دانشگاه بیرجند

دانشکده علوم

گروه آمار

عنوان پایان نامه:

قضایای حدی برای متغیرهای تصادفی فازی

ارائه شده جهت اخذ مدرک کارشناسی ارشد در رشته آمار گرایش ریاضی

اساتید راهنما:

دکتر حمیدرضا نیلی ثانی

دکتر محمد قاسم اکبری

استاد مشاور:

دکتر امید ربیعی

نگارش:

مسعود عبدالهی

تابستان ۹۰

بسم الله الرحمن الرحیم

تقدیم به

همسر صبور، قانع و مهربانم

پدر و مادر مهربان و بزرگوارم

و تمام کسانی که همواره مشوقم در دوران تحصیل بوده اند

تقدیر و تشکر

حمد و سپاس به درگاه ایزد منّان، که از عنایتش پدری عزیز و مادری مهربان به من ارزانی فرمود که شکر ایشان به زبان برنیاید، پروردگاری که از رحمت خویش و برکت وجودی این دو عزیز نعمت علم آموزی و توفیق بهره مندی از محضر اساتید گرانقدر دانشگاه بیرجند را به من عطا نمود.

سپاس و تقدیر بی‌پایان خود را تقدیم اساتید بزرگوارم آقای دکتر حمید رضا نیلی ثانی، آقای دکتر محمد قاسم اکبری و آقای دکتر امید ربیعی می‌نمایم که بدون نظارت صبورانه این بزرگواران در مراحل مختلف تحقیق و تدوین پایان نامه، به پایان رساندن دوره غیر ممکن بود.

از اساتید محترم جناب آقای دکتر محمد امینی و آقای دکتر محسن عارفی که داوری پایان نامه را بر عهده داشتند سپاسگزارم.

از همسر مهربانم که در تمامی لحظات، حمایتهای بیدریغ او همراه مطمئن من در پیمودن این راه بوده است متشکرم.

شایسته است فرصت غنیمت شمرده و از تمامی مسئولین و کارکنان محترم دانشگاه بیرجند همچنین دوستان گرامی و عزیزی که مرا با راهنمایی ها و رهنمود های خود مورد لطف قرار دادند، کمال تشکر را داشته باشم.

مسعود عبدالهی

تابستان ۱۳۹۰

چکیده

قضایای حدی برای متغیرهای تصادفی فازی در قرن اخیر مورد توجه بسیاری از صاحبنظران قرار گرفته است. در این پایان‌نامه نخست تعاریف و مفاهیم پایه مورد نیاز در سایر فصول مطرح می‌گردد. در فصل دوم انواع همگرایی و به ویژه قضیه همگرایی مغلوب برای متغیرهای تصادفی فازی بیان می‌شوند. سپس در فصل‌های سوم و چهارم به ترتیب به بررسی قوانین قوی و ضعیف اعداد بزرگ برای مجموع متغیرهای تصادفی فازی می‌پردازیم. همچنین در فصل‌های پنجم و ششم به ترتیب قوانین قوی اعداد بزرگ برای مجموع‌های وزنی متغیرهای تصادفی مستقل همسطح فازی و متغیرهای تصادفی وابسته منفی همسطح فازی تحت دسته‌های متنوعی از اوزان را مورد مطالعه قرار می‌دهیم.

پیشگفتار

مفهوم متغیرهای تصادفی فازی به عنوان تعمیم طبیعی از مجموعه های فازی به منظور نشان دادن روابط بین برآمدهای یک آزمایش تصادفی و داده های فازی برای اولین بار توسط واکرناک در سال‌های ۱۹۷۸ و ۱۹۷۹ معرفی شد. از آن به بعد محققان زیادی کم و بیش به این موضوع پرداخته، که سرانجام پوری و رالسکو در سال ۱۹۸٦ با تعریف کمی متفاوت با تعریف واکرناک، تعریفی را ارائه کردند که مبنای بیشتر مطالعات بعدی شد.

از آنجا که قضایای حدی برای متغیرهای تصادفی فازی بطور عام و قوانین اعداد بزرگ (ق.ا.ب) به طور خاص یکی از پایه‌های اساسی در استنباط آماری می‌باشند، بسیاری از صاحبنظران به تعمیم و اثبات ق.ا.ب برای متغیرهای تصادفی فازی اهتمام ورزیدند.

کیم (۱۹۹۸) مفهوم متغیرهای تصادفی مستقل همسطح و همتوزیع همسطح فازی را ارائه نمود و قانون قوی اعداد بزرگ (ق.ق.ا.ب) را برای مجموع اینگونه متغیرهای تصادفی اثبات نمود. در این پایان-نامه نتایج کیم (۱۹۹۸) را به متغیرهای تصادفی وابسته منفی هم‌سطح فازی، مجموع‌های وزنی فازی و مجموع‌های وزنی متغیرهای تصادفی وابسته فازی تحت شرایط متنوعی تعمیم می‌دهیم. همچنین قانون ضعیف اعداد بزرگ (ق.ض.ا.ب) برای دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی فازی بطور فشرده محدب و بطور یکنواخت انتگرال‌پذیر مورد مطالعه قرار می‌گیرد.

فهرست مطالب **صفحه**

فصل اول: کلیات و مفاهیم اولیه... ۱

مقدمه.. ۲

۱-۱ مروری بر مفاهیم آنالیز ریاضی... ۲

۱-۲ برخی از نکات و مفاهیم اساسی احتمال... ۷

۱-۳ مجموعه فازی و عدد فازی... ۱٤

۱-٤ متغیرتصادفی فازی.. ۲۳

فصل دوم: انواع همگرایی برای متغیرتصادفی فازی.. ۲۷

مقدمه.. ۲۸

۲-۱ خواص امید ریاضی متغیرتصافی فازی.. ۲۸

۲-۲ قضایای همگرایی برای متغیرهای تصادفی فازی.. ۳۰

فصل سوم: ق.ق.ا.ب برای متغیرهای تصادفی فازی... ۳٦

مقدمه.. ۳۷

۳-۱ ق.ق.ا.ب کلموگروف برای متغیرهای تصادفی فازی... ۳۷

۳-۲ ق.ق.ا.ب چانگ برای متغیرهای تصادفی فازی... ٤۷

فصل چهارم: ق.ض.ا.ب برای متغیرهای تصادفی فازی.. ٦۲

مقدمه.. ٦۳

٤-۱ ق.ض.ا.ب برای دنباله متغیرهای تصادفی فازی بطور فشرده محدب و بطور یکنواخت انتگرال‌پذیر.. ٦۳

٤-۲ ق.ض.ا.ب برای دنباله متغیرهای تصادفی همتوزیع فازی بطور محدب ۷۰

٤-۳ ق.ض.ا.ب برای دنباله متغیرهای تصادفی کراندار انتگرال‌پذیر فازی............................ ۷۲

فصل پنجم: ق.ق.ا.ب برای مجموع وزنی متغیرهای تصادفی مستقل فازی........................ ۷۷

مقدمه.. ۷۸

۵-۱ ق.ق.ا.ب برای مجموع وزنی متغیرهای تصادفی مستقل همسطح فازی........................ ۷۸

فصل ششم: ق.ق.ا.ب برای مجموع وزنی متغیرهای تصادفی وابسته فازی...................... ۱۰۸

مقدمه.. ۱۰۹

٦-۱ ق.ق.ا.ب برای مجموع وزنی متغیرهای تصادفی وابسته منفی همسطح فازی.................. ۱۰۹

فهرست مطالب **صفحه**

آینده تحقیق ۱۲۲
واژه نامه انگلیسی به فارسی ۱۲۳
نام نامه ۱۲٤
منابع ۱۲٦

فهرست اشکال	صفحه	توضیحات
شکل ۱	۵	نمایش توابع نیم‌پیوسته بالایی
شکل۲	۵	نمایش تابع نیم‌پیوسته پایینی
شکل ۳	۶	نمایش هندسی متر هاسدورف
شکل ۴	۱۶	نمایش هندسی عدد فازی
شکل ۵	۱۷	نمایش هندسی جمع دو عدد فازی
شکل ۶	۱۸	نمایش هندسی عدد فازی $\tilde{u}$
شکل ۷	۱۹	نمایش هندسی $f_m(\tilde{u})$ برای $m = 3$
شکل ۸	۱۹	نمایش هندسی A_k ها در $\mathcal{R}^n$

فصل اول

کلیات و مفاهیم اولیه

مقدمه: در این فصل مفاهیم و قضایای مورد نیاز سایر فصول را ارائه می‌دهیم. بخش اول اختصاص به مروری بر اصول و مفاهیم اساسی آنالیز دارد. در بخش دوم به اختصار اندازه احتمال و خواص آن را یادآوری می‌کنیم. مروری بر مفاهیم مجموعه‌های فازی و اعداد فازی، در بخش سوم بررسی شده است. در پایان مفهوم متغیرتصادفی فازی بیان شده است.

۱-۱ مروری بر مفاهیم اساسی آنالیز ریاضی:

در این رساله از نمادهای $\mathcal{R}$ و N به ترتیب برای نمایش اعداد حقیقی و اعداد طبیعی استفاده می‌کنیم.

تعریف ۱-۱-۱: فرض کنید X یک مجموعه ناتهی باشد. تابع $d\colon \mathrm{X}\times\mathrm{X}\longrightarrow[0,\infty)$ که در سه شرط زیر صدق می‌کند را یک متر گوییم

۱- $d(x,y)=0$ اگر و تنها اگر $x=y$.

۲- $d(x,y)=d(y,x)$ برای هر $x,y\in X$ (تقارنی).

۳- $d(x,y)\leq d(x,w)+d(w,y)$ برای هر $x,y,w\in X$ (نامساوی مثلثی).

مجموعه X به همراه متر d را یک فضای متری نامیده و با (X,d) نمایش می‌دهیم.

تعریف ۱-۱-۲: فرض کنید (X,d) یک فضای متری باشد تمام نقاط و مجموعه‌های یاد شده در زیر، عنصرها و زیر مجموعه‌های X فرض می‌شوند.

۱- همسایگی نقطه x مجموعه‌ای است مثل $N_r(x)$ مرکب از تمام نقاطی چون y که $d(x,y)<r$ می‌باشد. عدد r شعاع $N_r(x)$ نامیده می‌شود.

۲- نقطه x یک نقطه حدی مجموعه E است، هرگاه هر همسایگی x شامل نقطه‌ای چون $y\in E$ غیر از x باشد. مجموعه نقاط حدی E را با $E^{\prime}$ نشان می دهیم.

۳- مجموعه E بسته است هرگاه $E^{\prime}\subset E$.

۴- نقطه x یک نقطه درونی E است، هرگاه یک همسایگی از x مانند N وجود داشته باشد به طوری که $N \subset E$.

۵- مجموعه E باز است، هرگاه هر نقطه E یک نقطه درونی‌اش باشد.

۶- مجموعه E کراندار است، هرگاه عددی حقیقی چون $M > 0$ و نقطه‌ای مثل $y \in X$ وجود داشته باشند به طوری که به ازای هر $x \in E$، $d(x, y) < M$.

۷- مجموعه $E \cup E'$ را بست E نامیده و با $\bar{E}$ (یا clE) نشان می‌دهیم.

۸- مجموعه E در X چگال است، هرگاه $\bar{E} = X$.

۹- فضای متریک (X, d) تفکیک‌پذیر است هرگاه شامل یک زیرمجموعه چگال شمارا باشد.

منظور از یک پوشش باز مجموعه E در فضای متری X، یعنی گردایه‌ای از زیرمجموعه‌های باز X مانند $\{G_\alpha\}$ که $E \subset \bigcup_\alpha G_\alpha$ باشد. زیرمجموعه E از فضای متری X را فشرده نامند، هرگاه هر پوشش باز E حاوی زیر پوشش متناهی باشد.

تعریف ۱-۱-۳: زیر مجموعه $E \subset \mathcal{R}^n$ را محدب نامیم اگر برای هر $x, y \in E$ و $0 \leq \lambda \leq 1$ داشته باشیم

$$\lambda x + (1 - \lambda) y \in E.$$

دنباله $\{x_n\}$ در X کوشی نامیده می‌شود اگر به ازای هر $\varepsilon > 0$ عددی صحیحی چون N وجود داشته باشد به طوری که برای هر $n \geq N$ و $m \geq N$، در نامساوی $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ صدق کند.

تعریف ۱-۱-٤: دنباله $\{f_n\}$ در X همگرای نقطه به نقطه به f است، اگر به ازای هر $\varepsilon > 0$ و هر $x \in X$ عددی طبیعی N، وابسته به ε و x وجود داشته باشد به طوری که برای هر $n \geq N$ در نامساوی $d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon$ صدق کند. دنباله $\{f_n\}$ بطور یکنواخت همگراست، اگر N در تعریف فوق، مستقل از ε و x باشد.

تعریف ۱-۱-۵: زیرمجموعه E در X کامل نامیده می‌شود، اگر هر دنباله کوشی در E همگرا و حد آن در E باشد.

لم ۱-۱-٦: فرض کنید $\{f_n\}$ دنباله‌ای از توابع یکنوا بر بازه $[0,1]$ باشند. اگر $f_n(x)$ به تابع پیوسته $f(x)$ بر بازه $[0,1]$ نقطه به نقطه همگرا باشد، آنگاه $f_n(x)$ به $f(x)$ بطور یکنواخت همگراست.

اثبات را می توانید در اختر [1] ملاحظه نمایید.

اگر $\{A_n\}$ دنباله‌ای صعودی باشد (برای $1 \le n < \infty$، $A_n \subset A_{n+1}$)، آنگاه $\lim_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ و اگر $\{A_n\}$ دنباله‌ای نزولی باشد (برای $1 \le n < \infty$، $A_n \supset A_{n+1}$)، آنگاه $\lim_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ می‌باشد. دنباله $\{A_n\}$ را یکنوا نامیم اگر صعودی یا نزولی باشد.

فرض کنید A زیرمجموعه‌ای از $\mathcal{R}$ باشد در اینصورت کوچکترین کران بالا و بزرگترین کران پایین A را با $sup\ A$ و $inf\ A$ نمایش می‌دهیم.

برای دنباله $\{x_n\}$ از $\mathcal{R}$، $lim\ sup$ و $lim\ inf$ بصورت زیر تعریف می‌شوند

$$\lim\sup x_n = \inf_{k\ge1} \sup_{n\ge k} x_n, \qquad \lim\inf x_n = \sup_{k\ge1} \inf_{n\ge k} x_n.$$

تعریف ۱-۱-۷: فرض کنید (X,d_X) و (Y,d_Y) دو فضای متری باشند، نگاشت $f: X \longrightarrow Y$ در $x \in X$ پیوسته نامیده می‌شود، اگر برای هر $\varepsilon > 0$ عدد $\delta > 0$ وجود داشته باشد به طوری که

$$d_X(x,y) < \delta \implies d_Y\big(f(x), f(y)\big) < \varepsilon.$$

نگاشت f را پیوسته گوییم، اگر در هر عنصر $x \in X$ پیوسته باشد. علاوه براین، اگر δ در تعریف پیوستگی مستقل از x باشد، نگاشت f پیوسته یکنواخت نامیده می‌شود.

قضیه ۱-۱-۸ [6]**:** متر $d: X \times X \longrightarrow [0,\infty)$ یک تابع پیوسته می‌باشد.

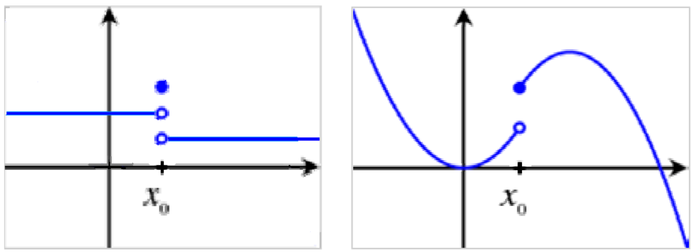
تعریف ۱-۱-۹: فرض کنید $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ دو دنباله از اعداد حقیقی باشند. نماد $a_n \ll b_n$ بدین معناست که ثابت $c > 0$ وجود داشته باشد به قسمی که برای مقادیر به اندازه کافی بزرگ n، $a_n \le cb_n$ باشد.

هرچند توابع پیوسته بسیار مفید می‌باشند، با این وجود رده بسیار بزرگی از توابع هستند که در یک یا تعدادی نقاط ناپیوسته هستند. توابع ناپیوسته در یک نقطه را می‌توان به دو دسته تقسیم کرد، توابعی که

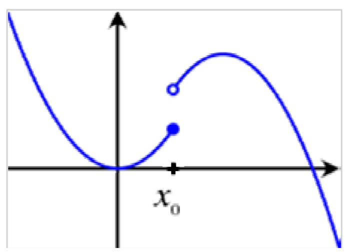
ناپیوستگی آنها رفع شدنی است و توابعی که ناپیوستگی آنها رفع نشدنی است. برای بررسی بیشتر توابع نوع دوم مفاهیم نیم‌پیوسته بالایی و پایینی را ارائه می‌دهیم.

تعریف ۱-۱-۱۰: تابع $f: X \longrightarrow \mathcal{R}$ نیم‌پیوسته بالایی است، اگر برای هر $a \in \mathcal{R}$، مجموعه $\{x \in X: f(x) < a\}$ در X باز باشد. تابع نیم‌پیوسته پایینی بطور مشابه تعریف می‌شود.

به عنوان مثال شکل ۱ نمونه‌ای از توابع نیم‌پیوسته بالایی و شکل ۲ نمونه‌ای از توابع نیم‌پیوسته پایینی می‌باشد.



شکل ۱: توابع نیم‌پیوسته پایینی



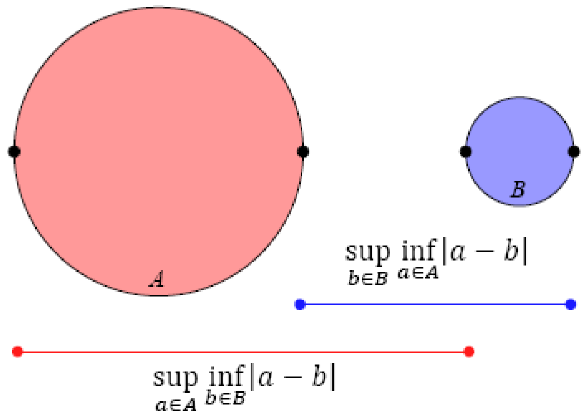
شکل ۲: تابع نیم‌پیوسته پایینی

متر هاسدروف که متعاقباً تعریف آن را ارائه و بعضی از ویژگی‌های آن را مورد مطالعه قرار می‌دهیم، از جمله مترهایی است که به اندازه‌گیری فاصله بین دو مجموعه می‌پردازد.

تعریف ۱-۱-۱۱: فرض کنید $\mathcal{K}(\mathcal{R}^n)$ خانواده همه زیر مجموعه‌های ناتهی فشرده از فضای اقلیدسی $\mathcal{R}^n$ باشد. آنگاه متر هاسدروف d_H در فضای $\mathcal{K}(\mathcal{R}^n)$ به صورت زیر تعریف می گردد:

$$d_H(A,B) = max\left\{\sup_{a\in A}\inf_{b\in B}|a-b|, \sup_{b\in B}\inf_{a\in A}|a-b|\right\}$$

که $|.|$ نرم اقلیدسی معمول در $\mathcal{R}^n$ است (شکل ۳).



شکل ۳: نمایش هندسی متر هاسدورف

اگر مجموعه‌های A و B به صورت بازه‌های $A=[x,y]$ و $B=[z,w]$ باشند، آنگاه متر هاسدروف به صورت زیر ساده می‌شود:

$$d_H(A,B)=max\{|x-z|,|y-w|\}.$$

برای اثبات متر بودن متر هاسدروف بارنسلی [4] را ملاحظه کنید.

نرم مجموعه $A\in\mathcal{K}(\mathcal{R}^n)$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\|A\|=d_H(A,\{0\})=\sup_{a\in A}|a|.$$

تعریف ۱–۱–۱۲: فرض کنید $A,B\in\mathcal{K}(\mathcal{R}^n)$ و $\lambda\in\mathcal{R}$. جمع مینکوفسکی و ضرب اسکالر در $\mathcal{K}(\mathcal{R}^n)$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\lambda A=\{\lambda a : a\in A\},\qquad A+B=\{a+b : a\in A, b\in B\}.$$

قضیه ۱–۱–۱۳ [6]**:** $(\mathcal{K}(\mathcal{R}^n),d_{\mathrm{H}})$ فضای متری تفکیک‌پذیر و کامل می‌باشد.

در انتهای این بخش تعریف تابع به طور آهسته تغییرپذیر را بیان می‌کنیم.

تعریف ۱–۱–۱٤: تابع $L:(0,\infty)\to(0,\infty)$ را به طور آهسته تغییرپذیر گوییم، اگر برای هر $a>0$،

$$\lim_{x\to\infty}\frac{L(ax)}{L(x)}=1.$$

۱-۲ برخی از نکات و مفاهیم اساسی احتمال:

همانگونه که مطلع می‌باشید هر کدام از تعاریف اول و دوم احتمال، تعریف احتمال برای پیشامدهای همشانس و تعریف احتمال بعنوان حد فراوانی نسبی، دارای اشکالات منطقی می‌باشند. این موضوع سبب شد تا کلموگروف، احتمال را به شیوه اصل موضوع تعریف نماید. برای این منظور لازم است ابتدا پیشامدها را بشکل ساده تری معرفی کنیم.

تعریف ۱-۲-۱: کلاس غیر تهی $\mathcal{A}$ از زیر مجموعه‌های Ω، که تحت اعمال مکمل و اشتراک متناهی بسته باشند را میدان می‌گوییم. میدان $\mathcal{A}$ که تحت عمل اشتراک شمارا بسته باشد، را یک سیگما میدان نامیم.

تعریف ۱-۲-۲: فرض کنید $\mathcal{A}_\alpha$، $\alpha \in A$ (A هر مجموعه اندیس دار دلخواه باشد) خانواده‌ای از سیگما میدان‌های شامل $\mathcal{C}$ ($\mathcal{C}$ کلاسی غیر تهی از زیرمجموعه‌های Ω است) باشند. در اینصورت $\bigcap_{\alpha\in A}\mathcal{A}_\alpha$ را سیگما میدان مینیمال شامل $\mathcal{C}$ گویند و با $\sigma(\mathcal{C})$ نمایش می‌دهند. سیگما میدان مینیمال شامل تمام بازه‌های به شکل (a,b)، $a < b$ و $a,b \in \mathcal{R}$ را به $\mathcal{B}$ نمایش و آن را میدان بورل نامیم.

در صورتی که Ω، فضای نمونه آزمایش تصادفی و $\mathcal{A}$ یک سیگما میدان از عناصر Ω باشد، هر عضو $\mathcal{A}$ را یک پیشامد و $\mathcal{A}$ را فضای پیشامدها می نامند.

تعریف ۱-۲-۳: تابع $\mathcal{P}: \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{R}$ که در اصول موضوعه زیر صدق کند، را یک اندازه (تابع) احتمال نامیم.

۱- برای هر $E \in \mathcal{A}$، $\mathcal{P}(E) \geq 0$.

۲- اگر $\{E_j\}$ دنباله دو به دو مجزا $(\forall i \neq j : E_i \cap E_j = \emptyset)$ در $\mathcal{A}$ باشند، آنگاه $\mathcal{P}(\bigcup_j E_j) = \sum_j \mathcal{P}(E_j)$.

۳- $\mathcal{P}(\Omega) = 1$.

سه تایی $(\Omega,\mathcal{A},\mathcal{P})$ را فضای احتمال یا مدل احتمال و $(\Omega,\mathcal{A})$ را فضای اندازه‌پذیر نامیم. اصل پیوستگی یک ویژگی جالب برای اندازه $\mathcal{P}$ می باشد. بر طبق این اصل اگر $\{E_j\}$ دنباله‌ای از پیشامدهای یکنوا باشد، آنگاه $lim_{j\to\infty}\mathcal{P}(E_j)=\mathcal{P}\left(\underset{j\to\infty}{lim}E_j\right)$.

تعریف ۱-۲-۴: تابع $X:\Omega\longrightarrow\mathcal{R}^n$ را یک متغیر تصادفی گوییم، اگر اندازه‌پذیر باشد، یعنی:

$$\forall B\in\mathcal{B}: X^{-1}(B)=\{\omega\in\Omega: X(\omega)\in B\}\in\mathcal{A}.$$

فرض کنید F تابع توزیع متغیرتصادفی X باشد، امید ریاضی متغیر تصادفی X را با $E(X)$ نمایش داده و با $E(X)=\int_{-\infty}^{\infty}xdF(x)$، در صورت وجود تعریف می‌شود. همچنین متغیر تصادفی X را انتگرال‌پذیر گوییم اگر $E|X|<\infty$ باشد.

(X,Y) را بردار تصادفی گوییم، اگر X و Y متغیرهای تصادفی باشند. همچنین میدان سیگمای تولید شده توسط بردار تصادفی $Z=(X,Y)$ را با $\sigma(Z)$ نشان داده و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\sigma(Z)=\sigma\big\{\{\omega\in\Omega: Z(\omega)\le x\}, x\in\mathcal{R}^2\big\}.$$

میدان سیگمای تولید شده توسط $\{Z_\lambda,\lambda\in\Lambda\}$ نیز بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$\sigma\{Z_\lambda,\lambda\in\Lambda\}=\sigma\left\{\bigcup_{\lambda\in\Lambda}\sigma(Z_\lambda)\right\}.$$

تعریف ۱-۲-۵: دنباله متغیرهای تصادفی $\{X_n\}$ را بطور یکنواخت انتگرال‌پذیر گوییم، اگر

$$\forall n:\ \underset{a\to\infty}{lim}E|X_n|\,I_{\{|X_n|>a\}}=0.$$

قضیه ۱-۲-۶ [12]**:** متغیرهای تصادفی $\{X_n,n\ge 1\}$ بطور یکنواخت انتگرال‌پذیر هستند، اگر و تنها اگر روابط زیر بر قرار باشند:

۱- $sup_{n\ge1}E|X_n|<\infty$.

۲- برای هر $\varepsilon>0$، $\delta>0$ وجود دارد به طوری که برای هر مجموعه A،

$$\mathcal{P}(A)<\delta\Longrightarrow\forall n: E|X_n|I_{\{X_n\notin A\}}<\varepsilon.$$

در تئوری احتمال چندین مفهوم همگرایی وجود دارد که در ادامه چهار مورد از آنها را بیان می-کنیم. فرض کنید $\{X_n, n \geq 1\}$ دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی باشند.

تعریف ۱-۲-۷: X_n همگرا در احتمال به متغیر تصادفی X ($X_n \xrightarrow{p} X$) گوییم، اگر برای هر $\varepsilon > 0$،

$$\mathcal{P}(|X_n - X| > \varepsilon) \longrightarrow 0.$$

تعریف ۱-۲-۸: X_n همگرای $a.s.$ به متغیر تصادفی X ($X_n \xrightarrow{a.s.} X$) گوییم اگر

$$\mathcal{P}(\{\omega : X_n(\omega) \longrightarrow X(\omega)\}) = 1.$$

تعریف ۱-۲-۹: X_n همگرای کامل به متغیر تصادفی X ($X_n \xrightarrow{c.c.} X$) گوییم اگر برای هر $\varepsilon > 0$،

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{P}(|X_n - X| > \varepsilon) < \infty.$$

قضیه ۱-۲-۱۰ [12]**:** فرض کنید X و $\{X_n, n \geq 1\}$ متغیرهای تصادفی باشند. آنگاه

$$X_n \xrightarrow{c.c.} X \Rightarrow X_n \xrightarrow{a.s.} X \Rightarrow X_n \xrightarrow{p} X.$$

قضیه ۱-۲-۱۱ (قضیه همگرایی مغلوب) [5]**:** فرض کنید که برای هر n، $|X_n| < Y$ باشد و همچنین $E|Y|$ متناهی و $X_n \xrightarrow{a.s.} X$ باشد آنگاه

$$EX_n \longrightarrow EX.$$

تعریف ۱-۲-۱۲: X_n را همگرا در r-میانگین به متغیر تصادفی X ($X_n \xrightarrow{r} X$) گوییم اگر

$$E|X_n - X|^r \to 0.$$

قضیه ۱-۲-۱۳ [12]**:** فرض کنید X و $\{X_n, n \geq 1\}$ متغیرهای تصادفی باشند به قسمی که $X_n \xrightarrow{p} X$ باشد در اینصورت برای $r > 0$ رابطه‌های زیر هم ارزند:

الف) $\{|X_n|^r, n \geq 1\}$ بطور یکنواخت انتگرال‌پذیر باشند.

ب) $X_n \xrightarrow{r} X$.

ج) $E|X_n|^r \to E|X|^r$.

تعریف ۱-۲-۱۴: دنباله بردارهای تصادفی دو بعدی $\{X_n, n \geq 1\} = \{(X_n^1, X_n^2), n \geq 1\}$ را وابسته منفی (ND) گوییم، اگر برای هر زیردنباله متناهی $\left\{X_{n_j}\ j = 1, \dots, k\right\}$ از $\{X_n\}$ و بردارهای $x_j = \left(x_j^1, x_j^2\right)$، $j > 0$ داشته باشیم

$$\mathcal{P}\left[\bigcap_{j=1}^{k}\left(X_{n_j} \leq x_j\right)\right] \leq \prod_{j=1}^{n}\mathcal{P}\left[X_{n_j} \leq x_j\right], \mathcal{P}\left[\bigcap_{j=1}^{k}\left(X_{n_j} > x_j\right)\right] \leq \prod_{j=1}^{n}\mathcal{P}\left[X_{n_j} > x_j\right].$$

تعریف ۱-۲-۱۵: دنباله بردارهای تصادفی $\{X_n, n \geq 1\} = \{(X_n^1, X_n^2), n \geq 1\}$ را وابسته مثبت (PD) گوییم، اگر برای هر زیردنباله متناهی $\left\{X_{n_j}\ j = 1, \dots, k\right\}$ از $\{X_n\}$ و بردارهای $x_j = \left(x_j^1, x_j^2\right)$، $j > 0$ داشته باشیم

$$\mathcal{P}\left[\bigcap_{j=1}^{k}\left(X_{n_j} \leq x_j\right)\right] \geq \prod_{j=1}^{n}\mathcal{P}\left[X_{n_j} \leq x_j\right], \mathcal{P}\left[\bigcap_{j=1}^{k}\left(X_{n_j} > x_j\right)\right] \geq \prod_{j=1}^{n}\mathcal{P}\left[X_{n_j} > x_j\right].$$

تعریف ۱-۲-۱۶: دنباله بردارهای تصادفی $\{X_n\}$ را مستقل گوییم اگر وابسته منفی و مثبت باشد.

دنباله بردارهای تصادفی $m > 2$ بعدی وابسته منفی، وابسته مثبت و مستقل به طور مشابه تعریف می‌شوند.

لم ۱-۲-۱۷ (لم فاتو) [5]**:** اگر $X_n \geq 0\ a.s.$ باشد آنگاه

$$E \liminf_{n\to\infty} X_n \leq \liminf_{n\to\infty} EX_n.$$

بررسی رفتار حدی آماره‌هایی از دنباله متغیرهای تصادفی از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. قضیه مشهور حد مرکزی یکی از قضایای مهمی است که رفتار حدی برخی از این‌گونه آماره‌ها را توصیف می‌کند. در اینجا دو نوع دیگر از رفتارهای حدی که به ق.ا.ب مشهورند را مورد کنکاش قرار می‌دهیم. قبل از آن به بیان لم کرونکر که در اثبات قوانین فوق بسیار مفید است می‌پردازیم.

لم ۱-۲-۱۸[5]**:** فرض کنید $\{x_n, n \geq 1\}$ دنباله‌ای از اعداد حقیقی و $\{a_n, n \geq 1\}$ دنباله‌ای از مقادیر نامنفی باشند، به قسمی که $lim_{n\to\infty} a_n = \infty$، اگر $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x_n}{a_n}$ همگرا باشد، آنگاه $\frac{1}{a_n}\sum_{j=1}^{n} x_j \to 0$.