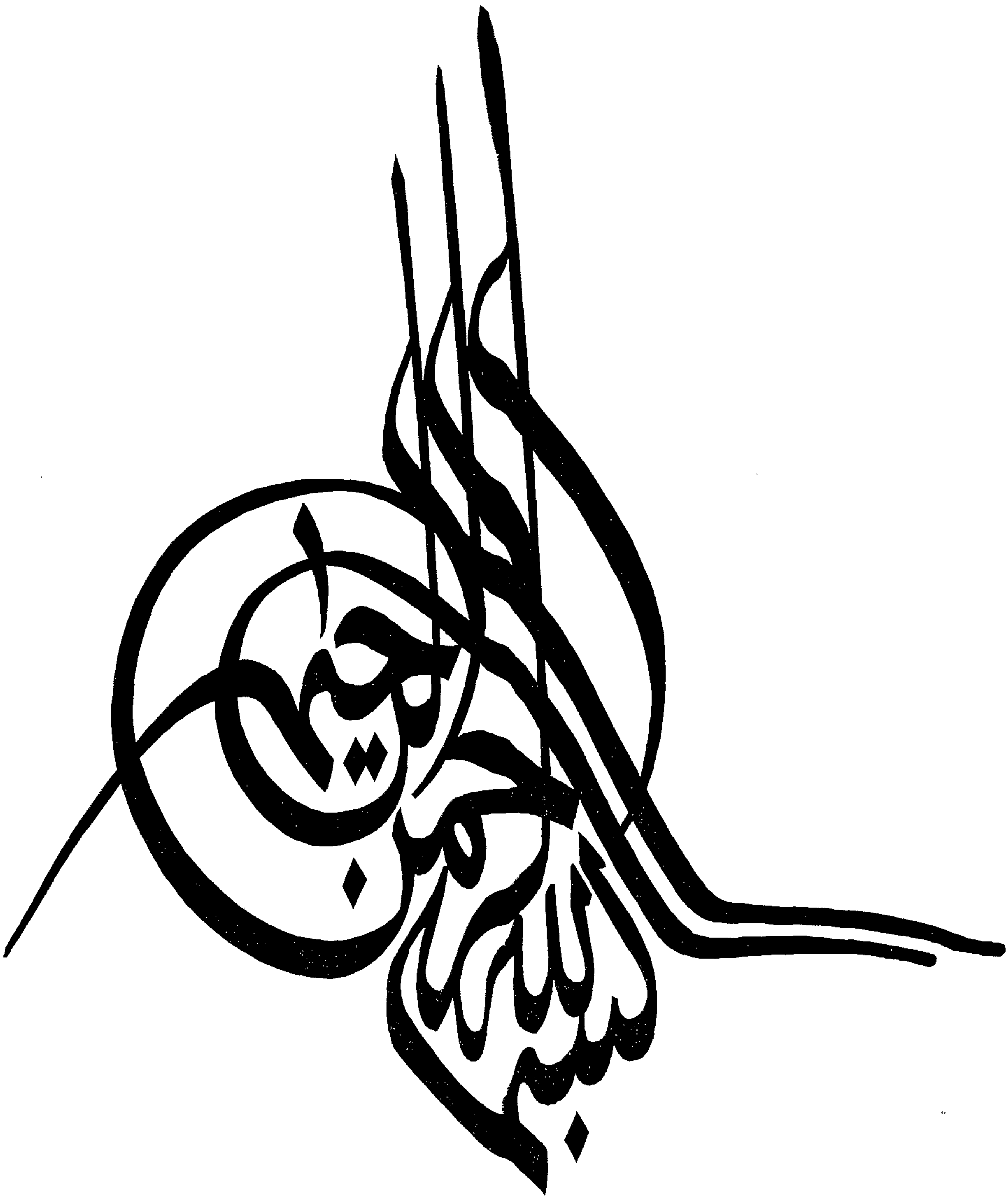

١١٨٤٤٩

دانشگاه مازندران

دانشکده علوم پایه

عنوان پایان نامه

وجود و یکتایی جواب برای رده ای از مسائل مقدار مرزی شبه خطی

جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد

رشته ریاضی محض (گرایش آنالیز)

استاد راهنما

پروفسور قاسم علیزاده افروزی

استاد مشاور

دکتر سمیه خادملو

نگارش

محبوبه پوراعتمادی

تابستان ۱۳۸۷

تقدیر و تشکر :

سپاس آفریننده ی بی همانند را که به اندیشه ام تابندگی بخشود .

حال که به لطف عمیم او توفیق اتمام این پایان نامه دست داد

برخود لازم می دانم که با دلی خرسند سر تعظیم و ارادت به پیشگاه

استاد ارجمندم جناب آقای پروفسور قاسم علیزاده افروزی

که همواره با راهنمایی های ارزنده مرا مورد لطف و محبت خویش قرار

دادند ، فرود آورم و مراتب سپاسگزاری خود را به محضر ایشان

عرضه بدارم . امید آنکه توانسته باشم ، گوشه ای از زحمات بی شائبه

ایشان را جبران نمایم .

سپاسگزاری :

از سرکار خانم دکتر سمیه خادملو، استاد مشاور بزرگوارم و جناب آقای دکتر ابوالفضل اکراطالشیان، مدیر محترم گروه ریاضی، تشکر و قدردانی می نمایم.

از اساتید مدعو گرامی آقایان دکتر عبدالعلی نعمتی و دکتر محسن علیمحمدی که زحمت مطالعه ی این پایان نامه را کشیدند، و همچنین جناب آقای دکتر حسین زاده نماینده محترم تحصیلات تکمیلی نیز، بسیار سپاسگزارم.

تقدیم به :

پدر و مادر عزیزم که نمی دانم کدامین

واژه می تواند خوبی های آنان را تفسیر

کند و کدام نقاش می تواند گوشه ای از

مهربانی و فداکاریشان را به تصویر کشد .

چکیده

در این پایان نا مه ابتدا وجود و یکتایی جواب شعاعی را برای مسأله مقدار مرزی بیضوی شبه خطی :

$$(r^{N-1}\Phi(u'))' = -\lambda r^{N-1} f(u) \qquad in\ \Omega$$

$$u'(0) = u(1) = 0$$

بررسی میکنیم که در آن $\Phi(x) = |x|^{p-2}x$ و λ پارامتر بزرگ و Ω گوی واحد است .

سپس در فصل ۳ یکتایی را در دامنه کلی برای مسأله شبه خطی :

$$-\Delta_p u = \lambda f(u) \qquad in\ \Omega$$

$$u = 0 \qquad on\ \partial\Omega$$

ثابت می کنیم که در آن $\Delta_p u = div(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$ و $p > 1$ است .

در ادامه، در فصل ۴ رفتار مجانبی جواب های بدست آمده را هنگامی که $\lambda \to \infty$ بررسی می کنیم .

و در پایان ، وجود جواب را برای رده ای از دستگاه های p - لاپلاسین بصورت

$$\begin{cases} -\Delta_p u = \lambda f(v) & in\ \Omega, \\ -\Delta_p v = \lambda g(u) & in\ \Omega, \\ u = 0 = v & on\ \partial\Omega, \end{cases}$$

ثابت می کنیم . که در آن $\Delta_p z = div(|\nabla z|^{p-2}\nabla z)$ و $p > 1$ ، λ پارامتر مثبت و Ω دامنه کراندار

در R^N با مرز هموار $\partial\Omega$ است .

مقدمه:

آنالیز غیرخطی یکی از مهم ترین و شاخص ترین شاخه های ریاضیات است که در دهه های اخیر قرن گذشته پیشرفت چشمگیری داشته است. موفقیت کنونی این رشته، به دلیل کاربرد وسیع آن در پدیده های مختلف فیزیکی، مهندسی ، مکانیک کوانتومی واقتصاد است. در واقع در مدل بندی بسیاری از پدیده های طبیعی، به نحوی به یک معادله دیفرانسیل جزیی برخورد می کنیم. در سال های اخیر به دلیل وسعت کاربردها و دامنه‌ی گسترده‌ی نتایج در زمینه های مختلف، بسیاری از پژوهشگران وآنالیزدانان به مطالعه‌ی رفتار جوابهای دسته ای از معادلات دیفرانسیل جزیی از نوع بیضوی همراه با شرط مرزی، به کمک آنالیز غیرخطی، پرداخته اند. آنالیز غیرخطی و حساب تغییرات هم اکنون به یکی از شاخه های بسیار جذاب و پر کار در زمینه‌ی مطالعه‌ی معادلات بیضوی با شرط مرزی تبدیل شده است. دامنه‌ی وسیعی از مسائل طرح شده در زمینه‌ی مکانیک سیالات، پدیده های همدمایی در ترمودینامیک و همچنین نرخ مهاجرت در جمعیت شناسی، به کمک این ابزار جدید از ریاضیات مورد بررسی و تحلیل قرار گرفته اند.

به عنوان یک نمونه از مصادیق فیزیکی ، فرض کنید بخواهیم وجود و رفتار حالت پایدار u از دمای توزیع شده در جسم Ω که توسط یک جریان الکتریکی $I=\sqrt{\lambda}>0$، گرم شده است را بررسی کنیم (∇uبیانگر انتقال گرماست). اگر جسم Ω همگن با هدایت حرارتی یکنواخت باشد، مقاومت الکتریکی R تابعی از دمای u خواهد بود یعنی $R=R(u)$. حال اگر تابش گرمایی را ناچیز فرض کنیم، معادله‌ی حالت پایدار به دست آمده دارای ساختار $-\Delta u=\lambda R(u)$ می باشد که در این حالت، تنها جواب های مثبت مورد نظر می باشند. در بسیاری از موارد فیزیکی، مقاومت همراه با دما افزایش می یابد یعنی $u\to R(u)$ یکنوای صعودی است. فرض کنید دما روی مرز جسم همواره صفر باقی

بماند که در نتیجه ما با یک معادله با شرط مرزی دیریکله مواجه هستیم. معمولاً مقاومت حتی در دمای صفر نیز مثبت در نظر گرفته می شود یعنی: $R(0) > 0$.

گاهی در مدل بندی برخی پدیده های فیزیکی به عملگری پیچیده تر از عملگر لاپلاس برخورد می‌کنیم. وسعت کاربردهای عملگر بیضوی پی- لاپلاس که به صورت $\Delta_p u = div(|\nabla u|^{p-2} \nabla u)$ تعریف می شود، به شکلی است که توجه بسیاری از دانشمندان و آنالیزدانان را به خود معطوف کرده است. این عملگر در مطالعه‌ی سیالات غیرنیوتنی، در برخی مسائل واکنش پخش و همچنین در مطالعه‌ی شارش درون جسم متخلخل به کار گرفته می شود..

از دیدگاه کاربردی دانستن اینکه آیا یک جواب داده شده پایدار است یا نه از اهمیت زیادی برخوردار است. مفهوم پایداری در رابطه با این امکان است که خطاهای کوچک پیش آمده در طول یک روند ریاضی، ممکن است وقتی روند ادامه یابد مستهلک شوند، به عکس، ناپایداری نیز وقتی رخ می دهد که خطاهای کوچک احتمالاً بدون کران افزایش یابند.

« فهرست مطالب »

فصل اول

تعاریف و
قضایای مقدماتی

۱ - ۱ تعاریف و مفاهیم پایه ای

در این فصل به معرفی مفاهیم ابتدایی که در سراسر این پایان نامه مورد استفاده قرار می گیرند ، می پردازیم. ابتدا معادلات دیفرانسیل جزئی و برخی کاربردهای آن را معرفی می کنیم . سپس مروری گذرا بر فضاهای باناخ ، هیلبرت ، L^p، سوبولوف و قضایای مرتبط با آنها خواهیم داشت.

تعریف ۱ .۱. ۱(معادله دیفرانسیل) :

هر معادله شامل یک متغیر وابسته و مشتقاتش نسبت به یک یا چند متغیر مستقل را معادله دیفرانسیل گویند. معادلات دیفرانسیل کاربرد زیادی در ریاضیات ، فیزیک ، مهندسی ، اقتصاد و بسیاری از دیگر علوم دارند .

تعریف ۱ .۱.۳(دامنه) :

فرض کنیم R^n فضای اقلیدسی $n-$ بعدی $(n \geq 2)$ با نقاط $(x_1,\dots,x_n)$ که $x_i \in R$ و $\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$ باشد در این صورت $\Omega \subset R^n$ را یک دامنه گوییم هرگاه باز و همبند باشد.

تعریف ۱ .۱. ۴(نقطه حدی،بستار و مرز) :

نقطه $x \in X$ یک نقطه حدی Ω گویند هرگاه برای هر $r > 0$ داشته باشیم:

$$B_r^0(x) \cap \Omega \neq \phi$$

که در آن $B_r^0(x)$ یک همسایگی محذوف به شعاع r و مرکز x است. مجموعه نقاط حدی Ω را با Ω' نشان می دهیم. بستار Ω را که با $\overline{\Omega}$ نشان می دهیم عبارت است از اجتماع نقاط Ω و نقاط حدی آن، یعنی :

$$\overline{\Omega} = \Omega \cup \Omega'$$

همچنین مرز Ω که با $\partial\Omega$ نشان می دهیم عبارت است از :

$$\partial\Omega = \overline{\Omega} - \Omega^0$$

اگر $\Omega = R^n$، آنگاه $\partial\Omega = \phi$

تعریف ۱.۱.۵ :

مجموعه همه توابع پیوسته روی Ω را با $C(\Omega)$ نشان می دهیم. برای $C^k(\Omega), k \in \mathbb{N}$ نشان دهنده توابعی هستند که همه مشتقات تا مرتبه k ام آنها روی Ω پیوسته است. $C^\infty(\Omega)$ کلاس همه توابعی هستند که برای هر عدد طبیعی k متعلق به $C^k(\Omega)$ باشد. $C^k(\overline{\Omega})$ مجموعه توابعی در $C^k(\Omega)$ است که تمام مشتقات تا بیشتر از k آنها به طور پیوسته به $\overline{\Omega}$ توسیع می یابند.

پاره ای از اوقات نیازمند به توابعی هستیم که در آن Ω کراندار باشند ولی به طور پیوسته به $\overline{\Omega}$ توسیع نیابند.

این گونه توابع را با $C_B(\Omega)$ نشان می دهیم و مشابهاً $C_B^k(\Omega)$ نیز قابل تعریف است $C(\Omega, R^n)$ نشان دهنده توابع برداری n- بعدی روی Ω می باشد.

تعریف ۱ . ۱ .۶:

محمل یک تابع پیوسته f روی R^n به صورت زیر تعریف می شود :

$$supp \quad f(x) = \overline{\{x \in R^n \ : \ f(x) \neq 0\}} \ = K$$

یعنی برای هر $x \in R^n$ اگر x عضو K نباشد آنگاه $f(x) = 0$.همانطور که میدانیم (طبق قضیه هاینه برل) مجموعه های بسته و کراندار در R^n فشرده می باشند بنابراین اگر محمل f کراندار باشد ، می گوییم f دارای محمل فشرده است. فضای همه توابع پیوسته f که محمل فشرده دارند را با $C_0(R^n)$ نمایش می دهیم. به طور مشابه $C_0(\Omega)$ نشان دهنده توابع پیوسته روی Ω می باشد که محمل آنها یک زیر مجموعه فشرده از Ωاست. همچنین $C_0^k(\Omega)$ نیز به طریق مشابه قابل تعریف است

تعریف ۱ . ۱ .۷(تابع آزمون) :

تابع f، تعریف شده روی مجموعه باز غیر تهی $\Omega \subset R^n$ را یک تابع آزمون نامند هرگاه $f \in C^\infty(\Omega)$ و یک مجموعه فشرده مانند $K \subset \Omega$ موجود باشد به طوریکه محمل f در K قرار داشته باشد. مجموعه تمام

این توابع را با $C_0^\infty(\Omega)$ نشان می دهند.

تعریف ۱ . ۱ . ۸ (مجموعه های اندازه پذیر و توابع اندازه پذیر) :

فرض می کنیم Ω یک دامنه در R^n و μ اندازه لبگ در R^n باشد. مجموعه هایی که روی آنها μ خوش تعریف است را مجموعه های اندازه پذیر می نامیم. توابع f را که برای آنها مجموعه $\{x \in R^n : f(x) < \alpha\}$ برای هر α حقیقی یک مجموعه اندازه پذیر باشد توابع اندازه پذیر می نامیم.

تعریف ۱ . ۱ . ۹ (فضای $L^p(\Omega)$) :

فرض کنید Ω یک دامنه کراندار در R^n و p یک عدد حقیقی مثبت باشد و همچنین u یک تابع اندازه پذیر و تعریف شده روی Ω باشد. تعریف می کنیم:

$$\|u\|_p = \{\int_\Omega |u(x)|^p dx\}^{\frac{1}{p}}$$

در این صورت $L^p(\Omega)$ متشکل از همه u هایی می گوییم که برای آنها داشته باشیم:

$$\|u\|_p < \infty$$

$\|u\|_p$ را نرم L^p تابع u می نامیم. در $L^p(\Omega)$ توابعی را یکی می گیریم که به طور تقریباً همه جا با هم برابر باشند ، یعنی اندازه نقاطی که با هم برابر نیستند برابر با صفر باشد.

می گوییم $u=0$ در $L^p(\Omega)$ اگر $u(x)=0$ به طور تقریبا همه جا در Ω . به وضوح اگر $u\in L^p(\Omega)$ و $c\in R$ آنگاه $cu\in L^p(\Omega)$. به علاوه اگر $u, v\in L^p(\Omega)$ آنگاه داریم :

$$|u(x)+v(x)|^p\leq (|u(x)+u(x)|)^p\leq 2^p(|u(x)|)^p+|u(x)|^p)$$

پس $u+v\in L^p(\Omega)$ و بنابراین $L^p(\Omega)$ یک فضای برداری است.

تعریف ۱.۱ . ۱۰ (انتگرال پذیری موضعی تابع f روی دامنه Ω) :

مجموعه همه توابع تعریف شده روی قلمرو Ω که انتگرالشان تعریف شده و متناهی باشد را توابع انتگرال پذیر می نامیم. اغلب اوقات با توابعی که به طور موضعی انتگرال پذیر هستند روبرو می شویم یعنی توابعی که روی هر زیر مجموعه فشرده از Ω انتگرال پذیر هستند ولزومی ندارد که روی خود Ω انتگرال پذیر باشند. مجموعه همه چنین توابعی را با $L^1_{loc}(\Omega)$ نشان می دهیم.

تعریف ۱ . ۱ ـ ۱۱ (سوپریمم اساسی) :

فرض کنید u یک تابع اندازه پذیر روی Ω باشد. می گوییم u به طور اساسی کراندار است هر گاه یک ثابت $\alpha\in R$ وجود داشته باشد به طوریکه رابطه $|u(x)|\leq\alpha$ به طور تقریبا همه جا در Ω بر قرار باشد به بزرگترین کران پایین(اینفیمم) چنین α هایی سوپریمم اساسی می گوییم و آن را با نماد زیر نشان می دهیم :

$$ess\ \sup_{x\in D}|u(x)| = \inf\{\ \alpha : \mu(\{x : |u(x)| > \alpha\}) = 0\ \}$$

تعریف ۱ . ۱ .۱۲ (فضای $L^{\infty}(\Omega)$) :

$L^{\infty}(\Omega)$ فضای برداری متشکل از همه توابعی است که سوپریمم اساسی آنها متناهی باشد. نرم در این فضا به صورت زیر تعریف می شوند:

$$\|u\|_{\infty} = ess\ \sup_{x\in D}|u(x)|$$

تعریف ۱ . ۱ .۱۳ (فضای $L^{p}_{loc}(\Omega)$) :

برای $1 \le p < \infty$, $L^{p}_{loc}(\Omega)$ عبارت است از توابع حقیقی مقدار و اندازه پذیر u روی Ω به طوری که برای هر زیر مجموعه فشرده K از Ω داشته باشیم :

$$\int_K |u(x)|^p\,dx < \infty$$

۱-۲ فضاهای باناخ و هیلبرت

تعریف ۱ . ۲ . ۱ (فضای خطی نرمدار وباناخ) :

فضای برداری X را یک فضای خطی نرمدار نامیم هر گاه نرم روی X که بانگاشت

$$\begin{cases} P: X \to R \\ x \to \|x\| \end{cases}$$

معرفی می شود دارای شرایط زیر باشد:

۱) $\|x\| \geq 0$ برای هر $x \in X$ و $\|x\| = 0$ اگر وتنها اگر $x = 0$ ،

۲) $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$ برای هر $x \in X$ و هر $\alpha \in R$،

۳) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ برای هر $x, y \in X$

یک فضای نرمدار خطی X ، تحت متر تعریف شده بصورت زیر یک فضای متریک می باشد.

$$d(x,y) = \|x - y\| \qquad ; \qquad \forall x,y \in X$$

در نتیجه یک دنباله $\{x_n\} \subset X$ همگرا به عنصر $x \in X$ است، هر گاه

$$\|x_n - x\| \to 0$$

همچنین $\{x_n\}$ یک دنباله کوشی است هر گاه $\|x_m - x_n\| \to 0$ وقتی که $m, n \to \infty$. هر فضای باناخ یک فضای خطی نرمدار است که با متر تعریف شده به وسیله نرمش تام (کامل) باشد . یعنی هر دنباله کوشی در X با متر تعریف شده بوسیله نرمش به نقطه ای از X همگرا باشد.

تعریف ۲.۲.۱ (فضای ضرب داخلی و هیلبرت) :

فضای برداری (حقیقی) H را یک فضای ضرب داخلی نامیم هرگاه به هر زوج مرتب ازبردارهای x, y در

H یک عدد حقیقی مانند $<x,y>$ به نام حاصلضرب داخلی x,y چنان مربوط شده باشد که قواعد زیر

برقرار باشد:

۱) برای هر $x,y\in\Omega$، $<x,y>=<y,x>$،

۲) برای هر $\lambda_1,\lambda_2\in R$ و هر $x_1,x_2,y\in H$ داشته باشیم:

$$<\lambda_1 x_1+\lambda_2 x_2 ,y>=\lambda_1<x_1 ,y>+\lambda_2<x_2 ,y>$$

۳) برای هر $x\in H$ ، $<x,x>\geq 0$،

۴) $x=0$ اگر و تنها اگر $<x,x>=0$.

بنابر خاصیت (۳) می توان $\|x\|$ یعنی نرم بردار $x\in H$ را ریشه دوم نا منفی $<x,x>$ تعریف کرد. یعنی

$$\|x\|=<x,x>^{\frac{1}{2}} \qquad ,\forall x\in H$$

در این صورت به وضوح شرایط (۱) و (۲) در تعریف ۲ . ۱ . ۱ برقرارند. برای اثبات نا مساوی مثلثی مطابق نامساوی کوشی- شوارتز به ازای هر $x,y\in H$ داریم :

$$|<x,y>|\leq\|x\|\,\|y\|$$

و همچنین با کمک نا مساوی $<x,y>\leq|<x,y>|$ به دست خواهیم آورد :

$$\|x+y\|^2=<x+y,x+y>=\|x\|^2+2<x,y>+\|y\|^2\leq(\|x\|+\|y\|)^2$$

پس :

$$\|x+y\|\leq\|x\|+\|y\|$$

بنابراین تمام اصول موضوع یک فضای نرمدار خطی برقرار می باشد لذا یک فضای ضرب داخلی H، یک فضای نرمدار خطی نیز است .هرگاه این فضای داخلی تام باشد آن را یک فضای هیلبرت می گویند. هرگاه $<x,y>=0$ برای هر زیر فضای M از H، متمم متعامد را به صورت زیر تعریف می کنیم :

$$M^{\perp}=\{x\in H \mid <x,y>=0, \qquad \forall y\in M\}$$

اگر M نیز بسته باشد آنگاه H جمع مستقیم M و $M^{\perp}$ است می نویسیم : $H=M\oplus M^{\perp}$ [27]

۱ – ۳ عملگرهای بیضوی، اتحادهای گرین و قضیه دیورژانس

تعریف ۱.۳.۱ (گرادیان) :

اگر تابع u در R^n تعریف شده باشد گرادیان u در $x=(x_1,\dots,x_n)$ برداری است در R^n که با

$\nabla u=grad\,u=\left(\frac{\partial u}{\partial x_1},\dots,\frac{\partial u}{\partial x_n}\right)$ تعریف می شود.

تعریف ۱.۳.۲ (دیورژانس) :

اگر $u=(u_1,...,u_n)$ یک میدان برداری باشد دیورژانس u در $x=(x_1,...,x_n)$ به صورت زیر تعریف

می شود:

$$div\, u = \nabla.u = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \ldots + \frac{\partial u_n}{\partial x_n} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial u_j}{\partial x_j}$$

تعریف ۱.۳.۳ (عملگر های بیضوی) :

فرض کنید Ω یک ناحیه همـوار و کراندار در R^n باشد. مسئله ای را به صورت زیر در نظر بگیرید :

$$\begin{cases} Lu(x) = f(x), & x \in \Omega, \\ Bu(x) = 0 \quad , & x \in \partial\Omega, \end{cases} \qquad (۱ . ۱)$$

که در آن عملگر دیفرانسیلی L به صورت زیر تعریف می شود :

$$L = -\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}\, \partial_i \partial_j + \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \partial_i + c \qquad (۱ . ۲)$$

عملگر فوق را در نقطه $\Omega \Subset x=(x_1,...,x_N)$ بیضوی گوییم اگر و تنها اگر ضریب مثبت $\mu(x)$ موجود

باشد به طوریکه :

$$\sum_{i,j=1}^{N} \alpha_{ij}(x)\, \xi_i \xi_j \geq \mu(x) \sum_{i=1}^{N} \xi_i^2$$