دانشگاه صنعتی اصفهان

دانشکده علوم ریاضی

بررسی حدس رنگ‌آمیزی لیستی روی چند خانواده از گراف‌ها

پایان‌نامه کارشناسی ارشدریاضی کاربردی (نظریه گراف)

یداله سورانی یانچشمه

استاد راهنما

دکتر غلامرضا امیدی

۱۳۸۹

دانشگاه صنعتی اصفهان

دانشکده علوم ریاضی

پایان‌نامه کارشناسی ارشدریاضی کاربردی (نظریه گراف)آقای‌یداله سورانی یانچشمه

تحت عنوان

بررسی حدس رنگ‌آمیزی لیستی روی چند خانواده از گراف‌ها

در تاریخ ۱۳۸۸/۱۰/۳۰ توسط کمیته تخصصی زیر مورد بررسی و تصویب نهائی قرار گرفت.

۱– استاد راهنمای پایان‌نامه	دکتر غلامرضا امیدی
۲– استاد مشاور پایان‌نامه	دکتر بهناز عمومی
۳– استاد داور ۱	دکتر جواد باقریان (دانشگاه اصفهان)
۴– استاد داور ۲	دکتر محمد رضا رئوفی

سرپرست تحصیلات تکمیلی دانشکده دکتر اعظم اعتماد

کلیه حقوق مادی مترتب بر نتایج مطالعات، ابتکارات و نوآوری‌های ناشی از تحقیق موضوع این پایان‌نامه متعلق به دانشگاه صنعتی اصفهان است.

فهرست مطالب

چکیده:

رنگ‌آمیزی گراف ها یکی از مباحث اصلی نظریه گراف است که هم از دیدگاه نظری و هم از دیدگاه کاربردی همواره مورد توجه بوده است. رنگ‌آمیزی یالی یکی از ساده‌ترین انواع رنگ‌آمیزی است که عبارت است از یک تخصیص رنگ به یال‌های یک گراف به طوری که هیچ دو یال مجاوری هم رنگ نباشند. رنگ‌آمیزی لیستی یا انتخاب‌پذیری یکی از تعمیم های مهم رنگ‌آمیزی است که در دهه‌ی ۱۹۷۰ توسط ویزینگ و به طور مستقل توسط اردوش، رابین و تیلور معرفی شد. رنگ‌آمیزی لیستی یالی گراف G، یک تخصیص رنگ به یال‌های گراف G است به طوری که رنگ هر یال از مجموعه رنگ‌های متناظر با همان یال انتخاب شده باشد. رنگ‌آمیزی لیستی سرشار از سوالات بی جواب است و از این لحاظ همواره مورد توجه است. حدس رنگ‌آمیزی لیستی یکی از مهم‌ترین مسائل حل نشده در این زمینه است که در این پایان نامه مهم‌ترین نتایج به دست آمده برای این حدس مورد بررسی قرار گرفته است.

کلمات کلیدی: رنگ‌آمیزی لیستی، حدس رنگ‌آمیزی لیستی، شاخص رنگ‌آمیزی لیستی، حدس ویزینگ.

کد رده‌بندی: ۰۵C۱۵

فصل ۱

مقدمه

۱—۱ مفاهیم اولیه

در این بخش به اختصار به ذکر مفاهیم اولیه مورد نیاز در این پایان نامه پرداخته می‌شود.
گراف G عبارت است از یک سه تایی مرتب، شامل مجموعه‌ی $V(G)$ به نام **مجموعه‌ی رأس‌ها**، مجموعه‌ی $E(G)$ به نام **مجموعه‌ی یال‌ها** و یک **رابطه وقوع** که به هرعضو از $E(G)$، یک زوج نه لزوماً متمایز از $V(G)$ را نسبت می‌دهد. رابطه‌ی وقوع لزوماً یک به یک و پوشا نیست. اگر رابطه وقوع به یال e دو رأس u و v را نسبت دهد، گوییم رأس‌های u و v بر یال e واقع‌اند یا رأس‌های انتهایی e هستند.

دو رأس u و v را **مجاور** گوییم، هرگاه یال e در $E(G)$ موجود باشد که u وv رأس‌های انتهایی آن باشند. یال‌هایی که دارای رأس‌های انتهایی یکسان باشند را **یال‌های چند گانه** یا **موازی** می‌نامیم و یالی که دو انتهای یکسان داشته باشد را **طوقه** می‌خوانیم. گراف G یک **گراف ساده** است، هرگاه یال چندگانه و طوقه نداشته باشد. گراف ساده‌ی G را می‌توان به صورت زوج مرتب $G = (V(G), E(G))$ نشان داد، زیرا در هر گراف ساده هر یال به کمک رأس‌های انتهایی خود به صورت منحصر به فرد مشخص می‌شود. گراف G را **متناهی** می‌نامیم، هرگاه $V(G)$ و $E(G)$ هر دو متناهی باشند. در غیر این صورت، گراف G را **نامتناهی** می‌نامیم.

در این پایان نامه همه‌ی گراف‌ها متناهی و بدون طوقه هستند و چند گانگی یال‌ها مجاز است و هرجا گراف ساده مورد نظر باشد صراحتاً ذکر می‌شود. تعداد رأس‌های گراف G را **مرتبه‌ی** G گوییم و با $n(G)$

نشان می‌دهیم. منظور از **اندازه‌ی** گراف G تعداد یال‌های گراف G است که با نماد $m(G)$ نشان می‌دهیم. هرجا ابهامی ایجاد نشود، برای اختصار مرتبه و اندازه‌ی گراف G را به ترتیب با n و m نشان می‌دهیم. **درجه‌ی** رأس v در گراف G تعداد یال‌های مجاور به رأس v در G است و با نماد $d_G(v)$ نشان داده می‌شود. هر جا ابهامی نباشد، درجه‌ی رأس v را با $d(v)$ نشان می‌دهیم. اگر گراف G ساده باشد درجه‌ی رأس v، تعداد رأس‌های مجاور به رأس v است.

درجه‌ی رأس با کمترین درجه در گراف G را با $\delta(G)$ و درجه‌ی رأس با بیشترین درجه در G را با نماد $\Delta(G)$ نشان می‌دهیم. در هر گراف رأس از درجه‌ی صفر را **رأس تنها** و رأس از درجه‌ی یک را یک **برگ** می‌نامیم. گرافی که درجه‌ی همه‌ی رأس‌های آن برابر باشد را گراف **منظم** می‌نامیم. به عبارت دیگر، گراف G منظم است، هرگاه $\delta(G) = \Delta(G)$. اگر درجه‌ی رأس‌های گراف منظم G، r باشد به گراف G، r **ـ منظم** می‌گوییم. اگر G یک گراف دلخواه باشد به راحتی می‌توان نشان داد مجموع درجات همه‌ی رئوس برابر تعداد یال‌هاست، یعنی $\sum_{v\in V(G)} d(v) = 2m$.

گراف H را **زیرگراف** G گوییم و با نماد $H \subseteq G$ نشان می‌دهیم، هرگاه $V(H) \subseteq V(G)$ و $E(H) \subseteq E(G)$. اگر $H \subsetneq G$، آن‌گاه H را یک **زیرگراف سره** از G می‌نامیم. اگر $H \subseteq G$ و $V(G) = V(H)$، آن‌گاه H را یک **زیرگراف فراگیر** از G می‌نامیم.

برای هر زیر مجموعه‌ی ناتهی U از رأس‌های گراف G، زیر گراف القایی G توسط U، که با نماد $G[U]$ نشان داده می‌شود، گرافی است با مجموعه رأس‌های U و مجموعه‌ی یال‌های آن یال‌هایی از G است که هر دو رأس انتهای آن‌ها در U قرار داشته باشند. زیر گراف H را **القایی** گوییم، هرگاه $H = G[V(H)]$. گوییم گراف G، H **ـ آزاد** است، هرگاه G، H را به عنوان زیرگراف القایی نداشته باشد.

مکمل گراف G که با $\bar{G}$ نشان می‌دهیم، گرافی است با مجموعه رأس‌های $V(G)$ و دو رأس در $\bar{G}$ با هم مجاورند اگر و تنها اگر در G مجاور نباشند.

گراف ساده G را **کامل** گوییم، هرگاه هر دو رأس متمایز در آن مجاور باشند. گراف کامل از مرتبه‌ی n را با نماد K_n نشان می‌دهیم. زیر گراف H از گراف G را یک **خوشه** گوییم، هرگاه H یک گراف کامل باشد. **گراف ناتهی** گرافی است که حداقل یک یال داشته باشد، گراف تهی (گراف بدون یال) روی n رأس را با $\bar{K_n}$ نشان می‌دهیم. واضح است گراف $\bar{K_n}$ مکمل گراف K_n است. مرتبه‌ی بزرگترین خوشه در گراف G را با نماد $\omega(G)$ نشان می‌دهیم و به آن **عدد خوشه ای** گراف G می‌گوییم. یک گشت در گراف G عبارت است از یک دنباله‌ی متناهی از رأس‌ها و یال‌های $W : v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, ..e_k, v_k$، به طوری که برای هر i، $e_i = v_{i-1}v_i$. طول یک گشت را تعداد یال‌های آن تعریف می‌کنیم. اگر گراف G ساده باشد، آن‌گاه یک گشت را می‌توان فقط با دنباله‌ای از رأس‌های آن نمایش داد. اگر همه یال‌های ظاهر شده در گشت متمایز باشند گشت را یک **گذر** می‌نامیم. در صورتی که همه‌ی یال‌ها و رأس‌های ظاهر شده در گشت

متمایز باشند گشت را یک **مسیر** می‌نامیم. اگر در گشت رأس ابتدایی و انتهایی یکی باشند گشت را **بسته** می‌گوییم. مسیر بسته را یک **دور** می‌نامیم. مسیر شامل n رأس را با P_n و دور شامل n رأس را با C_n نمایش می‌دهیم. یال e را یک **وتر** برای دور C گوییم، هرگاه e روی دور نباشد ولی رئوس انتهایی آن روی دور قرار داشته باشند. گراف G را وتری گوییم، هرگاه هیچ دوری در G بدون وتر نباشد. دور C_k را یک k - **شبکه** می‌نامیم، هرگاه حداقل یک وتر داشته باشد. مرتبه‌ی کوتاه‌ترین دور در گراف G را کمر G نامیده و با $g(G)$ نشان می‌دهیم. هرجا ابهامی ایجاد نشود، کمر گراف را با g نشان می‌دهیم. گرافی که بین هر دو رأس آن حداقل یک مسیر وجود دارد، **همبند** و در غیر این صورت، **ناهمبند** می‌نامیم. هر زیرگراف همبند ماکسیمال از یک گراف را یک **مؤلفه‌ی** آن گراف می‌نامیم. در گراف همبند G، طول کوتاهترین مسیر بین دو رأس u و v را فاصله‌ی بین آن دو رأس می‌نامیم و با نماد $d_G(u,v)$ نشان می‌دهیم. قطر گراف G را بیشترین مقدار $d_G(u,v)$ به طوری که u و v دو رأس دلخواه از G باشند تعریف می‌کنیم و با نماد $diam_G$ نشان می‌دهیم.

زیرمجموعه‌های ناتهی $A_1,\ldots,A_n$ از A را یک **افراز** برای A می‌نامیم، هرگاه اجتماع همه‌ی آن‌ها مجموعه‌ی A و اشتراک دوبه دوی آن‌ها تهی باشد. گراف G را **دوبخشی** می‌نامیم، هرگاه بتوان مجموعه‌ی رأس‌های G را به دو زیرمجموعه X و Y طوری افراز کرد که هر یال در G یک انتها در X و یک انتها در Y داشته باشد. به عبارت دیگر گراف G دو بخشی است، اگر افراز X و Y از $V(G)$ وجود داشته باشد که $G[X]$ و $G[Y]$ زیرگراف‌های تهی باشند. به راحتی می‌توان نشان داد، گراف G دو بخشی است اگر و تنها اگر دور فرد نداشته باشد. به طور کلی برای هر $p \geq ۲$، یک گراف p - **بخشی** گرافی است که مجموعه‌ی رأس‌های آن را بتوان به p مجموعه‌ی $V_1,\ldots,V_n$ افراز کرد به طوری که رأس‌های انتهایی هر یال در بخش‌های متمایز قرار بگیرند. در صورتی که هر رأس در یک بخش با تمام رأس‌های بخش‌های دیگر مجاور باشد، گراف p - بخشی را ، گراف p - **بخشی کامل** می‌نامیم. اگر برای هر i، $۱ \leq i \leq p$، $|V_i| = n_i$، آن‌گاه گراف p - بخشی کامل را با نماد $K_{n_1,\ldots,n_p}$ نشان می‌دهیم. در حالت خاص منظور از $K_{r,s}$ گراف دو بخشی کامل با بخش‌های X و Y است به طوری که $|X| = r$ و $|Y| = s$.

گراف بدون دور را **جنگل** و جنگل همبند را **درخت** می‌نامیم. به راحتی می‌توان نشان داد هر درخت ناتهی حداقل دو برگ دارد و هر جنگل n رأسی $n-c$ یال دارد که c تعداد مؤلفه‌های جنگل است.

اگر S یک زیرمجموعه از رأس‌های G باشد منظور از $G-S$ گرافی است با مجموعه‌ی رئوس $V(G-S) = V(G) - S$ و مجموعه‌ی یال‌های آن، تمام یال‌های G به جز یال‌های واقع بر S باشد. برای رأس v از G، $G-\{v\}$ را با $G-v$ نشان می‌دهیم. اگر $M \subset E(G)$، $G\backslash M$ گرافی است با مجموعه رأس‌های $V(G)$ و مجموعه‌ی یال‌های $E(G)\backslash M$. برای اختصار $G\backslash\{e\}$ را با $G-e$ نشان می‌دهیم. به طور کلی اگر $H \subseteq G$، آن‌گاه $G-H$ گرافی است که $V(G-H) = V(G) - V(H)$ و

$.E(G-H)=E(G)-E(H)$

هر گراف را می‌توان به شکل نموداری در صفحه نشان داد به طوری که هر رأس توسط یک نقطه و هر یال به صورت کمانی بین هر دو رأس انتهایی خود رسم شود.

در ادامه به تعریف رسمی‌تر نمایش گراف‌ها می‌پردازیم. تصویر هر نگاشت پیوسته از بازه $[۰,۱]$ به $\mathbb{R}$ را یک **منحنی** گوییم. منحنی که از تعداد متناهی پاره‌خط تشکیل شده باشد را یک **چند ضلعی** گوییم. یک **نمایش** از گراف G، نگاشت f، $f: V(G)\cup E(G)\rightarrow \mathbb{R}^۲$ است به طوری که f به هر رأس G یک نقطه از صفحه و به هر یال با رئوس انتهایی u و v یک چند ضلعی از $f(u)$ به $f(v)$ نسبت دهد به طوری که تحدید f به مجموعه‌ی رئوس و همچنین مجموعه‌ی یال‌ها یک به یک باشد. هر نقطه $f(e)\cap f(e')$ که تصویری از یک رأس نباشد یک **تقاطع** نامیده می‌شود. مرسوم است گراف و نمایش آن را با یک نام مشترک نشان دهند. در واقع می‌توان نشان داد یک نمایش از گراف G، یک عضو از کلاس گراف‌های همریخت با G در نظر گرفت. می‌توان هر گراف را طوری نمایش داد که هر دو یال در حداکثر یک نقطه همدیگر را قطع کنند. در نمودار یک گراف دو یال ممکن است که یک‌دیگر را در نقاطی از صفحه قطع کنند که لزوماً رأس گراف نیستند. به چنین نقاطی **تقاطع** می‌گوییم. برای مثال هر نمایش از $K_{۳,۳}$ در صفحه دارای تقاطع است.

گراف G **مسطح** نامیده می‌شود، هرگاه یک نمایش بدون تقاطع داشته باشد. یک نمایش بدون تقاطع از گراف مسطح G را یک **نشاندن** G در صفحه نیز می‌گوییم.

مجموعه‌ی $u\subset \mathbb{R}$ **باز** نامیده می‌شود، هرگاه برای هر $p\in U$ تمام نقاط به اندازه‌ی کافی نزدیک p در U قرار بگیرند. **ناحیه**، مجموعه بازی است که هر دو نقطه از آن با یک چند ضلعی قابل دستیابی باشد. یک **وجه** در یک نمایش مسطح گراف G، یک مجموعه باز ماکسیمال است به طوری که شامل هیچ نقطه‌ای که در نمایش G بکار رفته، نباشد. می‌توان نشان داد، در هر گراف همبند مرز هر وجه یک گشت بسته است. طول هر وجه f را اندازه‌ی کوچک‌ترین گشت بسته که مرز آن را تشکیل می‌دهد تعریف کرده و با $d(f)$ نشان می‌دهیم.طول هر وجه f، اندازه‌ی گشت بسته‌ای است که مرز آن را تشکیل می‌دهد. مجموعه‌ی همه‌ی وجه‌های گراف مسطح G را با $F(G)$ نمایش می‌دهیم. مرسوم است، هر گراف مسطح G را به صورت سه‌تایی $G=(V,E,F)$ نشان دهند. در نمایش هر گراف مسطح در صفحه یک وجه نامتناهی وجود دارد که به آن **وجه بیرونی** نیز می‌گویند.

زیر مجموعه‌ی ناتهی S از رئوس G را **مستقل** گوییم، هرگاه $G[S]$ زیرگراف تهی باشد. اندازه‌ی بزرگترین زیر مجموعه‌ی مستقل در G را **عدد استقلال** G نامیده و با نماد $\alpha(G)$ نشان می‌دهیم. $M\subset E(G)$ را یک **تطابق** گوییم، هرگاه هیچ دو یالی از M مجاور نباشند. اگر رأس v روی یکی از یال‌های تطابق M واقع باشد، گوییم تطابق M رأس v را اشباع می‌کند.

مجموعه‌ی S را یک **برش** رأسی (یالی) گراف همبند G می‌نامیم، هرگاه $G-S$ ناهمبند باشد و $S\subset V$ $(S\subset E)$. **عدد همبندی** گراف G، که با $\kappa(G)$ نشان می‌دهیم، کمترین عدد صحیح k است به طوری که G یک برش از اندازه k داشته باشد. گراف G را k ـ همبند گوییم، هرگاه $k\geq\kappa(G)$. اگر $S=\{v\}$ یک برش G باشد، v را یک رأس برشی G می‌گوییم. اگر S یک زیرمجموعه‌ی ناتهی و سره از G باشد و $\bar{S}=V(G)-S$ آن‌گاه مجموعه‌ی همه‌ی یال‌های G که یک انتها در S و یک انتها در $\bar{S}$ دارند را بانماد $[S,\bar{S}]$ نشان می‌دهیم. واضح است $[S,\bar{S}]$ یک برش یالی برای G است. هر زیرگراف ماکسیمال ۲ ـ همبند در گراف G را یک **بلوک** می‌گوییم. بنابراین بلوک، یک زیرگراف ماکسیمال همبند بدون رأس برشی است. بلوکی که فقط یک رأس برشی داشته باشد را **بلوک پایانی** می‌گوییم. **درخت بلوکی** متناظر یک گراف، گرافی است که مجموعه‌ی رأس‌های آن بلوک‌ها و رأس‌های برشی G است و هر بلوک با یک یال با رأس برشی خود مجاور است. از تعریف درخت بلوکی به راحتی می‌توان نتیجه گرفت، هر گراف با بیش از یک بلوک حداقل دو بلوک پایانی دارد.

اگر $e=uw$ یالی در گراف G باشد، منظور از **انقباض** G روی e گرافی است که از حذف یال e و یکی کردن رئوس u و w به دست آمده است. انقباض G روی e را با نماد G/e نشان می‌دهیم. گراف H را یک **ماینور** گراف G می‌نامیم، هرگاه بتوان H را با دنباله‌ای از حذف‌ها و انقباض‌های بعضی از یال‌های G به دست آوریم. یک **زیرتقسیم** یال uw یک مسیر uxw است که x یک رأس جدید است. یک زیرتقسیم گراف G، هرگرافی است که از دنباله‌ای از زیرتقسیم‌های بعضی یال‌های G به دست آمده باشد. اگر G یک زیرتقسیم گراف X باشد، X را **ماینور توپولوژیکی** G نیز می‌گوییم. لم زیر ارتباط بین ماینور و زیرتقسیم را به خوبی بیان می‌کند.

لم ۱.۱ ([۱۱])

۱) اگر H یک زیرتقسیم گراف G باشد، آن‌گاه H ماینور G نیز هست.

۲) اگر H ماینور گراف G و $3\leq\Delta(H)$ باشد، آن‌گاه H، زیرتقسیم G است.

اگر H و G دو گراف دلخواه باشند، گوییم G، H ـ ماینور آزاد است هرگاه H ماینور هیچ زیرگرافی از G نباشد. گراف‌های $G_1=(V_1,E_1)$ و $G_2=(V_2,E_2)$ را **مجزا** گوییم، هرگاه $V_1\cap V_2=\emptyset$.

اگر G_1 و G_2 دو گراف دلخواه باشند، $G_1\cup G_2$ گرافی است با مجموعه رئوس $V(G_1)\cup V(G_2)$ و مجموعه یال‌های $E(G_1)\cup E(G_2)$. اگر G_1 و G_2 دو گراف مجزا باشند، $G_1\cup G_2$ را بانماد G_1+G_2 نشان می‌دهیم.

حاصلضرب دکارتی گراف‌های دلخواه $G_1, \cdots, G_k$ را که بانماد $G(V,E) = G_1 \Box G_2 \Box \cdots \Box G_k$ نشان می‌دهیم، گرافی است با مجموعه رئوس

$$V = \{v = (v_1, v_2, \ldots, v_k) : v_i \in V(G_i), 1 \leq i \leq k\}.$$

و دو رأس $\mathbf{u} = (u_1, \ldots, u_n)$ و $v = (v_1, \ldots, v_n)$ با هم مجاورند، هرگاه برای یک i، $1 \leq i \leq k$، $u_i v_i \in E(G_i)$ و برای هر $j \neq i$، $u_j = v_j$.

فرض کنیم G_1 و G_2 دو گراف مجزا باشند و $w_1 \in V(G_1)$ و $w_2 \in V(G_2)$. گرافی که از یکی کردن رأس‌های w_1 و w_2 به دست آمده را **ادغام** G_1 و G_2 می‌نامیم و با نماد $G_1 \widehat{w_1 w_2} G_2$ نشان می‌دهیم. با توجه به تعریف بالا واضح است، اگر w رأس باشد که از یکی کردن w_1 و w_2 به دست آمده، با تمام همسایه‌های پیشین این دو رأس مجاور است.

گراف یالی متناظر با گراف G، گرافی است که رأس‌هایش یال‌های G و دو رأس آن مجاورند اگر یال‌های متناظر در G مجاور باشند. گراف یالی متناظر با G را با نماد $L(G)$ نشان می‌دهیم.

برای دو تابع f و g می‌نویسیم $f = O(g)$، هرگاه برای مقادیر به اندازه‌ی کافی بزرگ متغیرهای این دو تابع، ثابت مثبت k وجود داشته باشد به طوری که $f \leq kg$ [۵].

۱—۲ تاریخچه

یک تخصیص رنگ به رأس‌های گراف G را یک **رنگ‌آمیزی رأسی** گراف G می‌گوییم. اگر رأس‌های مجاور رنگ‌های متمایز بگیرند رنگ آمیزی را **معتبر** می‌نامیم. به زبانی رسمی‌تر نگاشت $c : V \to \mathbb{Z}$ را یک **رنگ‌آمیزی معتبر** از $G = (V,E)$ گوییم هرگاه برای هر $v_1 v_2 \in E$، $c(v_1) \neq c(v_2)$. گراف G را k ـ **رنگ‌پذیر** گوییم، هرگاه G یک رنگ آمیزی معتبر با استفاده از k رنگ داشته باشد. **عدد رنگی** گراف G، $\chi(G)$، کم‌ترین عدد صحیح k است به طوری که G، k ـ رنگ‌پذیر باشد.

با قرار دادن محدودیت‌هایی روی رنگ‌های قابل قبول برای هر رأس می‌توان مسأله رنگ آمیزی را تعمیم داد. یک **تخصیص لیست** به رئوس گراف G، نگاشت $L : V \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ است به طوری که برای هر $v \in V$، $L(v)$ یک مجموعه از رنگ‌های قابل قبول برای رأس v باشد. رنگ آمیزی لیستی به عنوان تعمیم رنگ آمیزی در نیمه‌ی دوم دهه‌ی ۱۹۷۰ در مقاله‌ی [۳۳] از ویزینگ و به طور مستقل در مقاله‌ی [۱۳] از اردوش، رابین و تیلور معرفی گردید. فرض کنیم $G = (V,E)$ یک گراف دلخواه و $f : V \to \mathbb{Z}$ یک تابع دلخواه روی رئوس گراف G باشد. گراف G را $\mathcal{L}$ ـ **رنگ‌پذیر** گوییم، هرگاه متناظر با لیست‌دهی $\mathcal{L} = (L(v) : v \in V)$ به رئوس گراف G، رنگ آمیزی معتبر $c : V \to \mathbb{Z}$ موجود باشد به

طوری که برای هر $v \in V$، $c(v) \in L(v)$. G را f ـ **انتخاب‌پذیر** گوییم، هرگاه برای هر لیست‌دهی دلخواه $\mathcal{L} = (L(v) : v \in V)$ با شرط $|L(v)| = f(v)$، $\mathcal{L}$ ـ رنگ‌پذیر باشد. G را k ـ **انتخاب‌پذیر** گوییم، هرگاه برای تابع ثابت $f(v) = k$، f ـ انتخاب‌پذیر باشد. کمترین عدد صحیح k به طوری که G، k ـ انتخاب‌پذیر باشد را **عدد انتخاب** G گوییم و با نماد $\chi_l(G)$ نشان می‌دهیم.

به راحتی می‌توان نشان داد $\chi_l(G) \geq \chi(G)$. نامساوی فوق می‌تواند اکید باشد، به عنوان مثال برای گراف $K_{۳,۳}$. اگر $\{v_۱, v_۲, v_۳\}$ و $\{u_۱, u_۲, u_۳\}$ یک افراز دوبخشی از $K_{۳,۳}$ باشند، قرار می‌دهیم $L(v_i) = L(u_i) = \{۱, ۲, ۳\} \backslash \{i\}$. به راحتی می‌توان نشان داد که $K_{۳,۳}$، با لیست‌های داده شده قابل رنگ آمیزی نیست. در نتیجه $\chi_l(K_{۳,۳}) > ۲ = \chi(K_{۳,۳})$.

اردوش، رابین و تیلور ثابت کردند اگر $n \to \infty$، آن‌گاه

$$\chi'_l(K_{n,n}) = log_۲(n) + O(log_۲(n)).$$

الون و تارسی با استفاده از تکنیک‌های جبرخطی ثابت کردند، ثابت‌های مثبت $c_۱$ و $c_۲$ وجود دارند به قسمی که

$$c_۱ r \log t \leq \chi_l(K_{r*t}) \leq c_۲ r \log t.$$

از نامساوی بالا نتیجه می‌شود،

$$\chi_l(G) = O(\sqrt{n \log n}).$$

همچنین الون و تارسی [۱] با استفاده از تکنیک‌های جبرخطی ثابت کردند اگر G یک گراف دلخواه باشد

$$\chi_l(G) \leq c\chi(G) \log n.$$

در[۳۴]، [۳۲]، [۱] به سوالات اصلی که در رنگ آمیزی لیستی گراف‌های مسطح مطرح بوده‌اند، پاسخ داده شده‌است .

قضیه ۲.۱

۱) (**توماسن**) هر گراف مسطح، ۵ ـ انتخاب‌پذیر است.

۲) (**وویت**) گراف‌های مسطحی وجود دارند که ۴ ـ انتخاب‌پذیر نیستند.

۳) (**توماسن**) هر گراف مثلث ـ آزاد، ۴ ـ انتخاب‌پذیر است.

۴) (**وویت**) گراف‌هایی وجود دارند که مثلث ـ آزاد هستند و ۳ ـ انتخاب‌پذیر نیستند.

۵) **(توماسن)** هر گراف مسطح با کمر حداقل ۵، ۳ ـ انتخاب‌پذیر است.

۶) **(الون و تارسی)** هر گراف مسطح دوبخشی ۳ ـ انتخاب‌پذیر است.

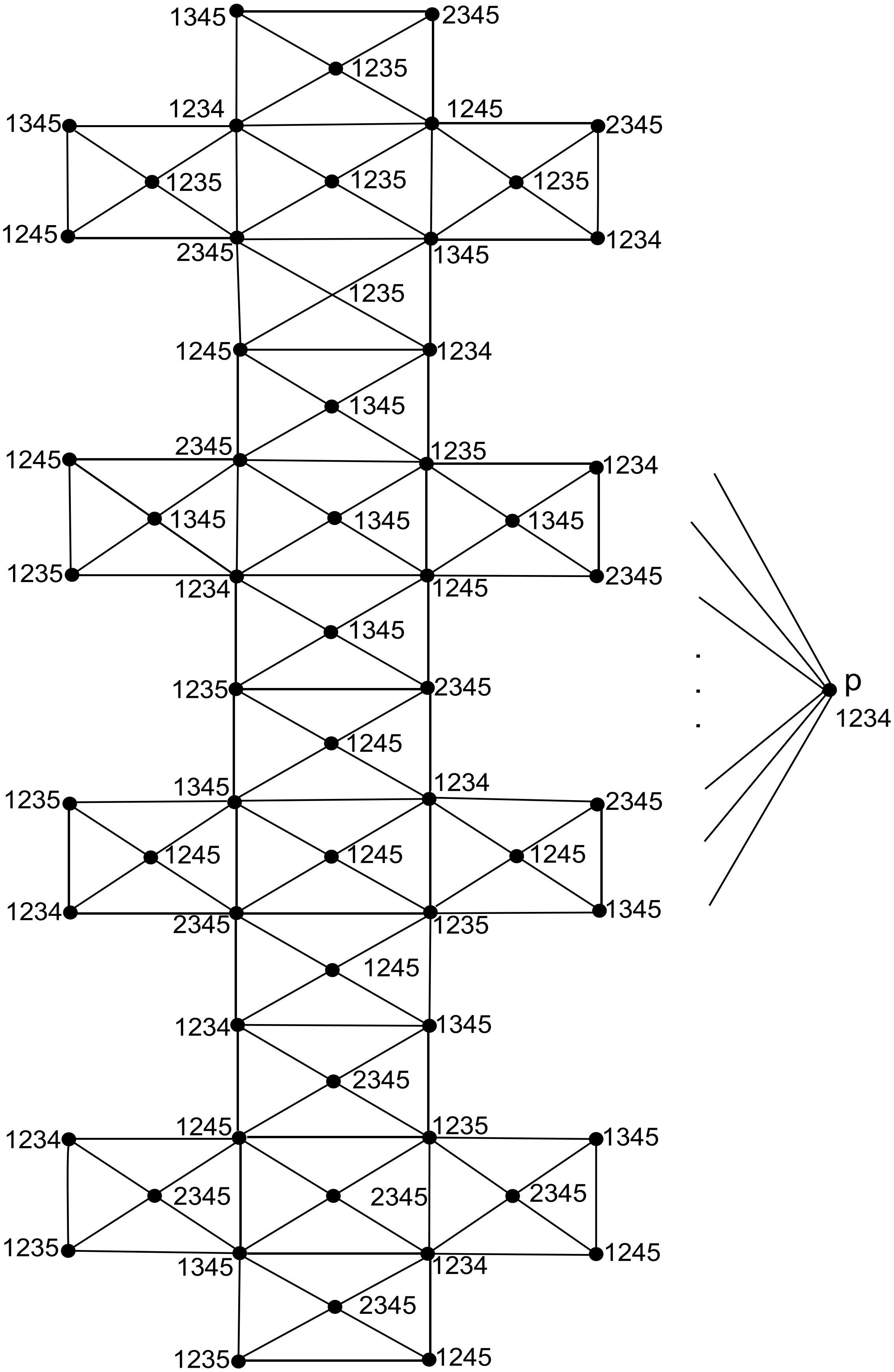
از قضیه‌ی بالا نتیجه می‌شود هر گراف مسطح ۵ ـ انتخاب‌پذیر است. همان‌طور که وویت [۳۴] نشان داد کران فوق دقیق است. در نتیجه قضیه‌ی ۴ ـ رنگ‌پذیری گراف‌های مسطح قابل توسیع به ۴ ـ انتخاب‌پذیری نیست. در شکل ۲.۱ کوچک‌ترین گراف مسطح (با ۶۳ رأس) که ۴ ـ انتخاب‌پذیر نیست رسم شده است. نکته‌ی جالب توجه در گراف میرزاخانی (شکل ۲.۱) آن است که وی تنها از ۵ رنگ برای اثبات ۴ ـ انتخاب‌پذیر نبودن گراف خود استفاده کرده است.

رنگ‌آمیزی یال‌های گراف G به طور مشابه تعریف می‌شود. یک k ـ **رنگ‌آمیزی یالی** برای گراف G تابع c، $c: E(G) \to \{1, 2, \cdots, k\}$ است به طوری که $c(e_1) \neq c(e_2)$، هرگاه e_1 و e_2 مجاور باشند. **شاخص رنگی** گراف G کم‌ترین مقدار k است به طوری که G، یک k ـ رنگ‌آمیزی یالی داشته باشد. اگر $L: E \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ یک لیست‌دهی به یال‌های گراف G باشد، تابع $c: E(G) \to N$، یک L ـ **رنگ‌آمیزی یالی معتبر** گفته می‌شود، هرگاه برای هر یال e در G، $c(e) \in L(e)$ و $c(e_j) \neq c(e_i)$ اگر e_i و e_j مجاور باشند. گراف G، k ـ **یال ـ انتخاب‌پذیر** نامیده می‌شود، هرگاه برای هر لیست‌دهی L به طوری که $|L(e)| = k$ دارای یک L ـ رنگ‌آمیزی یالی معتبر باشد. **عدد انتخاب یالی** یا **شاخص رنگی لیستی**، $\chi'_l(G)$، کمترین مقدار k است به طوری که G، k ـ یال ـ انتخاب‌پذیر باشد. به راحتی می‌توان نشان داد رنگ‌آمیزی یال‌های گراف G متناظر با رنگ‌آمیزی رأس‌های گراف $L(G)$ است.

چتویند و هاگویست [۱۰]، ثابت کردند اگر G یک گراف مثلث ـ آزاد باشد، آن‌گاه $\chi'_l(G) \leq \frac{9}{5}\Delta$. هیند [۴] در رساله‌ی دکترای خود محدودیت مثلث ـ آزاد بودن گراف G را برداشت و ثابت کرد اگر G یک گراف چندگانه‌ی دلخواه باشد، آن‌گاه $\chi'_l(G) \leq \frac{9}{5}\Delta$. هیند و بالاباش [۴]، کران فوق را برای گراف‌های ساده بهبود داده و ثابت کردند، اگر G یک گراف ساده باشد، آن‌گاه $\chi'_l(G) \leq (\frac{7}{4} + O(1))\Delta$. هیند همچنین ثابت کرد اگر G یک گراف مثلث ـ آزاد (ساده) باشد، آن‌گاه $\chi'_l(G) \leq \frac{5}{4}\Delta$. کاهن [۲۳] با استفاده از روش‌های احتمالاتی و بر اساس ایده‌های پیپنگر و اسپنسر ثابت کرد $\chi'_l(G) = \Delta + O(\Delta)$. هاگویست و جانسون [۱۶] نیز با استفاده از روش‌های احتمالاتی ثابت کردند،

$$\chi'_l(G) = \Delta + O(\Delta^{\frac{2}{3}}\sqrt{\log \Delta}).$$

همان‌طور که اشاره کردیم نامساوی $\chi_l(G) \geq \chi(G)$ می‌تواند به صورت اکید باشد. مسأله‌ی جالب اینجاست که برای هر گراف یالی که این دو پارامتر محاسبه شده، هیچ اختلافی بین شاخص رنگی و شاخص رنگی لیستی وجود ندارد.



شکل ۱.۱: گراف مریم میرزاخانی، با ۶۳ رأس. در نمودار فوق رأس p با همه‌ی رئوسی که از درجه‌ی ۴ نیستند، مجاور است.

حدس برابری شاخص رنگی و شاخص رنگی لیستی که به **حدس رنگ‌آمیزی لیستی** معروف است یکی از مهم‌ترین مسأله‌های حل نشده در رنگ‌آمیزی لیستی گراف‌ها است که به طور مستقل توسط ویزینگ، گاپتا، البرتسون و کولینز، بالاباش و هریس فرمول‌بندی شده است [۳۳]، [۱]، [۳۴] (لازم به ذکر است این حدس برای اولین بار در مقاله‌ی بالاباش چاپ شده است).

حدس ۳.۱ (**حدس رنگ‌آمیزی لیستی یا LCC**)
اگر G یک گراف چندگانه باشد، آن‌گاه

$$\chi'_l(G) = \chi'(G).$$

اگر ماکسیمم درجه‌ی گراف G حداکثر ۲ باشد، G یک مسیر یا دور است و می‌توان نشان داد حدس بالا برقرار است. جالب است بدانیم که حدس بالا برای گراف‌های با ماکسیمم درجه‌ی ۳ در حالت کلی ثابت نشده است.

بالاباش و هریس [۳] اولین کسانی بودند که نتایجی را در مورد حدس رنگ‌آمیزی لیستی به دست آوردند. آن‌ها ثابت کردند اگر G یک گراف دلخواه با ماکسیمم درجه‌ی Δ باشد، آن‌گاه

$$\chi'_l(G) \leq \begin{cases} ۲\Delta - ۲ & \text{اگر } \Delta \geq ۳ \\ ۲\Delta - ۳ & \text{اگر } \Delta \geq ۳۷ \\ ۲\Delta - ۴ & \text{اگر } \Delta \geq ۴۷ \\ ۲\Delta - ۵ & \text{اگر } \Delta \geq ۵۶ \end{cases} \qquad (۱)$$

همچنین اگر $\Delta \geq ۳۹۱۷$،

$$\chi'_l(G) \leq ۲\Delta - \lfloor \frac{۱}{۶}\Delta - \frac{۱}{۳}\sqrt{\Delta \log \Delta} \rfloor.$$

با استفاده از نتایج بالا می‌توان نشان داد که حدس رنگ‌آمیزی لیستی برای هر گراف با ماکسیمم درجه‌ی $\Delta = ۳$ که در کلاس دوم (تمام گراف‌های G با شرط $\chi'(G) = \Delta(G) + ۱$) قرار دارد، برقرار می‌باشد.

حدس رنگ‌آمیزی لیستی برای مدتی کم‌تر مورد توجه بود تا اینکه در سال ۱۹۷۹ بعد از مطرح شدن حدس دینیتز [۱۴]، مورد توجه بسیاری از ریاضی‌دانان قرار گرفت. حدس دینیتز (فصل سوم) به زبان گراف به این صورت است که گراف $K_{n,n}$، n ـ یال ـ انتخاب‌پذیر است. به عبارت دیگر

$$\chi'_l(K_{n,n}) = n.$$

با توجه به قضیه‌ی کونیگ نتیجه می‌گیریم حدس دینیتز یک حالت خیلی خاص از حدس رنگ‌آمیزی لیستی است. گالوین [۱۴] در سال ۱۹۹۴ در ادامه‌ی کارهای جانسون، الون و تارسی موفق به حل حدس رنگ‌آمیزی لیستی برای گراف‌های دوبخشی شد. حدس دینیتز به عنوان یک حالت خاص از

قضیه‌ی گالوین نتیجه می‌شود. وودال و همکاران [۲۶] با استفاده از جهت‌گذاری معرفی شده در مقاله‌ی گالوین، قضیه‌ی گالوین را به گراف‌های یالی ـ تام توسعه دادند. وودال [۴۱] همچنین ثابت کرد اگر C یک دور چندگانه‌ی دلخواه باشد، آن‌گاه $\chi'_l(G) = \chi'(G)$. هاگویست و جانسن [۱۶] ثابت کردند، برای هر $n \in \mathbb{N}$، $\chi'_l(K_n) \leq n$. در نتیجه LCC برای گراف‌های کامل فرد رأسی نیز برقرار می‌باشد. نتایج به دست آمده برای گراف‌های مسطح متنوع‌ترند. وودال و همکاران [۷] ثابت کردند اگر G یک گراف مسطح نشانده شده در یک رویه با مشخصه‌ی نامنفی باشد و $\Delta \geq ۱۲$، آن‌گاه $\chi'_l(G) = \chi'(G)$. جووان و همکاران [۲۲] ثابت کردند اگر G یک گراف سری ـ موازی (گراف مسطح $K_۴$ ـ ماینور آزاد) باشد، آن‌گاه $\chi'_l(G) = \chi'(G)$. در فصل‌های بعدی تمامی نتایج به دست آمده برای حدس رنگ‌آمیزی لیستی به تفصیل مورد بررسی قرار می‌گیرد.

ویزینگ برای شاخص رنگ‌آمیزی لیستی گراف‌های ساده یک حدس ضعیف‌تر را در [۳۳] مطرح کرد. او این حدس را مطرح کرد که کران $\chi'(G) \leq \Delta + ۱$، برای رنگ‌آمیزی لیستی نیز برقرار می‌باشد.

حدس ۴.۱ [۲۰] اگر G یک گراف ساده باشد، آن‌گاه

$$\chi'_l(G) \leq \Delta + ۱.$$

با استفاده از رابطه‌ی (۱) می‌توان نشان داد حدس ویزینگ برای هر گراف با ماکسیمم درجه‌ی ۳ برقرار است. جووان و همکاران [۲۱] ثابت کردند اگر G یک گراف ساده باشد و $\Delta(G) = ۴$، آن‌گاه G ۵ ـ یال ـ انتخاب‌پذیر است. هاگویست و جانسن [۱۶] حدس ویزینگ را برای گراف‌های کامل ثابت کردند. برودین [۶] ثابت کرد اگر G یک گراف مسطح ساده باشد و $\Delta \geq ۹$، آن‌گاه $\chi'_l(G) \leq \Delta + ۱$. حدس ویزینگ در فصل ۷ مورد بررسی قرار می‌گیرد و نتایج به دست آمده ذکر خواهند شد.

۱—۳ مروری بر فصل‌ها

هدف این پایان‌نامه بررسی نتایج به دست آمده در مورد حدس رنگ‌آمیزی لیستی است. در فصل دوم رنگ‌آمیزی لیستی با ارائه‌ی مثال‌هایی معرفی و برخی از پارامترهای مطرح در رنگ‌آمیزی لیستی بیان می‌گردند. ماکسیمم درجه‌ی میانگین گراف یکی از این پارامترهایی است که به طور مفصل مورد بررسی قرار می‌گیرد. در پایان فصل دوم روش‌هایی جبری برای حل مسائل مرتبط با رنگ‌آمیزی لیستی معرفی می‌شوند. مراجع اصلی فصل دوم مقاله‌های [۷]، [۱]، [۳۴] و [۳۲] هستند.

در فصل سوم یکی از مهم‌ترین نتایج به دست آمده در مورد حدس رنگ‌آمیزی لیستی که اثبات گالوین برای درستی حدس رنگ‌آمیزی لیستی گراف‌های دوبخشی است مورد بررسی قرار می‌گیرد. در

ادامه‌ی این فصل اثباتی کوتاه از مقاله‌ی گالوین ارائه می‌شود. در پایان حالت لیستی کران شانون ثابت می‌شود. مطالب فصل سوم از مقاله‌های [۷]، [۱]، [۳۴] و [۳۲] استخراج شده‌اند.

در فصل چهارم با استفاده از قضیه‌ی مافرای حدس رنگ‌آمیزی لیستی برای گراف‌های یالی ـ تام ثابت می‌شود. مطالب این فصل از مقاله‌ی [۲٦] به دست آمده‌اند.

در فصل پنجم حدس رنگ‌آمیزی لیستی را برای دورهای چندگانه ثابت می‌کنیم. سپس نتیجه‌ی به دست آمده را به گراف‌هایی که بلوک‌هایشان دور چندگانه یا یک گراف یالی تام است، تعمیم می‌دهیم. مرجع اصلی فصل پنجم مقاله‌ی [۴۱] است.

در فصل ششم ابتدا حدس رنگ‌آمیزی لیستی را برای گراف‌های مسطح ـ بیرونی ثابت می‌کنیم. سپس نتیجه‌ی به دست آمده را به گراف‌های تقریباً مسطح ـ بیرونی تعمیم می‌دهیم. در ادامه‌ی این فصل حدس رنگ‌آمیزی لیستی را برای گراف‌های با ماکسیمم درجه‌ی حداقل ۱۲ که در یک رویه با مشخصه‌ی نامنفی قابل نشاندن باشد، ثابت می‌کنیم. مراجع اصلی فصل ششم، مقاله‌های [۷]، [۲۲]،[۳۵]،[۱۷] و [۲۵] هستند.

در فصل هفتم به بررسی نتایج به دست آمده برای حدس ویزینگ در ارتباط با رنگ‌آمیزی لیستی گراف‌ها می‌پردازیم. مرجع اصلی فصل هفتم، مقاله‌ی [۲۹] می‌باشد.

فصل ۲

پارامترهای گراف در رنگ‌آمیزی

در این فصل قصد داریم به طور مختصر برخی از پارامترهای مطرح در رنگ‌آمیزی لیستی گراف‌ها را بیان کنیم و برخی از نتایج ساده‌ی آن‌ها را برای آشنایی ذکر کنیم. مطالب این فصل به طور عمده از مقاله‌های [۱]، [۷]، [۳۲]، [۳۴] اقتباس شده‌اند.

۲—۱ مقدمه

در این بخش به معرفی رنگ‌آمیزی لیستی گراف‌ها می‌پردازیم، همچنین برای بیان ارتباط رنگ‌آمیزی لیستی و رنگ‌آمیزی معمولی مفهوم پیش‌رنگ‌آمیزی را بیان می‌کنیم.

فرض کنیم $f, g : V(G) \to \mathbb{Z}$ دو تابع دلخواه باشند. همان‌طور که در فصل اول بیان شد منظور از یک k - رنگ‌آمیزی برای گراف G، یک نگاشت $f : V(G) \to \{1, \ldots, k\}$ است به طوری که $f(u) \neq f(v)$، هرگاه $uv \in E(G)$. به کوچک‌ترین عدد k، به طوری که G یک k - رنگ‌آمیزی داشته باشد **عدد رنگی** گراف G گوییم و با نماد $\chi(G)$ نشان می‌دهیم. رنگ‌آمیزی یک مفهوم عام در نظریه گراف است. با قرار دادن محدودیت‌های گوناگون روی رنگ‌آمیزی، می‌توان مباحث مختلف گراف را به زبان رنگ‌آمیزی گراف بیان کرد.

گراف G را $(f : g)$ - **انتخاب‌پذیر** گوییم، هرگاه برای هر لیست‌دهی $(A_v \ : \ v \in V(G))$ به رئوس G به طوری که برای هر v، $|A_v| = f(v)$، مجموعه‌های $B_v \subseteq A_v$ موجود باشند به طوری که برای هر v،

$|B_v| = g(v)$ و $B_v \cap B_u = \emptyset$، هرگاه $uv \in E(G)$. گراف G را f ـ **انتخاب‌پذیر** گوییم، هرگاه برای تابع ثابت ۱ $g \equiv$، $(f:g)$ ـ انتخاب‌پذیر باشد. گوییم گراف G، k ـ **انتخاب‌پذیر** است، هرگاه G برای تابع ثابت $f \equiv k$، f ـ انتخاب‌پذیر باشد. **عدد انتخاب** گراف G که با $\chi_l(G)$ نمایش داده می‌شود، کمترین مقدار k است به طوری که G، k ـ انتخاب‌پذیر باشد.

با توجه به تعریف گراف یالی، رنگ‌آمیزی یال‌های گراف دلخواه G، معادل رنگ‌آمیزی رئوس گراف $L(G)$ می‌باشد. بنابراین $\chi'_l(G) = \chi_l(L(G))$.پیش از بررسی رنگ‌آمیزی لیستی، می‌خواهیم مفهومی به نام **پیش رنگ‌آمیزی** را معرفی کنیم. فرض کنیم زیرمجموعه‌ی دلخواه W از رئوس $G = (V, E)$، همراه با رنگ‌آمیزی

$$\phi_W : W \to \{۱, \ldots, k\},$$

داده شده است (لزومی به پوشا بودن ϕ_W نیست و همچنین حالت $W = \emptyset$ امکان‌پذیر است). مسئله این است که آیا رنگ‌آمیزی W قابل توسیع به یک رنگ‌آمیزی $\phi : V(G) \to \{۱, \ldots, k\}$ است؟ در این صورت W را **مجموعه‌ی پیش رنگی** و k را **کران رنگی** G می‌نامند.

در ادامه نشان دهیم که رنگ‌آمیزی معمولی، رنگ‌آمیزی لیستی و پیش‌رنگ‌آمیزی قابل تبدیل به یک‌دیگر هستند.

تبدیل مسئله رنگ‌آمیزی لیستی به پیش‌رنگ‌آمیزی: فرض کنیم گراف G همراه با یک لیست‌دهی $\mathcal{L} = (l(v) : v \in V(G))$ داده شده و $\bigcup l(v) = \{۱, \ldots, k\}$. k رأس جدید $u_۱$،...،u_k را به گراف G افزوده و هر رأس v در G را به u_i متصل می‌کنیم هرگاه $i \notin l(v)$. حال با تخصیص رنگ i را به u_i، $W := \{u_۱, \ldots, u_n\}$ را پیش‌رنگ‌آمیزی می‌کنیم. واضح است پیش‌رنگ‌آمیزی W قابل توسیع به گراف معرفی شده در بالا است اگر و تنها اگر G، $\mathcal{L}$ ـ رنگ‌پذیر باشد.

تبدیل مسئله‌ی پیش‌رنگ‌آمیزی به رنگ‌آمیزی معمولی: فرض کنیم گراف $G = (V, E)$ با مجموعه‌ی پیش‌رنگی W و کران رنگی k، داده شده باشد. برای هر i، $i = ۱, \ldots, k$، W_i را رئوسی از W در نظر می‌گیریم که با رنگ i، رنگ شده‌اند. در G رأس جدید u_i را جایگزین W_i کرده و $v \in V \backslash W$ را با یک یال به u_i وصل می‌کنیم هرگاه v با حداقل یکی از رئوس W_i مجاور باشد. در پایان تمام u_iها را دو به دو به هم متصل می‌کنیم تا یک خوشه از مرتبه‌ی k به دست آوریم. گراف حاصل دارای عدد رنگی k است اگر و تنها اگر پیش‌رنگ‌آمیزی داده شده، قابل توسیع به یک رنگ‌آمیزی برای G باشد.

واضح است با ترکیب دو حالت قبل می‌توان رنگ‌آمیزی لیستی را به رنگ‌آمیزی معمولی تبدیل کرد.

مثال ۱.۲ گراف شکل زیر دو بخشی است، در نتیجه $\chi(G) = ۲$. به راحتی مشاهده می‌شود که گراف