقاط درونی** گوییم.

تعریف ۸.۱.۱. اگر بسط سری مکلورن f را به صورت

$$a_{m\circ}x^{\mu}+\sum_{m,n>\circ} a_{mn}x^m y^n + a_{\circ n}y^{\nu},$$

در نظر بگیریم، خطی که نقاط $(\mu,\circ)$ و $(\circ,\nu)$ را به هم وصل می‌کند، **یال پشتی** [2] گوییم.

[1] Maclurin Series
[2] Back face

تعریف ۹.۱.۱. نقاط $\{(m,n) : a_{mn} \neq \circ, \quad m,n \neq \circ\}$، اگر زیر یال پشتی باشند و همچنین ساختاری محدّب در نمودار نیوتن ایجاد کنند، این نقاط را **رئوس نمودار نیوتن** گوییم.

تعریف ۱۰.۱.۱. اگر خط گذرنده از مبدأ را با جهت $e = (۱, ۱)$ در نظر بگیریم، اگر (d,d) اوّلین نقطهٔ برخورد خط با نمودار باشد، $-۱/d$ را **مقدار کنترلی نمودار** گوییم.

۴.۱.۱ فرمول انتگرال کوشی و قضایای کوشی - گورسا و مانده

قضیه ۱۱.۱.۱. *فرض کنید f همه جا درون و روی مسیر سادهٔ بسته C که در جهت مثبت گرفته شده است، تحلیلی باشد. اگر z نقطهٔ دلخواهی درون C باشد، آنگاه*

$$f(z) = \frac{۱}{۲\pi i} \int_C \frac{f(w)}{w-z} dw.$$

برهان. ر.ک. [۲۶] قضیهٔ ۷.۲ . □

تعمیم فرمول انتگرال کوشی

اگر تابع $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ در نقطهٔ $z = x + iy$ تحلیلی باشد آنگاه توابع مؤلفه‌ای u و v در این نقطه، دارای مشتقات جزئی پیوسته از هر مرتبه‌اند.

با استفاده از استقرای ریاضی می‌توان مشتق n ام تابع $f(z)$ را به صورت زیر نمایش داد:

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{۲\pi i} \int_C \frac{f(w)}{(w-z)^{n+۱}} dw, \qquad n = \circ, ۱, ۲, \cdots$$

که در آن z نقطهٔ مشخصی درون C است و f درون و روی مسیر سادهٔ بسته C با جهت مثبت، تحلیلی است و به تعمیم فرمول انتگرال کوشی موسوم است.

قضیهٔ کوشی - گورسا

قضیه ۱۲.۱.۱. *اگر تابع f در همهٔ نقاط درون و روی مسیر سادهٔ بسته C تحلیلی باشد، آنگاه*

$$\int_C f(z) dz = \circ$$