وزارت علوم، تحقیقات و فناوری
دانشگاه تحصیلات تکمیلی علوم پایه
گاوازنگ - زنجان

انتقال انرژی بین یک کره دی‌الکتریک و یک نیم فضای ناصاف

پایان‌نامهٔ کارشناسی ارشد

فتاح فتاحپور

استاد راهنما: دکتر میر فائز میری

خرداد ۱۳۸۹

بسم الله الرحمن الرحيم

تقدیم به پدر بزرگوارم

و

مادرم مهربانم

و

خواهران و برادران عزیزم

به پاس جبران قطره‌ای از زحماتشان

قدردانی و تشکر

ازپدر و مادرم به خاطر تمام زحمت‌های که در طول این سالها برای من کشیدند و همچنین از برادران و خواهران عزیزم به خاطر تمامی کمک‌ها، حمایت‌ها، و الطافشان صمیمانه تشکر و قدردانی می‌کنم.

از استاد گرانمایه و معلم بلند پایه خود جناب آقای دکتر میر فائز میری که در طی مراحل تحقیق و تدوین این رساله راهنمای من بودند، سپاسگذارم. از جناب آقای دکتر فضلی، دکتر رفیعی و دکتر نجفی که داوری این پایان‌نامه را به عهده گرفته‌اند، سپاسگذاری می‌کنم. از عموزاده خوبم جناب آقای مصطفی فتاح پور که همواره مشوق من در ادامه تحصیل بودند، سپاسگذارم. از دوستان خوبم آقایان علی مرادیان، مجتبی نصیری زرندی، زانیار احمدی، وریا پزشکیان، سامان ثنایی به خاطر کمک هایشان در مدت این دوره تحصیلی تشکر می‌کنم.

امید است روزی بتوانم ذره‌ای از زحمات و محبت‌های این عزیزان را جبران کنم.

چکیده

این پایان نامه به مساله انتقال انرژی در سیستم‌های نانو مقیاس می‌پردازد. هدف نهایی ما محاسبه نرخ انتقال انرژی بین یک کره نانو مقیاس و یک نیم فضای ناصاف است.

ابتدا تابع گرین دیادیک را برای دو نیم فضای مسطح یکی با ضریب دی‌الکتریک ϵ_1 و دیگری با ضریب دی‌الکتریک ϵ_2 را محاسبه می‌کنیم. سپس نشان می‌دهیم که چگونه می‌توان با روش اختلالی، اثر ناهمواری مرز مشترک را بر تابع گرین دیادیک محاسبه کرد. با دانستن تابع گرین مساله و قضیه افت و خیز اتلاف، انتقال انرژی بین یک کره دی‌الکتریک در دمای T_p و یک مرز ناصاف در دمای T_B را بدست می آوریم. به عنوان یک مثال مهم، ناهمواری کسینوسی شکل را بررسی می‌کنیم.

فهرست

چکیده . . . . پنج

مقدمه . . . . نه

۱ مروری بر گسیل نور و برهم کنشهای اپتیکی درمحیطهای نانو مقیاس

۱.۱ بسط چند قطبی‌ها ۲

۲.۱ تابش دوقطبی الکتریکی ۳

۱.۲.۱ میدان‌های دوقطبی الکتریکی در فضای همگن ۳

۲.۲.۱ تابش دوقطبی ۷

۳.۲.۱ آهنگ اتلاف انرژی در محیطهای ناهمگن ۸

۳.۱ برهم‌کنش دوقطبی– دوقطبی و انتقال انرژی ۱۰

۱.۳.۱ بسط چند قطبی‌ها در برهم‌کنش‌های کولنی ۱۰

۲.۳.۱ انتقال انرژی بین دو ذره ۱۲

۴.۱ تابش جسم سیاه ۱۸

۵.۱ همدوسی، تغییر طیف و انتقال گرما ۲۲

۲ محاسبهٔ تابع گرین برای مسلهٔ دو نیم فضای مجاور

۱.۲ معادله دیفرانسیل تابع گرین ۲۵
۲.۲ حل معادلات حاکم بر مولفه‌های مستقل g_{xx}، g_{yy} و g_{xz} ۳۳
۱.۲.۲ بررسی ناحیهٔ $z' < 0$ ۳۳
الف) محاسبه g_{yy} ۳۳
ب) محاسبهٔ g_{xx} ۳۵
پ) محاسبهٔ g_{xz} ۳۶
ت) محاسبهٔ g_{zx} ۳۸
ث) محاسبهٔ g_{zz} ۳۸
۲.۲.۲ محاسبهٔ ماتریس G با استفاده از ماتریس g ۳۹
۳.۲.۲ بررسی تابع گرین در ناحیهٔ $z' > 0$ ۴۳
۴.۲.۲ خلاصه نتایج ۴۶

۳ محاسبه اختلالی تابع گرین برای شرایط مرزی پیچیده

۱.۳ بسط تابع گرین ۴۸

۴ انتقال گرما بین یک کره دی‌الکتریک و یک نیم فضا

۱.۴ معرفی مسأله ۵۲

۵ اثر ناهمواری مرز نیم فضا بر انتقال گرما بین ذره و نیم فضای ناصاف

۱.۵ محاسبهٔ $Y^{(1)}(z, K_{\|})$ ۶۵

۲.۵ محاسبهٔ $P^{B\to P(1)}(\omega)$ برای $\zeta(K_{\|})$ دلخواه ۶۶

۱.۲.۵ مثال‌ها ۶۹

۶ نتیجه گیری

پیوست ۸۰

A پیوست A

B پیوست B

C پیوست C

D پیوست D

مراجع ۱۰۲

مقدمه

اطراف هر ماده‌ای با افت وخیز میدان الکترومغناطیسی که ناشی از افت و خیزهای گرمایی و کوانتومی چگالی جریان درون ماده است، احاطه شده است. نزدیک به سطح (وقتی که فاصله از سطح کوچکتر از $\lambda_T = c_0\hbar/k_BT$ باشد) تابش گرمایی دارای همدوسی [۱] زمانی و فضایی می‌شود، به شرطی که سطح دارای مدهای سطحی نظیر پلاسمون سطحی [۲]، پُلاریتون پلاسمون سطحی [۳]، پُلاریتون فونون سطحی [۴] باشد [۱۶]، [۱۷]، [۱۸] و [۲۹] . میدان‌های افت و خیز کننده عامل بسیاری از پدیده‌های مهم مانند انتقال حرارت تابشی [۵]، برهم‌کنش واندروالس [۶] و نیروی اصطکاکی واندروالس [۷] بین اجسام است [۱].

مطالعه تابش گرمایی نقش مهمی در فیزیک داشته است. کافی است که یادآوری کنیم که مکانیک کوانتوم از تلاش‌های پلانک برای توضیح نتایج متناقض آزمایش مربوط به تابش جسم سیاه آغاز شد. در گذشته معمولاً از میدان نزدیک غیرتابشی که قسمتی از موج الکترومغناطیسی بود، صرفنظر می‌شد. با این حال، اخیراً انتقال حرارت تابشی در مقیاس میکرو و نانو گسترش یافته است [۲۵]، [۲۸]، [۲۹]، [۳۰]، [۳۱]، [۳۲]، [۳۳] و [۳۴]. شار تابشی بر واحد سطح برای دو جسم که در فاصله $d >> \lambda_T = \hbar c_0/k_BT$ از همدیگر قرار دارند توسط قانون استفان — بولتزمان [۸] به شکل زیر داده می‌شود[۷]:

$$S = \frac{\pi^2 k_B^4}{60\hbar^3 c_0^2}(T_1^4 - T_2^4) \qquad (۰-۱)$$

که T_1 و T_2 به ترتیب دمای جسم ۱ و ۲ می‌باشد. در این حد انتقال گرمایی بین دو جسم توسط انتشار امواج الکترومغناطیسی که به وسیله دو جسم تابش می‌شوند، صورت می‌گیرد. این انتقال گرما به فاصله جدایی اجسام بستگی ندارد. امواج منتشر شده از یک جسم ناشی از افت و خیزهای گرمایی و کوانتومی جریان الکترونها درون

۱ Coherency
۲ Surface plasmons
۳ Surface plasmon polaritons
۴ Surface phonon polaritons
۵ Radiative heat transfer
۶ Van der waals intraction
۷ Van der waals friction
۸ Stefan - Boltzman

جسم است. افت و خیز کوانتومی جریان الکترونها مربوط به اصل عدم قطعیت است و حتی در دمای صفر وجود دارد. اما افت وخیز گرمایی جریان الکترونها مربوط به حرکت گرمایی نامنظم الکترونها در ماده است و در دمای صفر از بین می‌رود.

میدان‌های الکترومغناطیسی که به وسیله اینگونه چگالی جریان‌های افت و خیز کننده به وجود می‌آیند، تنها به شکل امواج انتشاری نیستند، بلکه به صورت امواج کاهشی [۹] نیز وجود دارند که به صورت نمایی با فاصله از سطح مواد کاهش می‌یابند. برای اجسامی که فاصله آنها کوچکتر از طول موج گرمایی $\lambda_T = \hbar c_0/k_B T$ است، انتقال گرمایی ممکن است به خاطر امواج الکترومغناطیسی کاهشی چندین مرتبه بزرگتر شود.

به عبارتی دیگر امواج الکترومغناطیسی سطحی [۱۰] باعث می‌شوند که انتقال گرمایی در فواصل $10-100nm$ افزایش یابد[۴۰]، [۴۲] و [۵۲]. بسیاری از خصوصیات ماده چگال را می‌توان به وسیله خواص سطح آن مشخص کرد [۱۵]. در بروز این خصوصیات امواج سطحی، که ویژه مُدهای میدان الکترومغناطیسی هستند نقش کلیدی ایفا می‌کنند. برای نمونه چند مثال را نام می‌بریم:

۱) طول عمر یک ملکول هنگامی که به نزدیک سطح (در فواصل کوچکتر از میکرون) آورده شود، تغییر می‌کند. این موضوع به خاطر تشدید پلاسمون‌های سطحی برانگیخته شده است[۴۶].

۲) نیروی واندر والس بین یک ملکول و یک سطح متناسب با $1/\mid \epsilon(\omega)+1\mid^2$ است که $\epsilon(\omega)$ ثابت دی‌الکتریک محیط می‌باشد. بنابراین تشدیدی در یک فرکانس خاص وقتی که $\epsilon(\omega)=-1$ می‌شود، وجود دارد. این شرط منطبق با یک شاخه از رابطه پاشندگی موج سطحی است. بنابراین نیروی واندروالس بسته به فاصله ملکول از سطح و تشدیدهای سطحی می‌تواند دافعه باشد[۴۷]. مثال‌های بیشتر را می‌توان در این مراجع[۴۸]، [۴۹]، [۵۰] و [۵۱] دنبال کرد.

چند رهیافت برای مطالعه‌ی میدان‌های الکترومغناطیسی افت و خیز کننده وجود دارد. یک رهیافت مناسب توسط رایتو [۱۱][۸] در سال ۱۹۵۳ ارائه شد. رایتو فرض کرد که میدان‌های الکترومغناطیسی افت و خیز کننده به وسیله افت و خیزهای کوانتومی و گرمایی چگالی جریان $\mathbf{j}$ درون مواد تولید می‌شوند. $<\mathbf{j}>=\mathbf{0}$، اما $<\mathbf{jj}^*>\neq\mathbf{0}$. که در آن $<>$ به معنی متوسط گیری زمانی است. میدان الکترومغناطیسی را می‌توان با استفاده از معادلات ماکسول و در نظر گرفتن چگالی جریان افت و خیزکننده به عنوان چشمه، محاسبه کرد. با دانستن میدان‌های افت وخیز

[۹] Evascent wave

[۱۰] Surface electomagnetic waves

[۱۱] Rytov

کننده می‌توان بردار پوینتینگ و تانسور تنش را محاسبه کرد و با استفاده از آنها انتقال انرژی بین اجسام، برهم کنش واندروالس و غیر را بدست آورد.

ما در این پایان نامه این رهیافت را دنبال می‌کنیم. قصد ما این است که انتقال حرارت بین یک کره نانو مقیاس و یک نیم فضای دی‌الکتریک با سطح ناصاف را بررسی کنیم.

در فصل اول مروری بر گسیل نور و برهم کنشهای اپتیکی در محیط‌های نانو مقیاس داریم. در این فصل با استفاده از تابع گرین دیادیک فضای آزاد، میدان های الکتریکی و مغناطیسی یک دو قطبی را بدست می آوریم، سپس آهنگ اتلاف انرژی را برای محیط‌های همگن و ناهمگن حساب می‌کنیم. در ادامه انتقال انرژی بین دو ذره را مرور می‌کنیم.

در فصل دوم تابع گرین دیادیک را برای دو نیم فضا یکی با ضریب دی الکتریک ϵ_1 و دیگری با ضریب دی‌الکتریک ϵ_2 محاسبه می‌کنیم. در این فصل فرض می‌کنیم که مرز بین دو محیط صاف است.

در فصل سوم تابع گرین را برای دو نیم فضای مجاور با مرز ناصاف بدست خواهیم آورد. برای اینکار ناصافی مرز را به صورت تغییرات ضریب دی‌الکتریک ϵ مدل می‌کنیم. بنابراین با فرض اینکه تغییرات $\delta\epsilon$ کوچک باشد، حل اختلالی تابع گرین را ارائه می‌دهیم.

در فصل چهارم انتقال انرژی از یک نیم فضا به یک ذره کوچک در بالای آن را حساب می‌کنیم. در این محاسبه از تابع گرین دیادیک محاسبه شده در فصل دوم سود می‌جوییم.

در فصل پنجم انتقال حرارت بین یک ذره کوچک و یک نیم فضا با مرز ناصاف را بررسی می‌کنیم. برای بررسی اثر ناهمواری از محاسبات اختلالی تابع گرین در فصل سوم و چهارم استفاده می‌کنیم.

فصل اول

مروری بر گسیل نور و برهم کنشهای اپتیکی درمحیطهای نانو مقیاس

هدف این فصل مروری بر برهم کنشهای اپتیکی بین سیستم‌های به اندازه نانومتر و خصوصیات تابش گسیل شده از این گونه سیستمها است. برای جزئیات بیشتر به مرجع [۱] نگاه کنید. برهم کنشهای اپتیکی مواد با اندازه نانومتر، در زمینه‌های مختلف تحقیقاتی ظاهر می‌شوند فعالیت پروتئین‌ها [۱] و دیگر ماکروملکول‌ها را می‌توان به وسیله تکنیک‌های اپتیکی دنبال کرد؛ تک ملکول‌های [۲] تحریک شده با نور را می‌توان برای جستجو کردن محیط اطراف استفاده کرد؛ و برهم‌کنشهای اپتیکی با فلزات نانو ساختار به خاطر کاربردهای سنجشی مهم هستند.

برای فهم دقیق بر همکنش نور با ماده بایستی از الکترودینامیک کوانتومی استفاده کرد. برای مطالعه بیشتر به مراجع [۴] و [۵] نگاه کنید. اما چون بررسی کوانتومی نانوساختارها بسیار مشکل است، در ابتدا به توصیف کلاسیک متوسل می‌شویم.

[۱] Proteins

[۲] Single moleocules

۱.۱ بسط چند قطبی‌ها

یک قسمت از ماده را که در مقایسه با طول موج نور کوچک است، به عنوان ذره در نظر می‌گیریم. اگر چه ذره در مقایسه با طول موج نور کوچک است اما از تعداد زیادی ملکول تشکیل شده است.

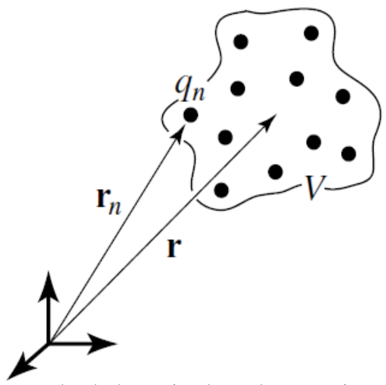
در مقیاس ماکروسکوپی چگالی بار ρ و چگالی جریان j را می‌توان به عنوان یک تابع پیوسته از مکان در نظر گرفت. البته در واقع اتم‌ها و ملکول‌ها از بارهای گسسته که از نظر فضایی از هم جدا هستند، تشکیل شده‌اند. بنابراین ساختار میکروسکوپی مواد را نمی‌توان با استفاده از معادلات ماکسول ماکروسکوپی بررسی کرد. در واقع میدان‌های ماکروسکوپی میانگین فضایی میدان‌های میکروسکوپی هستند.

به منظور بدست آوردن انرژی پتانسیل در یک سیستم میکروسکوپی، بایستی تعاریف میدان جابجایی الکتریکی $\mathbf{D}$ و میدان مغناطیسی $\mathbf{H}$ را کنار گذاشت و تنها میدان‌های $\mathbf{E}$ و $\mathbf{B}$ در فضای آزاد بین یک مجموعه از بارهای مجزا را بررسی کرد. بنابراین در معادلات ماکسول $\boldsymbol{D} = \epsilon_0 \boldsymbol{E}$ و $\boldsymbol{H} = \mu_0^{-1} \boldsymbol{B}$ را جایگزین می‌کنیم و به جای ρ و j از معادلات (۱—۱) و (۱—۲) استفاده می‌کنیم:

$$\rho(\boldsymbol{r}) = \sum_n q_n \delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_n) \qquad (۱—۱)$$

$$j(\boldsymbol{r}) = \sum_n q_n \dot{\boldsymbol{r}}_n \delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_n) \qquad (۱—۲)$$

در این معادلات $\boldsymbol{r}_n$ بردار موقعیت بار nام و $\dot{\boldsymbol{r}}_n$ سرعت آن است (شکل ۱—۱).



شکل ۱—۱ در مقیاس میکروسکوپی، تابش اپتیکی با بارهای مجزای ماده برهم‌کنش می کند. مجموعهٔ پاسخ تمام بارها با مختصات $\mathbf{r_n}$ با بسط چندقطبی با مبدأ $\mathbf{r}$ توصیف می‌شود. برگرفته از مرجع [۱]

۲.۱ تابش دوقطبی الکتریکی

چگالی جریان داده شده در معادلهٔ (۱—۲) را بصورت سری تیلور حول r_0 بسط می‌دهیم. با نگه داشتن جمله‌های درجه پایین بسط، j به صورت زیر در می آید:

$$\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}) = \frac{d}{dt}\boldsymbol{\mu}(t)\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0) \qquad (۱—۳)$$

که در آن گشتاور دوقطبی را به صورت زیر تعریف کرده‌ایم:

$$\boldsymbol{\mu}(t) = \sum_n q_n(\boldsymbol{r}_n - \boldsymbol{r}_0) \qquad (۱—۴)$$

بستگی زمانی میدان‌ها به صورت امواج تکفام در نظر گرفته می‌شود $[\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r},t) = \Re[\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r})e^{-i\omega t}]$، پس:

$$\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}) = -i\omega\boldsymbol{\mu}\delta(\boldsymbol{r}_n - \boldsymbol{r}_0) \qquad (۱—۵)$$

بنابراین در مرتبه‌های پایین بسط، هر چگالی جریان را می‌توان به عنوان یک دوقطبی نوسانی با مبدأ در مرکز توزیع بار، پنداشت.

۱.۲.۱ میدان‌های دوقطبی الکتریکی در فضای همگن

میدان دوقطبی را می توان با درنظر گرفتن میدان ناشی از دوبار نوسانی q با علامت مخالف که به فاصله کوچک ds از هم قرار دارند، بدست آورد.

بدست آوردن میدان‌های دوقطبی از روش تابع گرین مفیدتر خواهد بود. میدان‌ها به صورت زیر نوشته می‌شوند:

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{E}_0 + i\omega\mu\mu_0 \int dv' \overleftrightarrow{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',\omega)\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}') \qquad (۱—۶)$$

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{H}_0 + \int \Big[\nabla\times \overleftrightarrow{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',\omega)\Big]\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}')\,dv' \qquad (۱—۷)$$

که $\overleftrightarrow{G}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',\omega)$ نشان دهندهٔ تابع گرین دیادیک است و $\boldsymbol{E}_0$ و $\boldsymbol{H}_0$ میدان‌های دوقطبی در غیاب چگالی جریان $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}')$ هستند. با جایگذاری $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}')$ از رابطه‌ی (۱—۵)، $\boldsymbol{E}$ و $\boldsymbol{H}$ به صورت زیر در می آیند:

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \omega^2\mu\mu_0 \overleftrightarrow{G}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_0,\omega)\boldsymbol{\mu} \qquad (۱—۸)$$

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}) = -i\omega\Big[\nabla\times \overleftrightarrow{G}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_0,\omega)\Big]\boldsymbol{\mu} \qquad (۱—۹)$$

تابع گرین فضایی آزاد در پیوست B محاسبه شده است. با استفاده از معادله (B—۲۳) داریم:

$$\overleftrightarrow{G}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_0) = \frac{e^{ikR}}{4\pi R}\Big[(1+\frac{ikR-1}{k^2R^2})\overleftrightarrow{I} + \frac{3-3ikR-k^2R^2}{k^2R^2}\frac{\boldsymbol{RR}}{R^2}\Big] \qquad (۱—۱۰)$$

که در این معادله $R =\mid \boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0 \mid$ و $\boldsymbol{RR}$ حاصلضرب خارجی بردار $\boldsymbol{R}$ در خودش و $\overleftrightarrow{I}$ ماتریس یکانی است.

از معادلات (۱—۸)، (۱—۹) و (۱—۱۰) می‌توان میدان‌های الکترومغناطیسی را برای یک دوقطبی الکتریکی $\boldsymbol{\mu}$ با مولفه‌های دکارتی μ_x، μ_y و μ_z بدست آورد.

تابع گرین جمله‌هایی به صورت $(kR)^{-1}$ و $(kR)^{-2}$ و $(kR)^{-3}$ دارد. در حوزهٔ میدان‌های دور [۳] که $\lambda << R$ است، فقط جمله‌هایی به صورت $(kR)^{-1}$ باقی می‌مانند. از طرفی در حوزه میدان‌های نزدیک [۴] که $\lambda >> R$ است، فقط جمله‌هایی به صورت $(kR)^{-3}$ باقی می‌مانند. جمله‌هایی به صورت $(kR)^{-2}$ در حوزهٔ میدان‌های میانی [۵] که $\lambda \approx R$ است، وجود دارند. پس با استفاده از معادلهٔ (۱—۱۰) داریم:

$$\overleftrightarrow{G}_{NF}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_0) = \frac{e^{ikR}}{4\pi R}\frac{1}{k^2R^2}\Big[-\overleftrightarrow{I} + 3\frac{\boldsymbol{RR}}{R^2}\Big] \qquad (۱—۱۱)$$

$$\overleftrightarrow{G}_{IF}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_0) = \frac{e^{ikR}}{4\pi R}\frac{i}{kR}\Big[\overleftrightarrow{I} - 3\frac{\boldsymbol{RR}}{R^2}\Big] \qquad (۱—۱۲)$$

$$\overleftrightarrow{G}_{FF}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_0) = \frac{e^{ikR}}{4\pi R}\Big[\overleftrightarrow{I} - \frac{\boldsymbol{RR}}{R^2}\Big] \qquad (۱—۱۳)$$

از این معادلات دیده می‌شود که میدان‌های میانی ۹۰ درجه با میدان‌های دور و نزدیک اختلاف فاز دارند.

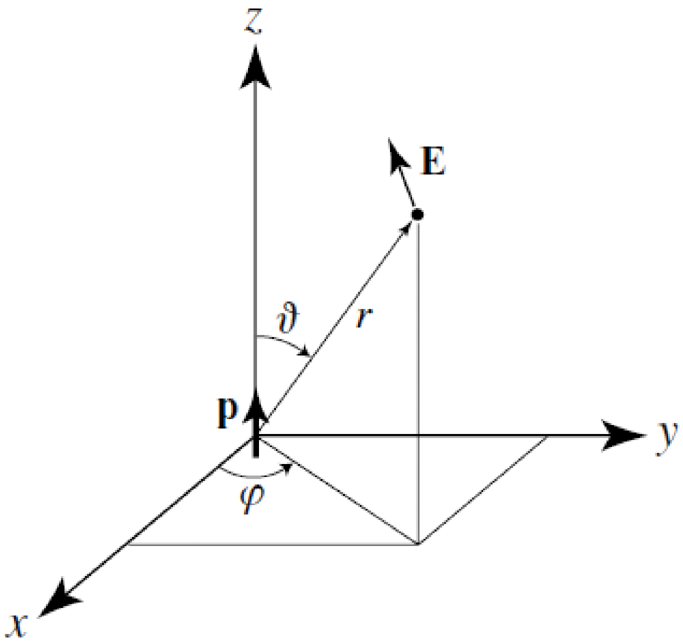
چون دوقطبی در محیط همگن قرار دارد، هر سه مولفه دوقطبی منجر به میدان‌های یکسان می‌شوند. برای سادگی، مبدأ مختصات را در $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_0$ و جهت دوقطبی را در جهت محور z می‌گیریم. در شکل (۱—۲)، نمای

[۳] Far Field

[۴] Near Field

[۵] Intermediate Field

کلی مساله نشان داده شده است.



شکل ۱—۲ میدان یک دوقطبی در مختصات کروی (r, θ, ϕ) نشان داده شده است. جهت دوقطبی در جهت محور z است $(\theta = 0)$. برگرفته از مرجع [۱]

با توجه به شکل می‌توان میدان‌ها را در مختصات کروی نوشت. تبدیلات زیر را بکار می‌بریم[۱۹]:

$$x = r \sin\theta \cos\phi \tag{۱—۱۴}$$

$$y = r \sin\theta \sin\phi \tag{۱—۱۵}$$

$$z = r \cos\theta \tag{۱—۱۶}$$

$$\hat{\boldsymbol{r}} = \hat{\boldsymbol{\imath}} \sin\theta \cos\phi + \hat{\boldsymbol{\jmath}} \sin\theta \sin\phi + \hat{\boldsymbol{z}} \cos\theta \tag{۱—۱۷}$$

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = \hat{\boldsymbol{\imath}} \cos\theta \sin\phi + \hat{\boldsymbol{\jmath}} \cos\theta \sin\phi - \hat{\boldsymbol{z}} \sin\theta \tag{۱—۱۸}$$

$$\hat{\boldsymbol{\phi}} = -\hat{\boldsymbol{\imath}} \sin\phi + \hat{\boldsymbol{\jmath}} \cos\phi \tag{۱—۱۹}$$

$$\overleftrightarrow{\boldsymbol{I}} = \hat{\boldsymbol{r}}\hat{\boldsymbol{r}} + \hat{\boldsymbol{\theta}}\hat{\boldsymbol{\theta}} + \hat{\boldsymbol{\phi}}\hat{\boldsymbol{\phi}} \tag{۱—۲۰}$$

$$\boldsymbol{R} = r\hat{\boldsymbol{r}} \tag{۱—۲۱}$$

پس با استفاده از معادلات (۱—۱۰) و (۱—۱۴) تا (۱—۲۱) داریم:

$$\overleftrightarrow{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_0)=\frac{e^{ikr}}{4\pi r}\left[(1+\frac{ikr-1}{k^2r^2})\overleftrightarrow{\boldsymbol{I}}+\frac{3-3ikr-k^2r^2}{k^2r^2}\boldsymbol{rr}\right] \tag{۱—۲۲}$$

و با استفاده از معادلهٔ (۱—۸) برای میدان الکتریکی داریم:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}&=|\boldsymbol{\mu}|\mu_0\mu\omega^2\frac{e^{ikr}}{4\pi r}\left[(1+\frac{ikr-1}{k^2r^2})\overleftrightarrow{\boldsymbol{I}}+\frac{3-3ikr-k^2r^2}{k^2r^2}\boldsymbol{rr}\right]\cdot\left[\cos\theta\hat{\boldsymbol{r}}-\sin\theta\hat{\boldsymbol{\theta}}\right]\\&=|\boldsymbol{\mu}|\mu_0\mu\omega^2\frac{e^{ikr}}{4\pi r}\left[(1+\frac{ikr-1}{k^2r^2}+\frac{3-3ikr-k^2r^2}{k^2r^2})\cos\theta\hat{\boldsymbol{r}}-(1+\frac{ikr-1}{k^2r^2})\sin\theta\hat{\boldsymbol{\theta}}\right]\end{aligned} \tag{۱—۲۳}$$

پس میدان الکتریکی فقط دارای مولفه‌های شعاعی و سمتی است:

$$E_r=\frac{|\boldsymbol{\mu}|\cos\theta}{4\pi\epsilon_0\epsilon}\frac{e^{ikr}}{r}k^2\left[\frac{2}{k^2r^2}-\frac{2i}{kr}\right] \tag{۱—۲۴}$$

$$E_\theta=\frac{|\boldsymbol{\mu}|\sin\theta}{4\pi\epsilon_0\epsilon}\frac{e^{ikr}}{r}k^2\left[\frac{1}{k^2r^2}-\frac{i}{kr}-1\right] \tag{۱—۲۵}$$

به همین ترتیب میدان مغناطیسی تنها مولفهٔ H_ϕ را دارد:

$$H_\phi=\frac{|\boldsymbol{\mu}|\sin\theta}{4\pi}\frac{e^{ikr}}{r}k\left[-\frac{i}{kr}-1\right]\sqrt{\frac{\epsilon_0\epsilon}{\mu_0\mu}} \tag{۱—۲۶}$$

با توجه به معادله (۱—۲۴) دیده می‌شود که مولفهٔ E_r جمله مربوط به میدان‌های دور را ندارد.

چون دوقطبی در نظر گرفته شده به صورت هارمونیک ($e^{-i\omega t}$) با زمان نوسان می‌کند، پس میدان‌های الکترومغناطیسی تک فرکانس هستند و با همان فرکانس نوسان می‌کنند. با استفاده از اصل برهم نهی[۶] و تبدیل فوریه امکان تولید وابستگی زمانی میدان‌ها وجود دارد.

در محیط‌های غیره پاشنده[۷] بهتر است که بستگی صریح زمانی به صورت زیر نشان داده شود:

$$e^{ikr}k^m\boldsymbol{\mu}=e^{ikr}[\frac{in}{c_0}]^m(-i\omega)^m\boldsymbol{\mu}=[\frac{in}{c_0}]^m\frac{d^m}{dt^m}\boldsymbol{\mu}(t-\frac{nr}{c_0}) \tag{۱—۲۷}$$

که n ضریب شکست و $t-nr/c_0$ زمان تاخیری[۸] است. با قرار دادن معادلهٔ (۱—۲۷) در معادلات مربوط به

[۶] Principle of Superposition

[۷] Non-Dispersive

[۸] Retarded Time

مولفه‌های میدان نتیجه می‌شود که:

$$E_r(t) = \frac{\cos\theta}{4\pi\epsilon_0\epsilon}\left[\frac{2}{r^3} + \frac{2n}{c_0 r^2}\frac{d}{dt}\right]\left|\boldsymbol{\mu}(t - \frac{nr}{c_0})\right| \tag{۱—۲۸}$$

$$E_\theta(t) = \frac{\sin\theta}{4\pi\epsilon_0\epsilon}\left[\frac{1}{r^3} + \frac{n}{c_0 r^2}\frac{d}{dt} + \frac{n^2}{c_0^2 r}\frac{d^2}{dt^2}\right]\left|\boldsymbol{\mu}(t - \frac{nr}{c_0})\right| \tag{۱—۲۹}$$

$$H_\phi = \frac{\sin\theta}{4\pi\epsilon_0\epsilon}\sqrt{\frac{\epsilon_0\epsilon}{\mu_0\mu}}\left[\frac{n}{c_0 r^2}\frac{d}{dt} + \frac{n^2}{c_0^2 r}\frac{d^2}{dt^2}\right]\left|\boldsymbol{\mu}(t - \frac{nr}{c_0})\right| \tag{۱—۳۰}$$

از معادلات (۱—۲۸) تا (۱—۳۰) نتیجه می‌شود که میدان‌های دور به وسیلهٔ شتاب بارهایی که دوقطبی را می سازند تولید می‌شود. همچنین میدان‌های نزدیک و میانی به ترتیب به وسیلهٔ مکان و سرعت این بارها تولید می شوند.

۱.۲.۲ تابش دوقطبی

می‌توان نشان داد که تنها میدان‌های دور در توزیع انرژی خالص انتقالی نقش دارند. بردار پوینتینگ[۹] وابسته به میدان‌های دور تنها با نگه داشتن جملاتی به صورت r^{-1} در میدان‌های دوقطبی محاسبه می‌شود.

$$\boldsymbol{S}(t) = \boldsymbol{E}(t)\times\boldsymbol{H}(t) = \begin{vmatrix} \hat{\boldsymbol{r}} & \hat{\boldsymbol{\theta}} & \hat{\boldsymbol{\phi}} \\ E_r & E_\theta & 0 \\ 0 & 0 & H_\phi \end{vmatrix} = \hat{\boldsymbol{r}}E_\theta H_\phi - \hat{\boldsymbol{\theta}}E_r H_\phi$$

$$= \frac{\hat{\boldsymbol{r}}}{16\pi^2\epsilon_0\epsilon}\frac{\sin^2\theta}{r^2}\frac{n^3}{c_0^3}\left|\frac{d^2}{dt^2}\boldsymbol{\mu}(t - \frac{nr}{c_0})\right|^2 \tag{۱—۳۱}$$

توان تابشی با انتگرال گیری روی سطح کره به صورت بدست می آید:

$$P = \int \boldsymbol{S}.\hat{\boldsymbol{n}}\,da = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon}\frac{n^3}{c_0^3}\frac{2}{3}\left|\frac{d^2}{dt^2}\boldsymbol{\mu}(t)\right|^2 \tag{۱—۳۲}$$

با میل دادن شعاع کره به سمت صفر، اثر تاخیری صفر می‌شود. مقدار متوسط P برای دوقطبی نوسانی هارمونی به شکل زیر است:

$$P = \frac{|\,\boldsymbol{\mu}\,|^2}{4\pi\epsilon_0\epsilon}\frac{n^3}{3}\frac{\omega^4}{c_0^3} \tag{۱—۳۳}$$

که ω فرکانس نوسان است.

[۹] Poynting Vector

۳.۲.۱ آهنگ اتلاف انرژی در محیطهای ناهمگن

طبق قضیهٔ پوینتینگ توان تابشی هر توزیع جریانی با بستگی زمانی نوسانی با آهنگ اتلاف انرژی dw/dt یکسان است:

$$\frac{dw}{dt} = -\frac{1}{2}\int_V \Re\Big\{\boldsymbol{j}^*(\boldsymbol{r}).\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})\Big\}\,dV \qquad (۱-۳۴)$$

که V حجم منبع است. $\Re$ نمایش دهندهٔ قسمت حقیقی و $\Im$ نمایش دهندهٔ قسمت موهومی یک عدد مختلط است.

با استفاده از معادله (۱-۴) نتیجه می‌شود:

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\omega}{2}\Im\Big\{\boldsymbol{\mu}^*.\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}_0)\Big\} \qquad (۱-۳۵)$$

که میدان در نقطه مبدا دوقطبی یعنی r_0 محاسبه شده است. این معادله را می‌توان با استفاده از رابطهٔ (۱-۸) به صورت زیر نوشت:

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\omega^3 \mid \boldsymbol{\mu} \mid^2}{2\epsilon_0\epsilon c_0^2}\Im\Big\{\hat{n}_\mu.\overleftrightarrow{G}(\boldsymbol{r}_0,\boldsymbol{r}_0,\omega).\hat{n}_\mu\Big\} \qquad (۱-۳۶)$$

که $\hat{n}_\mu \mid \boldsymbol{\mu} \mid = \boldsymbol{\mu}$ و n_μ بردار یکه در جهت دوقطبی است. در نگاه اول به نظر می‌رسد که نمی‌توان معادله (۱-۳۷) را محاسبه کرد، چون جملاتی شبیه e^{ikR}/R در آن ظاهر می‌شود که در $\boldsymbol{r}_0$ بینهایت می‌شوند. چون بین $\boldsymbol{E}$ و $\boldsymbol{\mu}$ ضرب داخلی است پس تنها مولفه‌هایی از $\boldsymbol{E}$ وارد محاسبه می‌شوند که در جهت دوقطبی باشند. چون $\boldsymbol{\mu}$ در جهت $\hat{z}$ قرار دارد، پس بایستی مولفه z میدان الکتریکی محاسبه شود. از رابطه‌های (۱-۸) و (۱-۱۰) بدست می آید:

$$E_z = \frac{\mid \boldsymbol{\mu} \mid}{4\pi\epsilon_0\epsilon}\frac{e^{ikR}}{R}\left\{k^2\sin^2\theta - \frac{ik}{R}(3\cos^2\theta - 1) + \frac{1}{R^2}(3\cos^2\theta - 1)\right\} \qquad (۱-۳۷)$$

که از $\omega = kc_0$ استفاده شده است. برای محاسبهٔ میدان در مرکز دوقطبی قسمت نمایی را بسط می‌دهیم:

$$e^{ikR} = 1 + ikR + ... \qquad (۱-۳۸)$$

در حد $R \to 0$ معادله (۱—۳۵) به صورت زیر در می آید:

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\omega}{2} \mid \boldsymbol{\mu} \mid \Im E_z \qquad (۱—۳۹)$$

از رابطه‌های (۱—۳۷) و (۱—۳۸) $\Im E_z$ بدست می آید.

$$\begin{aligned} E_z &= \frac{\mid \boldsymbol{\mu} \mid}{4\pi\epsilon_0\epsilon R}\Big(1 + ikR + ...\Big)\Big(k^2 \sin^2\theta + (\frac{1}{R^2} - \frac{ik}{R})(3\cos^2\theta - 1)\Big) \\ &= \frac{\mid \boldsymbol{\mu} \mid}{4\pi\epsilon_0\epsilon} ik^3 \sin^2\theta \end{aligned} \qquad (۱—۴۰)$$

پس داریم:

$$\Im E_z = \frac{\mid \boldsymbol{\mu} \mid}{4\pi\epsilon_0\epsilon} k^3 \sin^2\theta \qquad (۱—۴۱)$$

و در نتیجه

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\mid \boldsymbol{\mu} \mid^2}{8\pi\epsilon_0\epsilon} \omega k^3 \sin^2\theta \qquad (۱—۴۲)$$

و با انتگرال گیری روی سطح کره نتیجه می‌شود:

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\mid \boldsymbol{\mu} \mid^2}{12\pi\epsilon_0\epsilon} \omega k^3 \qquad (۱—۴۳)$$

که این معادله با معادلهٔ (۱—۳۳) یکسان است. بنابراین معادله (۱—۳۶) علی‌رغم یک تکینگی در $R = 0$ منجر به نتیجه درست شد. اهمیت این معادله هنگامی آشکار می‌شود که یک دوقطبی تابش کننده در یک محیط ناهمگن مانند یک اتم در کاواک یا یک ملکول در اَبَر شبکه در نظر گرفته شود. آهنگ انرژی اتلافی را هنوز می‌توان با انتگرال گیری از بردار پوینتینگ روی سطح بسته دوقطبی تابش کننده محاسبه کرد. بنابراین برای انجام اینکار بایستی میدان‌های الکترومغناطیسی را در هر جای سطح بسته بدست آورد، زیرا در محیط‌های ناهمگن این میدان به تنهایی مساوی میدان دوقطبی نیست. در عوض این میدان خودسازگار است که به وسیله برهم نهی میدان دوقطبی $\boldsymbol{E}_0$ و میدان پراکنده شده $\boldsymbol{E}_s$ از محیط تولید می‌شود. مناسب است که میدان الکتریکی