دانشکده ریاضی، آمار و علوم کامپیوتر

« گروه ریاضی »

پایان‌نامه کارشناسی ارشد ریاضی

عنوان

کرکتر میانگین پذیری جبرهای باناخ

نگارنده

محمد گودرزی

استاد راهنما

دکتر علی غفاری

استاد مشاور

دکتر رضا معمارباشی

تیر ۹۰

بسم الله الرحمن الرحیم

تقدیم به :

پدرم به پاس سالها تلاش تا بیاموزم

مادرم به پاس دلسوزی ها تا بیاسایم

خدایا:

مرا همواره آگاه و هوشیار دار تا پیش از شناختن درست کسی یا فکری، مثبت یا منفی، قضاوت نکنم، جهل آمیخته با خودآگاهی و حسد، مرا رایگان ابزار قتاله دشمن برای حمله به دوست نسازد، خدایا به من تحمل عقیدهٔ مخالف را ارزانی دار، عقیده‌ام را از دست عقده‌ام مصون دار.

«دکتر علی شریعتی»

چکیده

مفهوم φ ـ میانگین پذیری روی جبر باناخ A را مورد مطالعه قرار می‌دهیم (φ یک همریختی از A بتوی $\mathbb{C}$ است). برخی خصوصیات ویژه از φ ـ میانگین پذیری و همچنین بعضی خصوصیات ارثی از φ ـ میانگین پذیری را ثابت می‌کنیم. بحث میانگین پذیری از جبرهای باناخ A را با نسبت دادن یک همریختی غیر صفر φ به یک تابعک خطی m_φ که روی زیر فضای معین از $A^\star$ تعریف می‌شود ادامه می دهیم که وجود چنین تابعک m_φ معادل با وجود واحد تقریبی راست کراندار در ایده آلی ماکسیمال در A می‌باشد. شرایط لازم و کافی برای وجود یک φ ـ میانگین از نرم یک را بررسی و مطالعه می‌کنیم. حالتی را شرح خواهیم داد که اگر تابعک m_φ یکتا باشد آنگاه m_φ به مرکز توپولوژیک دوگان دوم جبر $A^{\star\star}$ تعلق دارد و جمع مستقیم از دو جبر باناخ را مطالعه خواهیم کرد.

واژه‌های کلیدی: جبر باناخ، مرکز توپولوژیک، میانگین پذیری، φ ـ میانگین، کرکتر.

مقدمه

در این پایان نامه قصد داریم مفهوم میانگین پذیری را شرح دهیم و میانگین پذیری را روی جبرهای با ناخ توسعه دهیم.

فرض کنید که A یک جبر باناخ دلخواه باشد و φ یک همریختی غیر صفر از A بروی $\mathbb{C}$ باشد. A را φ ـ میانگین پذیر گوئیم هر گاه تابعک خطی و کراندار $m \in A^{\star\star}$ موجود باشد طوری که برای هر $f \in A^{\star},\ a \in A$،

$$\langle m, \varphi\rangle = ۱,\ \langle m, f.a\rangle = \varphi(a)\langle m, f\rangle.$$

در این راستا ریاضی دانان زیادی فعالیت کرده‌اند که از جمله می‌توان به لائو [1] و جانسون [2] اشاره کرد.همچنین عظیمی فرد در این زمینه مطالعه و تحقیقاتی انجام داده است[۱۰].

لائو در[۷] میانگین پذیری چپ جبرهای باناخ را مورد مطالعه قرار داد و در حالت خاص او نشان داد که میانگین پذیری چپ $L^۱(G)$ و $M(G)$ معادل میانگین پذیری G است.

جانسون [۸] نشان داد که میانگین پذیری $L^۱(G)$ هم ارز با وجود واحد تقریبی راست کراندار در اید آلی ماکسیمال در $L^۱(G)$ است که شامل تابع هایی با انتگرال صفر می‌باشد. بنابراین میانگین پذیری چپ $L^۱(G)$ هم ارز میانگین پذیری $L^۱(G)$ می‌باشد. ما برای گسترش و توسیع مفهوم میانگین پذیری خواننده را به [۳, ۴] و [۱۵] ار جاع می‌دهیم.

جانسون در [٦] میانگین پذیری جبرهای باناخ را مورد مطالعه قرار می‌دهد. یکی از بنیادی ترین و مهمترین نتایج جانسون این است که $L^۱(G)$ میانگین پذیر است اگر و فقط اگر G میانگین پذیر باشد، که در آن G گروه فشرده موضعی است. بنابراین میانگین پذیری نقش مهمی در نظریه جبر باناخ و آنالیز هارمونیک ایفا می کند.

به یک جبر باناخ A میانگین پذیر کرکتری راست گفته می‌شود اگر برای هر کرکتر φ، جبر باناخ A، φ ـ میانگین پذیر باشد و یک واحد تقریبی راست کراندار داشته باشد [۱۰]. اگر گروه فشرده موضعی G میانگین پذیر باشد، در اینصورت $L^۱(G)$، ۱ ـ میانگین پذیر است (۱ کرکتر بدیهی است). اما

[1] A. T . M . Lau

[2] B . Johnson

$l^1(N)$ میانگین پذیر نیست چون $l^1(N)$ واحد تقریبی کراندار ندارد.

این پایان نامه مشتمل بر پنج فصل می‌باشد، که فصل اول شامل تعاریف و قضایای مورد نیاز در فصل های بعدی می‌باشد.

در فصل دوم با آوردن یک سری قضیه میانگین پذیری و φ - میانگین پذیری روی جبرهای باناخ را توصیف می‌کنیم. در قضیه (۱.۲.۲) نشان می‌دهیم که φ - میانگین پذیری A معادل با صفر شدن گروه کوهمولوژی $H^1(A, X^\star)$ می‌باشد و در قضیه (۲.۲.۲) φ - میانگین پذیری هم ارز با وجود تور $(u_\gamma)_\gamma$ در A بطوریکه برای هر $a \in A$، $\|au_\gamma - \varphi(a)u_\gamma\| \to 0$. در قضایای (۴.۲.۲) و (۵.۲.۲) و (۶.۲.۲) شرایط دیگر هم ارز با φ - میانگین پذیری را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

در ادامه ارتباط φ - میانگین پذیری چپ از یک زیر فضای $A^\star$ با φ - میانگین منحصر به فرد را مورد بررسی قرار می‌دهیم. همچنین ارتباط φ - میانگین پذیری دو طرفه را با تقریب دو طرفه φ - میانگین را مورد توجه قرار می‌دهیم.

در فصل سوم φ - میانگین ها با نرم یک را مورد بررسی قرار می‌دهیم. تعدادی محک برای وجود φ - میانگین با نرم یک را به اثبات می‌رسانیم (۳.۲.۳)، (۴.۲.۳)، (۷.۲.۳).

در فصل چهارم خواص ارثی φ - میانگین پذیری را در قضایای (۱.۲.۴) و (۲.۲.۴) مطالعه خواهیم کرد.

و در فصل پنجم میانگین پذیری جبر باناخ $A \oplus_\Phi B$ که حاصل جمع مستقیم دو جبر باناخ A, B می باشد را مورد مطالعه قرار می‌دهیم.

فهرست مندرجات

فصل ۱

تعاریف و مفاهیم بنیادی

در این پایان نامه، کلیه ی فضاهای برداری و جبرها روی میدان اعداد مختلط در نظر گرفته می‌شود.
میدان اعداد مختلط را با $\mathbb{C}$ نمایش می‌دهیم.
در این فصل تعاریف و قضایایی که در فصول بعد مورد استفاده قرار می‌گیرند را بیان می‌کنیم.

۱.۱ تعاریف مقدماتی

تعریف ۱.۱.۱ (جبر). فرض کنید A فضای برداری روی میدان $\mathbb{C}$ بوده و نگاشت ضرب از $A \times A$ به A در خواص زیر صدق کند. به ازای هر $a, b, c \in A$ و $\alpha \in \mathbb{C}$

۱) $a(b+c) = a.b + a.c$؛

۲) $(a+b)c = a.c + b.c$؛

۳) $a(b.c) = (a.b)c$؛

۴) $\alpha(ab) = (\alpha a)b = a(\alpha b)$.

دراینصورت گوییم A یک جبر است.

تعریف ۲.۱.۱ (شبه نرم). هرگاه X یک فضای برداری روی $\mathbb{C}$ باشد، یک شبه نرم روی X، یک نگاشت ρ از X به $\mathbb{R}$ است که به ازای هر $x, y \in X$ و $\alpha \in \mathbb{C}$

۱) $\rho(x) \geq 0$؛

۲) $\rho(\alpha x) = |\alpha|\rho(x)$؛

۳) $\rho(x+y) \leq \rho(x) + \rho(y)$.

تعریف ۳.۱.۱ (نرم). یک نرم بر فضای برداری X، یک شبه نرم بر X است که

$$\rho(x) = 0 \Rightarrow x = 0.$$

تعریف ۴.۱.۱ (جبر نرم دار). $(A, \|.\|)$ را یک جبر نرم دار گوئیم هرگاه A یک جبر باشد و به ازای هر $a, b \in A$، $\|a.b\| \leq \|a\|\|b\|$.

تعریف ۵.۱.۱ (همانی). عضو e از جبر A را عضو همانی یا یکه نامیم اگر و تنها اگر $e \neq 0$ و برای هر $x \in A$، $ex = xe = x$.

عضو همانی ای چون e را که $\|e\| = 1$ عضو یکانی جبر نامند.

تعریف ۶.۱.۱ (مجموعه جهتدار). مجموعه D جهتدار است هرگاه D مرتب جزئی باشد و به ازای هر β, α در D، یک γ در D موجود باشد که $\beta \leq \gamma, \alpha \leq \gamma$.

تعریف ۷.۱.۱ (تور). یک تور در فضای X، یک نگاشت از یک مجموعه جهتدار به داخل X است. هرگاه D مجموعه‌ای جهتدار باشد تابع $x : D \to X$ یک تور است و برای راحتی کار $x : D \to X$ را با $(x_\alpha)_{\alpha \in D}$ نمایش می‌دهیم.

تذکر ۸.۱.۱ تور $(x_\alpha)_{\alpha \in D}$ در X همگرا به $x \in X$ است هرگاه به ازای هر G باز شامل x یک $\alpha_\circ$ در D باشد که برای $\alpha \geq \alpha_\circ$، $x_\alpha \in G$.

تعریف ۹.۱.۱ (واحد تقریبی چپ). اگر A یک جبر نرم دار باشد، یک واحد تقریبی چپ برای A، یک تور $(e_\alpha)_{\alpha \in D}$ در A است که برای هر $a \in A$، $e_\alpha a \to a$.

تذکر ۱۰.۱.۱ یک تور $(e_\alpha)_{\alpha \in D}$ در A کراندار است هرگاه عدد ثابت و مثبت k موجود باشد که برای هر $\alpha \in D$، $\|e_\alpha\| \leq k$.

یک واحد تقریبی چپ کراندار در A، تور کراندار $(e_\alpha)_{\alpha \in D}$ در A است که برای هر $a \in A$، $e_\alpha a \to a$.

به طور مشابه یک واحد تقریبی راست کراندار در A، تور کراندار $(e_\alpha)_{\alpha \in D}$ در A است که برای هر $a \in A$، $a e_\alpha \to a$.

حال برای آشنایی بیشتر قضیه ای از [۴] را بیان و اثبات می‌کنیم.

قضیه ۱۱.۱.۱ فرض کنید جبر نرمدار A شامل یک مجموعه کراندار B باشد که برای هر $a \in A$ و $\epsilon > \circ$، یک $x \in B$ موجود باشد که $\|a - xa\| < \epsilon$. در این صورت A واحد تقریبی کراندار دارد.

برهان: $\epsilon > \circ$ را در نظر می‌گیریم. تعریف می‌کنیم $W = \{x + y - xy : x, y \in B\}$. ادعا می‌کنیم برای هر زیر مجموعه متناهی F از A، عضوی از W مانند w_F موجود است که برای هر $a \in A$، $\|a - w_F a\| < \epsilon$. مجموعه های متناهی با شمول تشکیل مجموعه جهتدار مانند D را می‌دهند. چون

w_F متعلق به W است و عناصر W کراندار هستند، لذا تور $(w_F)_{F\in D}$ کراندار است و برای هر $a \in A$، $w_F a \to a$. در نتیجه $(w_F)_{F\in D}$ واحد تقریبی کراندار برای A است.

فرض کنید به ازای هر $x \in B$، $\|x\| < M$. متناظر با مجموعه‌ی $F = \{t_۱, t_۲\}$، اعضای $x, y \in B$ را به گونه ای اختیار می‌کنیم که

$$\|t_۱ - xt_۱\| < \frac{\epsilon}{۱+M}, \|(t_۲ - xt_۲) - y(t_۲ - xt_۲)\| < \epsilon$$

با انتخاب $w = x + y - xy$ داریم

$$\begin{aligned}
\|t_۱ - wt_۱\| &= \|t_۱ - (x+y-xy)t_۱\| \\
&= \|t_۱ - xt_۱ + y(t_۱ - xt_۱)\| \\
&\le \|t_۱ - xt_۱\| + \|y\|\|t_۱ - xt_۱\| \\
&\le \frac{\epsilon}{۱+M} + M\frac{\epsilon}{۱+M} \\
&= \epsilon.
\end{aligned}$$

و به همین ترتیب ثابت می‌شود که $\|t_۲ - wt_۲\| = \|t_۲ - (x+y-xy)t_۲\| \le \epsilon$. فرض کنید که برای زیر مجموعه های متناهی n عضوی حکم برقرار باشد. فرض کنید $F = \{t_۱, t_۲, ..., t_{n+۱}\}$ و نیز فرض کنید $\alpha = \max\{\|t_i\| : i = ۱, ..., n\}$. عضوی از W مانند z موجود است که

$$\|t_i - zt_i\| < \frac{\epsilon}{۳(۱+M)^۲}. \ (i = ۱, ..., n).$$

حال عضو $w \in W$ را طوری انتخاب می‌کنیم که $\|t_{n+۱} - wt_{n+۱}\| < \epsilon, \|z - wz\| < \frac{\epsilon}{۳\alpha}$. برای $i = ۱, ..., n$ داریم

$$\begin{aligned}
\|t_i - wt_i\| &= \|t_i - zt_i + zt_i - wt_iz + wt_iz - wt_i\| \\
&\le \|t_i - zt_i\| + \|t_i\|\|z - wz\| + \|w\|\|t_i - zt_i\| \\
&< \frac{\epsilon}{۳(۱+M)^۲} + \alpha\frac{\epsilon}{۳\alpha} + M\frac{\epsilon}{۳(۱+M)^۲} \\
&< \epsilon.
\end{aligned}$$

لذا ادعا اثبات می‌شود. □

۲.۱ جبرهای باناخ

تعریف ۱.۲.۱ (جبر باناخ). یک جبر باناخ یک جبر نرم دار $(A, \|.\|)$ است که A با متر حاصل از نرم کامل است (یعنی هر دنباله‌ی کوشی در آن همگرا ست).

مجموعه تابعک های خطی پیوسته از جبر باناخ A به میدان $\mathbb{C}$ را با $A^\star$ نمایش می‌دهیم. این مجموعه با اعمال جمع و ضرب اسکالر تبدیل به یک جبر می‌شود.

بر $A^\star$ یک نرم با ضابطه‌ی $\|f\| = \sup\{|f(x)| : \|x\| \leq ۱\}$ تعریف می‌شود.

تذکر ۲.۲.۱ اگر X, Y دو فضای نرمدار و Y یک فضای باناخ باشد آنگاه فضای همه تبدیلات خطی پیوسته از X به Y یک فضای باناخ است.

برهان: به قضیه ۱ـ۴ از [۱۴] مراجعه کنید.

چون $\mathbb{C}$ فضای باناخ است، $A^\star$ با نرم گفته شده فضای باناخ است که به آن فضای دوگان A می گویند. به همین ترتیب دوگان $A^\star$ که با $A^{\star\star}$ نمایش می‌دهیم، نیز فضای باناخ است. به $A^{\star\star}$ دوگان دوم A می گویند.

تعریف ۳.۲.۱ (اولین ضرب آرنز). فرض کنید A یک جبر باناخ باشد. اولین ضرب آرنز بر $A^{\star\star}$ در سه مرحله تعریف می‌شود. برای a, b در A، f در $A^\star$ و F, G در $A^{\star\star}$، عناصر fa و Ff در $A^\star$ و FG در $A^{\star\star}$ به ترتیب به صورت زیر تعریف می‌شوند

$$\langle fa, b\rangle = \langle f, ab\rangle,\ \ \langle Ff, a\rangle = \langle F, fa\rangle,\ \ \langle FG, f\rangle = \langle F, Gf\rangle$$

قضیه ۴.۲.۱ $A^{\star\star}$ با اولین ضرب آرنز یک جبر باناخ است.

برهان: چون A^{**} فضای تمام تبدیلات خطی از A^* به $\mathbb{C}$ است، لذا A^{**} یک فضای باناخ است. A^{**} یک فضای برداری روی $\mathbb{C}$ است که به هر $\alpha \in \mathbb{C}$ و $F \in A^{**}$، عنصر αF از A^{**} را چنان نظیر می کند که

$$\langle \alpha F, f\rangle = \langle F, \alpha f\rangle. \tag{1}$$

ثابت می کنیم A^{**} با اولین ضرب آرنز یک جبر است. هرگاه $F_1, F_2, F_3 \in A^{**}$ آنگاه بدیهی است که $F_1(F_2F_3) = (F_1F_2)F_3$. ادعا می کنیم که $F_1(F_2 + F_3) = F_1F_2 + F_1F_3$، برای هر $f \in A^*$

$$\begin{aligned}\langle F_1(F_2+F_3), f\rangle &= \langle F_1, (F_2+F_3)f\rangle\\ &= \langle F_1, F_2f + F_3f\rangle\\ &= \langle F_1, F_2f\rangle + \langle F_1, F_3f\rangle\\ &= \langle F_1F_2, f\rangle + \langle F_1F_3, f\rangle\\ &= \langle F_1F_2 + F_1F_3, f\rangle.\end{aligned}$$

لذا ادعا ثابت می‌شود. به همین ترتیب ثابت می‌شود $(F_1 + F_2)F_3 = F_1F_3 + F_2F_3$. اگر $\alpha \in \mathbb{C}$، نشان می‌دهیم $\alpha(F_1F_2) = (\alpha F_1)F_2 = F_1(\alpha F_2)$. چون

$$\begin{aligned}\langle F_1(\alpha F_2), f\rangle &= \langle F_1, (\alpha F_2)f\rangle\\ &= \langle F_1, F_2(\alpha f)\rangle\\ &= \langle F_1F_2, \alpha f\rangle\\ &= \langle \alpha(F_1F_2), f\rangle.\end{aligned}$$

لذا $F_1(\alpha F_2) = \alpha(F_1F_2)$. البته دقت داریم که دومین تساوی از تعریف (۱) بدست می آید. به همین ترتیب

$$\begin{aligned}\langle \alpha(F_1F_2), f\rangle &= \langle F_1F_2, \alpha f\rangle\\ &= \langle F_1, F_2(\alpha f)\rangle\\ &= \langle F_1, (\alpha F_2)f\rangle\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \langle F_1, \alpha(F_2 f)\rangle \\ &= \langle \alpha F_1, F_2 f\rangle \\ &= \langle (\alpha F_1)F_2, f\rangle. \end{aligned}$$

بنابراین $\alpha(F_1F_2) = (\alpha F_1)F_2$.

نشان می‌دهیم برای $F, G \in A^{\star\star}$، $\|FG\| \le \|F\|\|G\|$.

با توجه به نرم ملاحظه می شود که $\|fa\| = \sup\{|\langle fa, b\rangle| : \|b\| \le 1\} \le \|f\|\|a\|$. از طرف دیگر

$$\begin{aligned} \|Ff\| &= \sup\{|\langle Ff, a\rangle| : \|a\| \le 1\} \\ &= \sup\{|\langle F, fa\rangle| : \|a\| \le 1\} \\ &\le \|F\| \sup\{\|fa\| : \|a\| \le 1\} \\ &\le \|F\|\|f\|, \end{aligned}$$

و می‌توان نوشت

$$\begin{aligned} \|FG\| &= \sup\{|\langle FG, f\rangle| : \|f\| \le 1\} \\ &= \sup\{|\langle F, Gf\rangle| : \|f\| \le 1\} \\ &\le \|F\| \sup\{\|Gf\| : \|f\| \le 1\} \\ &\le \|F\|\|G\|. \end{aligned}$$

در نتیجه $A^{\star\star}$ با اولین ضرب آرنز، یک جبر نرم دار است. با توجه به این که $A^{\star\star}$ فضای باناخ است، حکم تمام است. □

تعریف ۵.۲.۱ (دومین ضرب آرنز). فرض کنید A جبر باناخ باشد. دومین ضرب آرنز بر $A^{\star\star}$ در سه مرحله تعریف می‌شود. برای a, b در A، f در $A^\star$ و F, G در $A^{\star\star}$، عناصر af و fF در $A^\star$ و $F \diamond G$ در $A^{\star\star}$ به ترتیب به صورت زیر تعریف می‌شوند

$$\langle af, b\rangle = \langle f, ba\rangle,\ \ \langle fF, a\rangle = \langle F, af\rangle,\ \ \langle F \diamond G, f\rangle = \langle G, fF\rangle.$$

قضیه ۶.۲.۱ A^{**} با دومین ضرب آرنز یک جبر باناخ است.

برهان: اثبات مشابه قضیه قبل است . $\square$

تعریف ۷.۲.۱ (آرنز منظم). جبر باناخ A را آرنز منظم نامیم هرگاه برای هر $F, G \in A^{**}$ $.FG = F \diamond G$

تعریف ۸.۲.۱ (A ـ مدول چپ) فرض کنید A جبر باشد. یک A ـ مدول چپ یک فضای خطی M روی $\mathbb{C}$ است همراه با یک نگاشت $(a,m) \to a.m$ از $A \times M \to M$ به طوری که برای هر $m, n \in M$، $a, b \in A$،

$$(a+b)m = am + bm,\ a(m+n) = am + an,\ a.(b.m) = (ab).m$$

تعریف ۹.۲.۱ (A ـ مدول راست). فرض کنید A یک جبر باناخ باشد. یک A مدول راست یک فضای خطی M روی $\mathbb{C}$ است همراه با یک نگاشت $(a,m) \to m.a$ از $A \times M \to M$ به طوری که برای هر $m, n \in M$، $a, b \in A$،

$$m(a+b) = ma + mb,\ (m+n)a = ma + na,\ (m.a).b = m(ab)$$

یک A ـ دو مدول یک فضای خطی M است که هم A مدول چپ و هم A مدول راست باشد و همچنین برای هر $a, b \in A$ و $m \in M$،

$$a.(m.b) = (a.m).b.$$

مثال ۱۰.۲.۱ $A^{\star}$ با ضرب مدولی $(f,a) \to fa$ ($(f,a) \to af$) یک A ـ مدول راست (چپ) است.

تعریف ۱۱.۲.۱ فرض کنید A یک جبر و M یک A ـ مدول چپ (راست) باشد. E زیر فضایی خطی از M باشد. E را یک زیر مدول چپ (راست) می‌نامیم هرگاه برای هر $a \in A$ و هر $x \in E$، $ax(xa)$ در E باشد.

فرض کنید که A یک جبر باناخ و M یک A ـ مدول باشد و E زیر فضای خطی از M باشد. E را یک زیر مدول M گوئیم هرگاه E یک زیر مدول چپ و یک زیرمدول راست باشد.

تعریف ۱۲.۲.۱ (ایدآل چپ (راست)). فرض کنید I زیر فضای برداری در جبر A باشد. در این صورت I را ایدآل چپ (راست) در A نامیم هرگاه برای هر $a \in A$ و $ab \in I, b \in I$، $(ab \in I)$.

I را ایدآل در A نامیم هرگاه هم ایدآل چپ و هم ایدآل راست در A باشد.

ایدآل I در A را یک ایدآل سره در جبر A نامیم هرگاه $I \subset A$ و $I \neq A$.

تذکر ۱۳.۲.۱ اگر I ایدآل در جبر A باشد. آنگاه $\frac{A}{I}$ با ضرب $(a+I)(b+I) = (ab+I)$ برای هر $a, b \in A$، یک جبر است.

۳.۱ توپولوژی ضعیف و توپولوژی ضعیف ستاره

تعریف ۱.۳.۱ فرض کنید X فضای باناخ باشد. ضعیف ترین توپولوژی روی X به طوری که هر $x^\star \in X^\star$ نسبت به آن پیوسته است را توپولوژی ضعیف روی X می‌نامیم. تور $(a_\alpha)_{\alpha \in D}$ در X به a در توپولوژی ضعیف میل می‌کند اگر و تنها اگر برای هر $f \in X^\star$، $\langle f, a_\alpha \rangle$ به $\langle f, a \rangle$ میل کند.

تعریف ۲.۳.۱ فرض کنید X فضای باناخ باشد. برای هر $x \in X$، نگاشت $f_x : X^\star \to \mathbb{C}$ با ضابطه‌ی $f_x(x^\star) = \langle x^\star, x \rangle$ را تابعک خطی برروی $X^\star$ تعریف می‌کنیم.

$\{f_x : x \in X\} \subseteq X^\star$ و این خانواده از توابع خطی نقاط $X^\star$ را جدا می کند. زیرا اگر $x^\star, y^\star \in X^\star$ و $x^\star \neq y^\star$، در این صورت $x \in X$ موجود است که

$$\langle x^\star, x \rangle \neq \langle y^\star, x \rangle \Rightarrow f_x(x^\star) \neq f_x(y^\star).$$

ضعیف ترین توپولوژی روی $X^\star$ که برای هر $x \in X$، f_x نسبت به آن پیوسته باشد را توپولوژی ضعیف ستاره روی $X^\star$ می‌نامیم. تور $(x^\star_\alpha)_{\alpha \in D}$ در $X^\star$ به $x^\star$ در توپولوژی ضعیف ستاره میل می کند اگر و تنها اگر برای هر $a \in X$، $\langle x^\star_\alpha, a\rangle$ به $\langle x^\star, a\rangle$ میل کند.

تعریف ۳.۳.۱ فرض کنید که X یک فضای باناخ و M زیر فضای X و N زیر فضای $X^\star$ باشد. $^\perp N, M^\perp$ را با روابط زیر تعریف می‌کنیم.

$$M^\perp = \{x^\star \in X^\star : \forall x \in M,\ \langle x^\star, x\rangle = ۰\}$$

و

$$^\perp N = \{x \in X : \forall x^\star \in N,\ \langle x^\star, x\rangle = ۰\}$$

قضیه ۴.۳.۱ اگر M زیر فضای بسته از فضای باناخ X باشد آنگاه $\frac{X}{M}$ فضای باناخ است و $\frac{X^\star}{M^\perp} = M^\star$ و $(\frac{X}{M})^\star = M^\perp$.

برهان: به قضیه ۴.۸ از [۱۴] مراجعه کنید. □

قضیه ۵.۳.۱ (باناخ آلاگلو). اگر V همسایگی صفر از فضای باناخ X باشد و

$$K = \{f \in X^\star : \forall x \in V,\ |f(x)| \leq ۱\}$$

آنگاه K ضعیف ستاره فشرده است.

برهان: به قضیه ۳.۱۵ از [۱۴] مراجعه کنید. □

قضیه ۶.۳.۱ فرض کنید که Y, X فضای نرم دار باشند و $\Lambda : X \to Y$ یک نگاشت خطی باشد در این صورت گزاره های زیر معادلند.