دانشگاه تربیت مدرس

دانشکده علوم ریاضی

پایان‌نامه دوره کارشناسی ارشد ریاضی (محض)

جبرهای باناخ ابرتوبرین، اشتقاق‌های موضعی و میانگین‌پذیری ضعیف

توسط

لاله مرادی

استاد راهنما

دکتر فرشته سعدی

استاد مشاور

دکتر وحید شیربیشه

اسفند ۱۳۸۸

تقدیم به پدر و مادر مهربانم و خواهر شیرین‌تر از جانم

که روشنایی زندگیم هستند ؛

و تمام کسانی که دوستشان دارم

و عشق به آن‌ها امید ادامه راهم است .

قدردانی

خداوند بزرگ را سپاس و ستایش که چراغ علم را بر سر راه اندیشه‌ام روشن نمود و مرا در این راه صعب یاریگر بود . و از پدر و مادر و خواهر عزیزم سپاسگزارم که همواره حضور سبزشان امیدبخش من بوده است .

چون به نام استاد گرانقدرم دکتر سعدی می رسم ، گرچه این صفحه و هزار صفحهء دیگر تاب قدردانی از او را ندارد ، اما قلمم در برابر دانش و صبر ومهربانی‌اش سر تعظیم فرود می‌آورد تا شاید جبران قطره‌ای از دریای زحمات ایشان شود .

در انتها از تمام اساتید و دوستان گرامی‌ام به‌ویژه خانم طاهره پیرنظر، خانم اعلمی و آقای صادقی که وقت گرانبهایشان را برای کمک به من صرف کردند کمال تشکر را دارم .

لاله مرادی

اسفند ۱۳۸۸

چکیده

در این پایان‌نامه، ابتدا جبرهای باناخ نیم‌ساده‌ی منظم تعویض‌پذیری به‌نام جبرهای ابرتوبرین معرفی می‌شوند و سپس نشان داده‌می‌شود این جبرها یک زیرخانواده از جبرهای باناخ میانگین‌پذیر ضعیف هستند. سپس برخی از خواص موروثی چنین جبرهایی دررابطه با ایده‌آل‌ها، حاصلضرب‌های تانسوری و همریختی‌های جبری آن‌ها بررسی می‌شوند. به‌علاوه، نشان داده‌می‌شود برای جبر ابرتوبرین A فضای خطی اشتقاق‌های کراندار از A به‌توی یک A–مدول باناخ ، انعکاسی است . به‌خصوص خواهیم دید ارتباط نزدیکی بین جبرهای باناخ ابرتوبرین و مجموعه‌های ترکیباتی وجود دارد . درانتها به کاربردی از نتایج فوق برای جبرهای «فیگا–تالامانکا–هرز» روی یک گروه موضعاً فشرده اشاره می‌شود.
مرجع اصلی این پایان نامه [۲۹] می‌باشد .

واژه‌های کلیدی : جبر توبرین، عملگر موضعی، اشتقاق‌های موضعی تقریبی، مجموعه‌ترکیبات، جبر فیگا–تالامانکا–هرز، میانگین‌پذیری ضعیف .

فهرست مندرجات

مقدمه

فرض کنیم A یک جبرباناخ و X یک A–مدول باناخ باشد.عملگری مانند $D : A \to X$ یک اشتقاق موضعی نامیده می‌شود، هرگاه برای هر $a \in A$ اشتقاقی مانند $D_a : A \to X$ موجود باشد به‌طوریکه $D(a) = D_a(a)$. این مفهوم ابتدا توسط کادیسون [1] در [۱۷] معرفی شد که ایدهٔ اولیهٔ آن توسط وی از کارهای رینگ‌رز[2] درخصوص همانستگی هاچشیلد[3]از جبرهای عملگری متفاوت ایجاد شده‌بود. این‌نوع نگاشتها، همچنین درارتباط با مطالعه‌ی به‌طورجبری انعکاسی بودنِ فضای خطی اشتقاق‌ها، ظاهر می‌شوند[۱۹].کادیسون نشان داد که اگر A یک جبر فون نویمان [4] و X یک A–مدول باناخ دوگان باشد، آنگاه هر اشتقاق موضعی کراندار از A به‌توی X، یک اشتقاق است.

جانسون [5] این نتایج را تعمیم داده و نشان داد که اگر A یک C^*–جبر باشد، آنگاه اشتقاق‌های

[1] Kadison

[2] Ringrose

[3] Hochschild cohomology

[4] von Neumann

[5] Johnson

موضعی از A به‌توی یک $A-$مدول باناخ، اشتقاق هستند [۱۶].برای مطالعه نتایج بیشتر درمورد اشتقاق‌های موضعی می‌توان به مراجع [۱۱,۲۷] اشاره کرد.
جانسون همچنین نشان داد که کافی است نتایج برای جبرباناخ نیم‌ساده‌ی منظم و تعویض‌پذیر $C_\circ(\mathbb{R})$ بررسی شود. او نتایج خود را با مطالعه‌ی عملگرهای موضعی روی این جبر و استفاده از خواص موروثی معینی از $C_\circ(\mathbb{R})$ بدست آورد. در [۲۶] نشان داده شده است که بخش اصلی کارهای جانسون این مطلب است که :«عملگرهای موضعی کراندار از $C_\circ(\mathbb{R})$ به‌توی $C_\circ(\mathbb{R})^*$ ضربگر هستند.» این مطلب برای تعمیم نتایج وی به خانواده‌های دیگری از جبرهای باناخ نیم‌ساده‌ی منظم تعویض‌پذیر که خواص فوق را داشته باشند به‌کار گرفته شد.
در این پایان‌نامه که مرجع اصلی آن [۲۹] می‌باشد به مطالعه‌ی این نوع جبرهای باناخ تعویض‌پذیر که آن‌ها را جبرهای ابرتوبرین می‌نامیم،می‌پردازیم . در فصل یک مقدمات و پیش‌نیازهای موردنیاز از نظریه جبرهای باناخ، اشتقاق‌های روی آن‌ها،میانگین‌پذیری جبرهای باناخ و نیز مدول‌های روی جبرباناخ ارائه می‌شود.
در فصل دو عملگرهای موضعی بین مدول‌های روی جبرهای باناخ مطالعه می‌شوند و نشان داده‌می‌شود اگرهر عملگر موضعی کراندار از A به‌توی A^* یک ضربگر باشد، آنگاه هر عملگر موضعی کراندار T از X به‌توی Y^*،که در آن X مدول چپ باناخ اساسی و Y یک $A-$مدول راست باناخ اساسی است،یک همریختی $A-$مدولی چپ است.
در فصل سه نشان داده می‌شود که خانواده جبرهای ابرتوبرین یک زیرخانواده سره از جبرهای توبرین میانگین‌پذیر ضعیف است .سپس خواص اصلی و موروثی آن‌ها برحسب ایده‌آل‌هایشان و ضرب تانسوری و همریختی‌های جبری بین آن‌ها را در فصل چهار بررسی می‌کنیم .به‌خصوص در قضیه‌ی ۶.۲.۳ و قضیه‌ی ۲.۲.۴ نشان داده می‌شود که ارتباط نزدیکی بین جبرهای ابرتوبرین و مجموعه‌های ترکیبات (موضعی) برقرار است.
در فصل پنج (به‌طورجبری) انعکاسی‌بودن فضاهای خطی (به‌ترتیب اشتقاق‌ها)اشتقاق‌های

کراندار روی یک جبر ابرتوبرین بررسی می‌شود. برای این منظور از مفهوم اشتقاق‌های موضعی تقریبی که در [۲۸] معرفی شده‌است، استفاده می‌شود. نشان داده می‌شود که اشتقاق‌های موضعی تقریبی کراندار روی یک جبرابرتوبرین اشتقاق هستند. به‌خصوص،این مطلب نتیجه می‌دهد که فضای خطی اشتقاق‌های کراندار از یک جبر ابرتوبرین، انعکاسی است.

به‌علاوه این مطلب نتایج اصلی [۲۷] را تعمیم می‌دهد. همچنین در این فصل چند نتیجه معادلِ به‌طورجبری انعکاسی‌بودنِ فضاهای خطی اشتقاق‌های یک جبرابرتوبرین ارائه داده‌می‌شود.

در فصل شش فرض می‌کنیم G یک گروه موضعاً فشرده و $A_p(G)$ جبر فیگا—تالامانکا—هرز از G برای $p \in (1,\infty)$ باشد. فارست و روندِ[۶] در [۸] نشان داده‌اند که اگر مولفه‌ی اصلی G (یعنی بزرگترین مولفه‌ی همبندی در G که عضو همانی دارد.) آبلی باشد، آنگاه جبر فوریه‌ی $A(G) := A_2(G)$ میانگین‌پذیر ضعیف است. با نشان‌دادن اینکه برای این نوع گروه‌ها، $A_p(G)$ ابرتوبرین است نتایج فوق تعمیم داده‌می‌شود(قضیه‌ی ۸.۲.۶). بنابراین، به‌خصوص $A_p(G)$ میانگین‌پذیر ضعیف است.

[۶] Forrest and Runde

فصل ۱

مقدمات و پیش نیازها

در این فصل اشاره کوتاهی به مفاهیم مورد نیاز از تئوری جبرهای باناخ، مدول‌های روی آن‌ها و مفاهیمی نظیر میانگین‌پذیری و ضرب تانسوری می‌کنیم.
مراجع اصلی این فصل [۲۵]، [۱] و [۲] می‌باشند.

۱.۱ مقدماتی از آنالیز تابعی

تعریف ۱.۱.۱ فرض کنیم X یک فضای نرمدار با نرم $\|.\|$ باشد، در این صورت X را یک فضای باناخ گوییم هرگاه با متر حاصل از نرمش کامل باشد. به عبارت دیگر X فضای باناخ است هرگاه هر دنباله‌ی کشی در $(X, \|.\|)$ همگرا باشد.

تعریف ۲.۱.۱ فرض کنیم $T : X \to Y$ یک عملگر خطی بین دو فضای نرمدار X و Y باشد. نرم T با ضابطه‌ی

$$\|T\| = Sup\{\|T(x)\| \ : \ x \in X \ , \ \|x\| = ۱\}$$

تعریف می‌شود. اگر $\|T\|$ متناهی باشد، T یک عملگر خطی کراندار نامیده می‌شود. ثابت می‌شود هر عملگر خطی $T : X \to Y$ کراندار است اگر و تنها اگر پیوسته باشد.مجموعه همه عملگرهای خطی کراندار از X به Y را با $B(X,Y)$ نمایش می‌دهیم که درواقع یک فضای نرمدار با نرم تعریف شده در بالا است. درحالت خاص فضای $B(X,X)$ را که فضای عملگرهای خطی کراندار روی فضای نرمدار X است با $B(X)$ نمایش داده‌می‌شود.

قضیه ۳.۱.۱ [قضیه ۲۵, ۱.۴] فرض کنیم X و Y دو فضای نرمدار باشند. اگر Y یک فضای باناخ باشد آنگاه فضای $B(X,Y)$ همراه با نرم تعریف شده در ۲.۱.۱ یک فضای باناخ است.

تعریف ۴.۱.۱ برای فضای نرمدار X، فضای باناخ $B(X,\mathbb{C})$ را دوگان X نامیده و با X^* نمایش می‌دهیم.

قضیه ۵.۱.۱ (**هان-باناخ**) [قضیه ۲۵, ۳.۶] اگر f یک تابعک خطی پیوسته (کراندار) روی یک زیرفضای M از یک فضای نرمدار X باشد، آنگاه تابعکی مانند $\Lambda \in X^*$ وجود دارد که $\Lambda = f$ روی M به‌طوریکه $\|f\| = \|\Lambda\|$.

قضیه ۶.۱.۱ (**نگاشت باز**) [قضیه ۶, ۵.۱۰] فرض کنیم X و Y دو فضای باناخ باشند. اگر T عملگری خطی کراندار از X به‌روی Y باشد، آنگاه T باز است.

قضیه ۷.۱.۱ (**نموداربسته**) [قضیه ۲۵, ۱۵.۲] فرض کنیم T یک عملگرخطی از فضای باناخ X به فضای باناخ Y باشد . اگر مجموعه‌ی $G = \{(x,T(x)) \ : \ x \in X\}$ در فضای حاصلضربی $X \times Y$ بسته باشد آنگاه T پیوسته است.

تعریف ۸.۱.۱ فرض کنید X یک فضای نرمدار باشد، توپولوژی ضعیف ستاره روی X^*، ضعیف‌ترین توپولوژی است که تحت آن به ازای هر $x \in X$، تابعک خطی $x^* \mapsto x^*(x)$ روی X^* پیوسته باشد. همچنین X^*–توپولوژی روی X ضعیف‌ترین توپولوژی روی X است که تحت آن اعضای X^* پیوسته هستند . این توپولوژی، توپولوژی ضعیف X نامیده می شود.
ازاین‌پس گاهی اوقات برای اثر عضو $x^* \in X^*$ روی یک عضو $x \in X$ ممکن است از نماد $\langle x^*, x\rangle$ بجای $x^*(x)$ استفاده کنیم .

تذکر. آ) دنباله‌ی $\{x_n\}$ در فضای نرمدار X به طور ضعیف همگرا به عضو x از X است اگر و تنها اگر به ازای هر $x^* \in X^*$، $\langle x^*, x_n\rangle \to \langle x^*, x\rangle$.
ب) برای فضای نرمدار X، دنباله‌ی $\{x_n^*\}$ در X^* به طور ضعیف ستاره همگرا به $x^* \in X^*$ است، اگر و تنهااگر به ازای هر $x \in X$، $\langle x_n^*, x\rangle \to \langle x^*, x\rangle$.

قضیه ۹.۱.۱ (**باناخ–آلاغلو**[۱]) [قضیه ۲۵, ۳.۱۵] هرگاه V یک همسایگی صفر در فضای نرمدار X باشد و

$$K = \{\Lambda \in X^* \ : \ |\Lambda(x)| \leq 1 \ , \ \text{به ازای هر } x \in V\}$$

آنگاه K ضعیف ستاره فشرده می‌باشد . به‌خصوص گوی واحد بسته X^*، ضعیف ستاره فشرده است .

قضیه ۱۰.۱.۱ [قضیه ۲۵, ۴.۱۰] فرض کنید X و Y فضاهای نرمدار باشند،برای هر $T \in B(X,Y)$ یک عملگر منحصر به فرد مانند $T^* \in B(Y^*, X^*)$ وجود دارد که برای هر $x \in X$ و $y^* \in Y^*$ داریم

$$\langle y^*, Tx\rangle = \langle T^*y^*, x\rangle$$

[۱] Banach-Alaoglu

و $\|T\| = \|T^*\|$. (عملگر T^*، عملگر الحاقی T نامیده‌می‌شود.)

قضیه ۱۱.۱.۱ [قضیه ۲۵, ۴.۱۲] اگر $T \in B(X,Y)$ که در آن X و Y فضاهای نرمدار هستند، آنگاه $R(T)$ (برد T) در Y چگال است اگر و تنها اگر T^* یک به یک باشد.

تعریف ۱۲.۱.۱ فرض کنیم X یک فضای باناخ و M یک زیرفضای X باشد، پوچساز $M^\perp$ را به شکل زیر تعریف می‌کنیم:

$$M^\perp = \{x^* \in X^* \ : \ \langle x^*, x\rangle = 0 \ , \ \text{برای هر}\ x \in M\}$$

بنابراین $M^\perp$ شامل تابعک های خطی کراندار روی X است که روی M صفر می‌شوند.

تعریف ۱۳.۱.۱ اگر N یک زیرفضای بسته از فضای نرمدار X باشد، نرم خارج قسمتی روی فضای خارج قسمتی X/N را به شکل زیر تعریف می‌کنیم

$$\| \ x + N\| = inf\{\|x - z\| \ : \ z \in N\}$$

به‌علاوه، نگاشت خارج قسمتی $X \to X/N$، $x \mapsto x + N$ را با π نمایش می‌دهیم که نگاشتی پیوسته و باز است.

قضیه ۱۴.۱.۱ [قضیه ۲۵, ۴.۹] فرض کنیم M زیرفضای بسته‌ای از فضای باناخ X و $\pi : X \to X/M$ نگاشت خارج قسمتی باشد، قرار می‌دهیم $Y = X/M$. برای هر $y^* \in Y^*$ تعریف می‌کنیم $\tau y^* = y^* \circ \pi$. آنگاه τ یک یکریختی طولپا از Y^* به $M^\perp$ است.

۲.۱ جبرهای باناخ

تعریف ۱.۲.۱ یک جبر A همراه با نرم $\|.\|$ را یک جبرباناخ نامیم هرگاه A یک فضای باناخ باشد و به‌علاوه $\|xy\| \leq \|x\|\|y\|$ که $x, y \in A$. جبرباناخ A را تعویض‌پذیر گوییم، هرگاه $xy = yx$، برای هر $x, y \in A$ و یکدار نامیم هرگاه عضوی مانند $e \in A$ وجود داشته باشد که $xe = ex = x$، $x \in A$.

لازم به ذکر است در یک جبرباناخ یکدار A با یکه‌ی e، با جایگزینی نرمی هم ارز می‌توان همواره فرض کرد $\|e\| = ۱$.

مثال ۲.۲.۱ الف) مهمترین مثال از یک جبرباناخ، جبرباناخ $C(K)$، متشکل از تمام توابع مختلط و پیوسته روی فضای هاسدورف و فشرده ناتهی K همراه با سوپریمم نرم است که در آن ضرب به صورت نقطه‌ای $(fg)(p) = f(p)g(p)$ تعریف می‌شود. $C(K)$ یک جبرباناخ تعویض‌پذیر است و تابع ثابت ۱ نیز عضو یکه آن است.

ب) مثال دیگر فضای $B(X)$ است که همراه با عمل ترکیب به عنوان ضرب ، یک جبرباناخ (در حالت کلی تعویض‌ناپذیر) با یکه I (عملگر همانی) است.

ج) برای فضای موضعاً فشرده و ناتهی Ω، $C_{\circ}(\Omega)$ فضای متشکل از تمام توابع مختلط پیوسته روی Ω که در بینهایت صفر می‌شوند همراه با سوپریمم نرم یک فضای باناخ است که‌با جمع نقطه‌ای و ضرب اسکالر یک جبرباناخ است. ضمناً این جبر یکدار است، اگر و تنها اگر Ω فشرده باشد و در این حالت $C_{\circ}(\Omega) = C(\Omega)$.

د) فرض کنیم G یک گروه موضعاً فشرده و f و g توابع انتگرال‌پذیری روی G باشند. ضرب پیچش f و g در نقطه‌ی $s \in G$ با رابطه‌ی زیر تعریف می شود

$$(f * g)(s) = \int_G f(t)g(t^{-1}s)dm(t).$$

که در آن m اندازه هارچپ روی G است. برای هر $f,g \in L^{1}(G)$، $f * g \in L^{1}(G)$ و به‌علاوه $\|f * g\|_{1} \leq \|f\|_{1}\|g\|_{1}$. بنابراین $(L^{1}(G), *, \|.\|_{1})$ یک جبرباناخ است.

تعریف ۳.۲.۱ فرض کنیم A یک جبرمختلط و Φ یک تابعک خطی غیرصفر روی A باشد، اگر برای هر $x, y \in A$ داشته باشیم $\Phi(xy) = \Phi(x)\Phi(y)$، آنگاه Φ را یک همریختی مختلط روی A گویند.

قضیه ۴.۲.۱ [گزاره۱۰.۶، ۲۵] فرض کنیم A یک جبرباناخ و $\varphi : A \to \mathbb{C}$ یک همریختی مختلط باشد، آنگاه φ پیوسته‌است و $\|\varphi\| \leq 1$. به علاوه اگر A یکدار نیز باشد، $\|\varphi\| = 1$.

مثال ۵.۲.۱ [تعریف $A.۳.۷۴$، ۲]. فرض کنیم $\{(E_{\gamma}, \|.\|_{\gamma}) \ : \ \gamma \in \Gamma\}$ یک خانواده از فضاهای باناخ باشد و $p \in [1, \infty)$. آنگاه فضاهای $\ell^{p}(\Gamma, E_{\gamma})$ و $c_{00}(\Gamma, E_{\gamma})$ و $\ell^{\infty}(\Gamma, E_{\gamma})$ به شکل زیر تعریف می‌شوند

$$\ell^{p}(\Gamma, E_{\gamma}) = \{(x_{\gamma}) \in \Pi_{\gamma \in \Gamma} E_{\gamma} \ : \ \|(x_{\gamma})\| = (\sum_{\gamma \in \Gamma} \|x_{\gamma}\|_{\gamma}^{p})^{\frac{1}{p}} < \infty\};$$

$$\ell^{\infty}(\Gamma, E_{\gamma}) = \{(x_{\gamma}) \in \Pi_{\gamma \in \Gamma} E_{\gamma} \ : \ \|(x_{\gamma})\| = sup_{\gamma \in \Gamma} \|x_{\gamma}\|_{\gamma} < \infty\};$$

$$c_{00}(\Gamma, E_{\gamma}) = \{(x_{\gamma}) \in \Pi_{\gamma \in \Gamma} E_{\gamma} \ : \ x_{\gamma} = 0 \ , \ \gamma \ \text{بجز برای تعداد متناهی}\}.$$

به‌وضوح $\ell^{p}(\Gamma, E_{\gamma})$ و $\ell^{\infty}(\Gamma, E_{\gamma})$ فضاهای باناخ هستند. فضای $c_{00}(\Gamma, E_{\gamma})$ در $\ell^{p}(\Gamma, E_{\gamma})$ برای $p \in [1, \infty)$ چگال است و بستار آن در $\ell^{\infty}(\Gamma, E_{\gamma})$ را با $c_{0}(\Gamma, E_{\gamma})$ نشان می‌دهیم. درحالتی که برای هر $\gamma \in \Gamma$، E_{γ} یک جبرباناخ باشد فضاهای $\ell^{p}(\Gamma, E_{\gamma})$ و $c_{00}(\Gamma, E_{\gamma})$ و $\ell^{\infty}(\Gamma, E_{\gamma})$ با عمل ضرب نقطه‌ای جبرباناخ هستند.

تعریف ۶.۲.۱ فرض کنیم Φ_{A} مجموعه تمام همریختی‌های مختلط یک جبرباناخ تعویض‌پذیر A باشد. با ازای هر $x \in A$، تابع $\hat{x} : \Phi_{A} \to \mathbb{C}$ با ضابطه $\hat{x}(h) = h(x)$ برای هر

$h \in \Phi_A$ تبدیل گلفاند x نامیده می‌شود. همچنین اگر $\hat{A}$ را مجموعه تمام $\hat{x}$ ها، $x \in A$، بگیریم توپولوژی گلفاند روی Φ_A توپولوژی ضعیف القاشده توسط $\hat{A}$ است. یعنی، ضعیف‌ترین توپولوژی که هر $\hat{x}$ را پیوسته می‌کند.

در این پایان نامه تمام جبرهای باناخ موردنظر تعویض‌پذیر هستند و لذا طبق [قضیه۲.۳.۶ ,۲] درحالتی که یکدار نیز باشند فضای ایده‌آل ماکسیمال آن‌ها همواره ناتهی است.

قضیه ۷.۲.۱ [قضیه ۱۱.۵ ,۲۵] فرض کنیم A یک جبرباناخ تعویض‌پذیر و یکدار و Φ_A مجموعه تمام همریختی‌های مختلط A باشد،

(الف) هر ایده‌آل ماکسیمال A، هسته عضوی مانند $h \in \Phi_A$ است.

(ب) اگر $h \in \Phi_A$، آنگاه هسته h ایده‌آل ماکسیمالی از A است.

(ج) عضو $x \in A$ در A وارون‌پذیر است اگر و تنها اگر $h(x) \neq 0$ برای هر $h \in \Phi_A$.

(د) عضو $x \in A$ در A وارون‌پذیر است اگر و تنها اگر x در هیچ ایده‌آل سره‌ای از A قرار نگیرد.

تعریف ۸.۲.۱ با توجه به قضیه فوق،یک تناظر یک به یک بین ایده‌آل‌های ماکسیمال جبرباناخ تعویض‌پذیر یکدار A و اعضای Φ_A موجود است. Φ_A به همراه توپولوژی گلفاند را فضای ایده‌آل ماکسیمال A می‌نامیم.

در حالتی که جبرباناخ تعویض‌پذیر A لزوماً یکدار نباشد تناظری دوسویی بین ایده‌آل‌های ماکسیمال مدولار A و همریختی‌های مختلط ناصفر A وجود دارد که در آن یک ایده‌آل مانند J از A مدولار نامیده می‌شود هرگاه عضوی مانند $e \in A$ وجود داشته باشد که برای هر $x \in A$، $xe - x \in J$.

تعریف ۹.۲.۱ برای جبرباناخ تعویض‌پذیر A، رادیکال A که با $rad(A)$ نمایش داده می‌شود، عبارتست از اشتراک تمام ایده‌آل‌های ماکسیمال مدولار A، در حالتی که A حداقل یک ایده‌آل ماکسیمال مدولار داشته باشد. در غیر این صورت تعریف می‌کنیم $rad(A) = A$.

تعریف ۱۰.۲.۱ جبرباناخ تعویض‌پذیر A را نیم‌ساده می‌گوییم هرگاه $rad(A) = \{0\}$.

قضیه ۱۱.۲.۱ [قضیه ۱۱.۹ ,۲۵] اگر Φ_A فضای ایده‌آل ماکسیمال جبرباناخ تعویض‌پذیر A باشد، آنگاه

(الف) Φ_A یک فضای هاسدورف موضعاً فشرده است و در حالتی که A یکدار باشد، Φ_A فشرده است.

(ب) تبدیل گلفاند $A \to \hat{A} \subseteq C_\circ(\Phi_A)$ یک همریختی با هسته $rad(A)$ است. به عبارت دیگر، تبدیل گلفاند یک‌به‌یک است اگر و تنها اگر A نیم‌ساده باشد.

قضیه ۱۲.۲.۱ [قضیه ۱۱.۱۰ ,۲۵] اگر $\psi : A \to B$ یک همریختی از جبرباناخ تعویض‌پذیر A به توی جبرباناخ تعویض‌پذیر نیم‌ساده B باشد، آنگاه ψ پیوسته است.

نتیجه ۱۳.۲.۱ هر یکریختی جبری بین دو جبرباناخ تعویض‌پذیر نیم‌ساده، یک همسانریختی است.

لازم به‌ذکر است نتیجه بالا درحالتی که جبرهای باناخ موردنظر تعویض‌پذیر نیز نباشند درست است .

مثال ۱۴.۲.۱ [مثال ۱۱.۱۳ ,۲۵] فرض کنیم X یک فضای هاسدورف فشرده باشد و قرار می‌دهیم $A = C(X)$. برای هر $x \in A$، همریختی مقداری $f \mapsto f(x)$ راروی A با φ_x نمایش می‌دهیم. چون $C(X)$ نقاط روی X را جدا می‌کند، $x \neq y$ نتیجه می‌دهد $\varphi_x \neq \varphi_y$.

بنابراین نگاشت $x \mapsto \varphi_x$، یک نشاننده از X به Φ_A است. بالعکس هر $\varphi \in \Phi_{C(X)}$ به صورت یک همریختی مقداری است یعنی $X \to \Phi_{C(X)}$ با ضابطه $x \mapsto \varphi_x$ پوشا است.

تعریف ۱۵.۲.۱ [تعریف ۲, ۱.۳.۳] فرض کنیم A یک جبر مختلط غیریکدار باشد. آنگاه $A^\sharp$ فضای خطی $A \times \mathbb{C}$ به‌همراه ضرب زیر

$$(a,\alpha)(b,\beta) = (\alpha b + \beta a + ab, \alpha\beta) \qquad (\alpha,\beta \in \mathbb{C}, a, b \in A)$$

یک جبر یکدار است با یکه‌ی (۱ ,۰).

درحالتی که A جبرباناخ باشد $A^\sharp$ به‌همراه نرم زیر

$$\|(a,\alpha)\| = \|a\| + |\alpha| \qquad ((a,\alpha) \in A^\sharp)$$

یک جبرباناخ است که A را به‌عنوان یک ایده‌آل (بسته) دربر دارد .

به‌علاوه $\Phi_{A^\sharp}$ همسانریخت با فشرده‌سازی تک نقطه‌ای $\Phi_A \cup \{\infty\}$ از Φ_A است.به‌عبارت دقیق‌تر هر همریختی مختلط φ روی A به یک همریختی مختلط روی $A^\sharp$ به‌صورت $\varphi((a,\alpha)) = \varphi(a) + \alpha$ گسترش می‌یابد و بالعکس اگر همریختی $\psi \in \Phi_{A^\sharp}$ به‌گونه‌ای باشد که $\psi|_A \neq 0$ آنگاه ψ را می‌توان عضوی از Φ_A دانست . لذا اگر قرار دهیم

$$\varphi_\infty((a,\alpha)) = \alpha \qquad ((a,\alpha) \in A^\sharp)$$

آنگاه بنابه [نتیجه ۳۳, ۱۰.۷]، $\Phi_{A^\sharp} = \Phi_A \cup \{\infty\}$.

گزاره ۱۶.۲.۱ [صفحه ۲, ۴۱۲] باتوجه‌به ارتباط بین فضاهای ایده‌آل ماکسیمال A و $A^\sharp$، اگر A نیم‌ساده باشد، $A^\sharp$ نیز نیم‌ساده است.

تعریف ۱۷.۲.۱ برای جبرباناخ تعویض‌پذیر A یک یکه‌ی تقریبی، یک تور مانند $\{e_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ در A است، به‌طوری‌که $xe_\lambda \to x$ برای هر $x \in A$.

تعریف ۱۸.۲.۱ برای جبرباناخ تعویض‌پذیر A مجموعه‌ی اعضایی مانند $a \in A$ را که $\hat{a}$ محمل فشرده‌ای در Φ_A دارد با A_c نمایش می‌دهیم و جبرباناخ A را توبرین نامیم اگر $\overline{A_c} = A$.

توجه می‌کنیم برای جبرباناخ A، ازآنجاکه تبدیل گلفاند یک همریختی است و برای $a, b \in A$ داریم

$$\{t \in \Phi_A : \widehat{ab}(t) \neq \circ\} \subseteq \{t \in \Phi_A : \hat{a}(t) \neq \circ\} \cap \{t \in \Phi_A : \hat{b}(t) \neq \circ\}$$

لذا A_c یک ایده‌آل A است.

قضیه ۱۹.۲.۱ [قضیه ۲۱,۲.۱.۱۵] فرض کنیم Ω یک فضای هاسدورف موضعاً فشرده باشد و برای هر $w \in \Omega$ فرض کنیم φ_w همریختی مقداری روی $C_\circ(\Omega)$ در w باشد، یعنی $\varphi_w(f) = f(w)$. آنگاه نگاشت $\Omega \to \Phi_{C_\circ(\Omega)}$ با ضابطه‌ی $w \mapsto \varphi_w$ یک همسانریختی است.

مثال ۲۰.۲.۱ $C_\circ(\Omega)$ که در آن Ω یک فضای موضعاً فشرده است یک جبر توبرین می‌باشد زیراهمانگونه که قبلاً ذکر شد $\Omega \cong \Phi_{C_\circ(\Omega)}$ و به‌علاوه می‌دانیم $\overline{C_c}(\Omega) = C_\circ(\Omega)$ که در آن $C_c(\Omega)$ جبر توابع مختلط پیوسته با محمل فشرده روی Ω است .

می‌دانیم برای جبرباناخ A و ایده‌آل بسته‌ی I، فضای خارج قسمتی A/I با عمل ضرب

$$(a+I)(b+I) = ab + I \qquad (a, b \in A)$$

و نرم خارج قسمتی یک جبرباناخ است. در قضیه‌ی زیر رابطه‌ی فضای ایده‌آل ماکسیمال I و A/I با فضای ایده‌آل ماکسیمال A داده‌می‌شود .