به نام خدایی که همواره

حامی من است ...

۱۰۷۷۴۷

دانشگاه شهید بهشتی

دانشکده علوم ریاضی

گروه آمار

پایان‌نامه کارشناسی ارشد آماربیمه

مدل مخاطرهٔ پواسون مرکب تحت استراتژی آستانه‌ای برای پرداخت سود

نگارنده

راحله نوری

استاد راهنما

دکتر حمیده داریوش همدانی

استاد مشاور

دکتر محمدقاسم وحیدی اصل

تیر ۱۳۸۷

تقدیم به پدر و مادرم

و

آنان که دوستشان دارم

قدردانی

با تشکر و سپاس فراوان از استاد گرامی سرکار خانم دکتر حمیده همدانی که با راهنمایی‌های ارزندهٔ خویش مرا در تدوین این پایان‌نامه یاری نموده‌اند. همین‌طور جناب آقای دکتر وحیدی‌اصل که استاد مشاور اینجانب بوده‌اند و از آقایان دکتر خزایی و دکتر فرید روحانی نیز به سبب حضور در جمع داوران سپاس‌گزارم.

در پایان از همه کسانی که در این راه مرا یاری نمودند قدردانی می‌کنم.

راحله‌نوری

تهران — تیر ۱۳۸۷

پیشگفتار

یک شرکت بیمه را در نظر بگیرید که با سرمایهٔ اولیهٔ خود شروع به‌کار می‌کند. پس این شرکت به‌عنوان یک بیمه‌گر، با دریافت حق بیمه از بیمه‌گذار متعهد به پرداخت خسارت‌های احتمالی او می‌شود که ممکن است در آینده رخ دهد. اما از آن‌جا که وقوع خسارت با احتمال مواجه است و مربوط به زمان آینده می‌باشد، فاصلهٔ زمانی قابل ملاحظه‌ای بین دریافت حق بیمه و پرداخت خسارت وجود دارد. پس طی این مدت بیمه‌گر می‌تواند با دریافت حق بیمه به سرمایه‌گذاری بپردازد و به سهام‌داران شرکت یا بیمه‌گذاران سود پرداخت کند. از طرف دیگر، کنترل این سرمایه، حفظ یا افزایش آن از مسائل مهم و حساس برای بیمه‌گران محسوب می‌شود. لذا داشتن یک استراتژی یا سیاست خاص برای کنترل، سوددهی و در نهایت جلوگیری از ورشکستگی از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. به‌همین منظور ما نیز در این رساله، به یکی از این استراتژی‌ها به‌نام استراتژی آستانه‌ای می‌پردازیم.

استراتژی آستانه‌ای برای پرداخت سود، در واقع شیوه‌ای است که در آن بیمه‌گر با توجه به وضعیت سرمایهٔ خود نسبت به آستانهٔ مفروض، قادر به پرداخت سود به سهام‌داران است به طوری‌که نرخ پرداخت این سود از نرخ حق بیمهٔ دریافتی از بیمه‌گذار کمتر خواهد بود. این استراتژی اولین بار توسط دفینتّی در سال ۱۹۵۷ برای مدل‌های مخاطرهٔ بیمه مطرح گردید که در این میان مدل مخاطرهٔ پواسون مرکب و مسائل مربوط به آن، نسبت به سایر مدل های مخاطرهٔ بیمه‌ای بیشتر مورد توجه و مطالعه قرار گرفته است. در این راستا ما نیز با استفاده از این استراتژی برای سرمایهٔ بیمه‌گر، تحت مدل پواسون مرکب و تابع جریمهٔ تنزیل یافتهٔ گربر- شیو می‌توانیم زمان و احتمال ورشکستگی او را پیش بینی و مدیریت نماییم. در واقع تحت مدل پواسون مرکب، حالت‌های مختلف تابع جریمهٔ تنزیل یافتهٔ گربر-

شیو را برای سرمایهٔ بیمه‌گر به‌دست می‌آوریم و از نتایج آن برای محاسبهٔ احتمال و زمان ورشکستگی، تابع‌های توزیع توأم و حاشیه‌ای سرمایهٔ بیمه‌گر درست قبل از ورشکستگی و کسری سرمایهٔ او در لحظهٔ ورشکستگی و همچنین گشتاورهای آن‌ها استفاده می‌کنیم.

این رساله شامل ۵ فصل است که در آن به موضوع‌های زیر می‌پردازیم.

در فصل اول به بیان مفاهیم و تعاریفی که در بخش‌های بعد مورد استفاده قرار خواهند گرفت، می‌پردازیم. از مهمترین این مطالب، تعریف عملگر انتقال و خواص آن و مدل مخاطرهٔ پواسون مرکب است، زیرا در این رساله استراتژی آستانه‌ای مورد نظر را روی مدل مخاطرهٔ پواسون مرکب به‌کار می‌بریم.

در فصل دوم نظریهٔ استراتژی مرزی و انواع آن را بررسی می‌کنیم و نشان می‌دهیم که مدل آستانه‌ای حالت خاصی از این استراتژی است. در ادامهٔ این فصل تابع جریمهٔ تنزیل یافتهٔ گربر- شیو را مطرح می‌کنیم تا ارتباط آن با استراتژی مرزی مشخص شود. همچنین با استفاده از قضیه‌هایی که در انتهای این فصل می‌آوریم، حالت‌های مختلف تابع جریمهٔ تنزیل یافتهٔ گربر- شیو را برمی‌شماریم تا با توجه به آن‌ها بتوانیم به اهداف مورد نظر دست یابیم.

در فصل سوم قضیه‌های تابع جریمهٔ تنزیل یافتهٔ گربر~~-شیو را مطرح~~ و آن‌ها را از طریق معادلات دیفرانسیل - انتگرال، معادلهٔ اساسی لاندبرگ و تبدیل لاپلاس اثبات می‌نماییم. این قضیه‌ها برای حالت‌های مختلف آستانه، نسبت به سرمایهٔ اولیهٔ بیمه‌گر اثبات می‌شوند.

در فصل چهارم با استفاده از قضیه‌هایی که در فصل سوم مطرح شد، احتمال ورشکستگی و زمان آن را برای مدل مخاطرهٔ پواسون مرکب تحت استراتژی آستانه‌ای محاسبه می‌کنیم. در این میان، دو مثال برای وقتی‌که مقادیر ادعا دارای توزیع نمایی یا نمایی آمیخته هستند مطرح خواهد شد.

سرانجام در فصل پنجم، مانند آن‌چه که در فصل چهارم انجام می‌شود، تابع‌های توزیع و گشتاورهای مربوطه را برای مازاد بیمه‌گر درست قبل از ورشکستگی و کسری مازاد (سرمایه) او در لحظهٔ ورشکستگی به‌دست می‌آوریم. در انتها نیز از شیوهٔ ارایه شده در این مقاله یک نتیجهٔ کلی خواهیم گرفت. شایان ذکر است در نوشتن و گردآوری مطالب این رساله از گربر و شیو (۱۹۹۸)، لین و

همکاران (۲۰۰۳)، لین و ولیلمات (۱۹۹۹) و لین و پالوا(۲۰۰۶) به‌عنوان مراجع اصلی استفاده شده است.

مدل مخاطرهٔ پواسون مرکب تحت استراتژی آستانه‌ای برای پرداخت سود

چکیده

در این رساله، مدل مخاطرهٔ پواسون مرکب را تحت یک نوع استراتژی خاص که به آن استراتژی آستانه‌ای می‌گویند، مورد مطالعه قرار می‌دهیم. تحت این استراتژی، اگر سرمایهٔ بیمه‌گر زیر سطح آستانهٔ مورد نظر قرار بگیرد، سودی به سهامداران شرکت بیمه و یا حتی بیمه‌گذاران پرداخت نخواهد شد. اما زمانی که سرمایهٔ بیمه‌گر به بالای سطح مفروض برسد، سودها با نرخی که از نرخ حق بیمهٔ دریافتی کمتر است به سهامداران پرداخت می‌شود. با اعمال این سیاست روی تابع جریمهٔ تنزیل یافتهٔ گربر- شیو، به نتایج مهمی دست می‌یابیم که برای رسیدن به احتمال ورشکستگی، زمان ورشکستگی، توزیع اولین افت سرمایه به زیر سطح اولیه و تابع‌های توزیع و گشتاورهای مازاد درست قبل از ورشکستگی و کسری سرمایهٔ بیمه‌گر در لحظهٔ ورشکستگی مورد استفاده قرار می‌گیرند. همچنین حالت خاصی که در آن، اندازهٔ ادعاها دارای توزیع نمایی و نمایی آمیخته باشند، مورد بررسی قرار خواهد گرفت.

واژه‌های کلیدی : مدل مخاطرهٔ پواسون مرکب، کسری سرمایه در ورشکستگی، تابع جریمهٔ تنزیل یافتهٔ گربر- شیو، مازاد درست قبل از ورشکستگی، زمان ورشکستگی، استراتژی آستانه‌ای، حق بیمهٔ دو مرحله‌ای.

فهرست مندرجات

فصل ۱

تعریف‌ها و مفهوم‌های اولیه

دراین فصل به معرفی و بیان مفهوم‌هایی که در فصل‌های بعدی مورد استفاده قرار می‌گیرند می‌پردازیم.

۱.۱ مدل مخاطرهٔ پواسون مرکب کلاسیک

۱.۱.۱ فرایند پواسون مرکب

فرض می‌کنیم فرایند تصادفی $\{N(t), t \geq 0\}$ طبق تعریف کار (۱۹۹۳)، یک فرایند شمارنده است که نشان‌دهندهٔ تعداد پیشامدهایی است که در بازهٔ زمانی $[0, t)$ رخ می‌دهد، مانند تعداد ادعاهای خسارت که به یک شرکت بیمه وارد می‌شود. پس این فرایند را یک **فرایند پواسون** با شدت $\lambda > 0$ گوییم، هرگاه

- $N(0) = 0$، به‌عبارت دیگر فرایند از صفر شروع شود.
- برای هر $0 < h_1 < h_2 < \cdots < h_n$، نموهای N_{h_1}، $N_{h_2} - N_{h_1}$، $\cdots$، $N_{h_n} - N_{h_{n-1}}$ متغیرهای تصادفی مستقل از هم باشند. یعنی در هر بازهٔ زمانی مجزا از هم، تعداد پیشامدهای رخ‌داده مستقل از هم باشند.

• تعداد پیشامدهای رخ‌داده در هر بازهٔ زمانی به طول t دارای توزیع پواسون با میانگین λt باشد، یعنی برای هر $t, s \geq ۰$،

$$P\{N(t+s)-N(s)=n\}=\frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^n}{n!}, \qquad n=۰,۱,۲,\cdots.$$

خاصیت اخیر به معنی مانا بودن نموهای فرایند پواسون است. یعنی برای ثابت t، توزیع $N(t+s)-N(s)$ به s بستگی ندارد. ملاحظه می‌شود که فرایند پواسون مقادیر خود را در مجموعهٔ $\{۰,۱,۲,\cdots\}$ اتخاذ می‌کند. پس فرایند پواسون یک فرایند زمان پیوسته با مقادیر گسسته است. از طرف دیگر می‌توان با استفاده از بسط تیلور $e^{-\lambda t}$ در نزدیکی صفر نشان داد که

$$P[N(t)=۱]=\lambda t+o(t)\simeq \lambda t,$$

و

$$P[N(t)\geq ۲]=o(t)\simeq ۰.$$

در عبارت فوق، $o(t)$ نشان‌دهندهٔ جملات مرتبهٔ دوم به بالا در بسط $e^{-\lambda t}$ است که طبق تعریف راس(۱۹۸۹)، وقتی t به سمت صفر میل می‌کند، قابل اغماض هستند. دو رابطهٔ اخیر نیز از جمله ویژگی‌های یک فرایند پواسون به‌شمار می‌آید.

همچنین متغیرهای تصادفی زمان‌های بین رخداد پیشامدها یعنی t_n، $n=۱,۲,\cdots$ مستقل از هم و هم‌توزیع با توزیع نمایی با میانگین $\frac{۱}{\lambda}$ هستند. در واقع t_n نشان‌دهندهٔ زمان بین $(n-۱)$امین پیشامد و nامین پیشامد است. همچنین در فرایند پواسون، زمان ورود nامین پیشامد به‌صورت $n\geq ۱$، $S_n=\sum_{i=۱}^{n} t_i$ تعریف می‌شود که به آن زمان انتظار تا رخداد n امین پیشامد نیز می‌گویند. بنابراین از S_n مشخص است که n امین پیشامد تا قبل از زمان t یا در لحظهٔ t رخ می‌دهد اگر و فقط اگر تعداد پیشامدهای تا زمان t حداقل برابر با n باشد، به عبارت دیگر $N(t)\geq n$ اگر و فقط اگر $S_n\leq t$. برای مطالعهٔ بیشتر می‌توان به راس(۱۹۸۹) در مراجعه نمود.

حالا با استفاده از فرایند پواسون، به معرفی فرایند پواسون مرکب می‌پردازیم. اگر فرایند شمارندهٔ $\{N(t), t \geq 0\}$، یک فرایند پواسون و $\{Y_n, n \geq 0\}$ خانواده‌ای از متغیرهای تصادفی مستقل و هم‌توزیع باشد که از فرایند $\{N(t), t \geq 0\}$ نیز مستقل است، آن‌گاه به $\{S(t), t \geq 0\}$ به‌صورت

$$S(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i, \qquad t \geq 0$$

فرایند پواسون مرکب می‌گویند. در این حالت برای یک t ثابت مانند $t = t_0$، $S(t_0)$ دارای توزیع پواسون مرکب با پارامتر λt_0 خواهد بود (کاس و همکاران(۲۰۰۲)).

۲.۱.۱ فرایند مازاد

حالا که با فرایند پواسون مرکب آشنا شدیم، در ادامه مدل مخاطرهٔ پواسون مرکب را معرفی می‌کنیم که در واقع ارتباط بین این مدل با فرایند پواسون مرکب از طریق مفهوم مدل مخاطرهٔ جمعی مشخص می‌شود. پس در ابتدا از کاس و همکاران (۲۰۰۲) ، مدل‌های مخاطرهٔ فردی و جمعی را بیان می‌کنیم.

مدل مخاطرهٔ فردی از مجموع مقادیر ادعاهای وارده به n قرارداد ثابت بیمه‌ای به‌دست می‌آید که آن‌را با S نشان می‌دهیم. پس

$$S = Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n.$$

متغیرهای تصادفی مستقل از هم $i = 1, 2, \cdots, n$، Y_i نشان‌دهندهٔ پرداخت خسارت روی i امین قرارداد هستند.

حالا فرض کنیم $i = 1, 2, \cdots, N$، Y_i متغیرهای تصادفی مستقل و هم‌توزیع هستند که در آن متغیر تصادفی N نشان‌دهندهٔ تعداد ادعای وارده در بازهٔ زمانی $[0, t]$ است. پس در این حالت با مدل مخاطرهٔ جمعی روبرو هستیم که به‌صورت

$$S(t) = Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_N,$$

تعریف می‌شود و به $S(t)$ مقدار ادعای انباشته شده تا لحظهٔ t می‌گویند. در این مدل توزیع Y_i ها مستقل از توزیع N است.

حالا از میان دو مدل مخاطره‌ای که در بالا مطرح شد، مدل مخاطرهٔ جمعی را برای رسیدن به تعریف فرایند مازاد انتخاب نموده و می‌نویسیم:

$$U(t) = u + ct - \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i, \qquad t \geq 0,$$

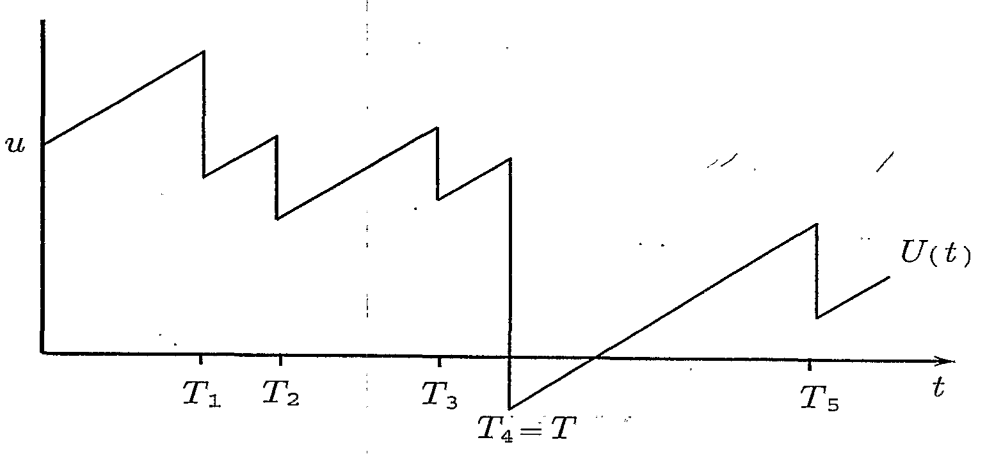
به $U(t)$ سرمایهٔ بیمه‌گر در لحظهٔ t و به $\{U(t), t \geq 0\}$ **فرایند مازاد یا فرایند مخاطره می‌گوییم.** همچنین $u = U(0)$ سرمایهٔ اولیه بیمه‌گر، c درآمد حق بیمه برای هر واحد از زمان و $\{N(t), t \geq 0\}$ فرایند شمارندهٔ تعداد ادعا است. مقادیر ادعاهای فردی $Y_i > 0$ مستقل و هم‌توزیع با $F_Y(y) = P(Y \leq y)$، دارای تابع چگالی احتمال $f_Y(y)$ و $E(Y_i) = \mu_1 > 0$ هستند که از $N(t)$ نیز مستقل می‌باشند.

از سوی دیگر، $\sum_{i=1}^{N(t)} Y_i$ در تعریف مدل مخاطرهٔ جمعی را با $S(t)$ نشان می‌دهیم که در واقع همان مقدار ادعای انباشته شده تا لحظهٔ t است. پس $S(t) = 0$ اگر $N(t) = 0$. حالا اگر فرایند شمارندهٔ $N(t)$ دارای توزیع پواسون با شدت λt باشد، پس طبق تعریف $\{S(t), t \geq 0\}$ یک فرایند پواسون مرکب است. بنابراین به $U(t)$ مدل **مخاطرهٔ پواسون مرکب** می‌گویند.

حالا برای آشنایی بیشتر با این مدل، یک مسیر ~~نمونه‌ای از فرایند~~ مخاطره در شکل ۱.۱ نشان داده شده است.

متغیرهای تصادفی $T_1, T_2, \cdots$ نقاطی از زمان هستند که در آن‌ها یک ادعا رخ می‌دهد و از فرایند مازاد بیمه‌گر می‌کاهد. در واقع T_i، همان زمان ورود i امین پیشامد در فرایند پواسون است که در این‌جا منظور از پیشامد، ادعای وقوع خسارت می‌باشد. همچنین شیب نمودار همواره ثابت و برابر با c است. همان‌طور که در شکل می‌بینیم، اگر یک ادعا رخ دهد، به همان اندازه از مازاد $U(t)$ کم می‌شود که اگر مقدار $U(t)$ از مقدار ادعای وارده کمتر شود، یعنی بیمه‌گر قادر به پرداخت خسارت نیست و در این لحظه ورشکستگی رخ می‌دهد. بنابراین اگر T را اولین زمانی در نظر بگیریم که در آن ورشکستگی رخ می‌دهد خواهیم داشت،

$$T = \begin{cases} \inf\{t \mid t \geq 0, U(t) < 0\}, \\ \infty, \quad \text{اگر} \quad U(t) \geq 0 \quad \forall t. \end{cases}$$



شکل ۱.۱: روند حرکت فرایند مازاد

پس اگر احتمال ورشکستگی را با $\psi(u)$ نشان دهیم، آن‌گاه

$$\psi(u) = P\left[T < \infty\right].$$

به عبارت دیگر احتمال ورشکستگی $\psi(u)$ معادل متناهی بودن T است. اما برای جلوگیری از ورشکستگی به‌طور بدیهی انتظار داریم که نرخ حق بیمه‌های دریافتی c، از زیان یا ادعای وارده بیشتر باشد تا بیمه‌گر بتواند از عهدهٔ تعهدات خود برآید. پس برای این منظور در ادامه به معرفی سربار ایمنی و ضریب تعدیل می‌پردازیم.

۳.۱.۱ سربار ایمنی و ضریب تعدیل لاندبرگ

همان‌طور که می‌دانیم امید ریاضی مجموع ادعاهای $S(t)$ در واحد زمان برابر با $\lambda\mu_1$ است که در واقع از تعریف امید ریاضی مکرر $S(t)$ به روی متغیر تصادفی شمارندهٔ $N(t)$ به‌دست می‌آید (به کاس و همکاران (۲۰۰۲) رجوع شود). لذا به‌طور طبیعی انتظار داریم که متوسط درآمد حق بیمه از متوسط زیان وارده بیشتر باشد تا بیمه‌گر از عدم ورشکستگی اطمینان حاصل کند. پس $c > \lambda\mu_1$ را در نظر

می‌گیریم و برای $\theta > 0$ می‌نویسیم

$$c = (1+\theta)\lambda\mu_1,$$

که در آن μ_1، نشان‌دهندهٔ امید ریاضی مقادیر ادعا است. به $\theta = \frac{c}{\lambda\mu_1} - 1$ در رابطهٔ فوق، **سربار ایمنی** می‌گوییم.

حالا که با سربار ایمنی به‌عنوان عاملی برای اطمینان بیشتر بیمه‌گر جهت جلوگیری از ورشکستگی آشنا شدیم، عامل دیگری به‌نام ضریب تعدیل R را معرفی می‌کنیم که با استفاده از آن می توانیم یک کران بالا برای احتمال ورشکستگی بیمه‌گر به‌دست آوریم. در واقع با محاسبه و قرار دادن این ضریب در قضیهٔ کران نمایی لاندبرگ که به‌صورت

$$\psi(u) \leq e^{-Ru},$$

و توسط کاس و همکاران (۲۰۰۲) به‌دست آمده است، بیمه‌گر می‌تواند به کنترل احتمال ورشکستگی خود بپردازد. اکنون که اهمیت ضریب تعدیل R مشخص شد، در ادامه به روش محاسبهٔ آن می‌پردازیم. طبق کاس و همکاران (۲۰۰۲) ، برای ادعاهای $Y_i \geq 0$ با $E(Y_i) = \mu_1 > 0$ **ضریب تعدیل** R حل مثبت رابطهٔ زیر است:

$$1 + (1+\theta)\mu_1 r = m_Y(r),$$

در این رابطه θ سربارایمنی و $m_Y(r)$، تابع مولد گشتاور متغیر تصادفی Y_i است.

به‌طور کلی رابطهٔ فوق دارای یک جواب مثبت است. همان‌طور که از شکل ۲.۱ پیداست، جواب $r = R$ زمانی اتفاق می‌افتد که دو منحنی $l_1(r) = m_Y(r)$ و $l_2(r) = 1 + (1+\theta)\mu_1 r$ یکدیگر را در یک نقطهٔ مثبت قطع کنند. پس معادلهٔ فوق همواره در بازهٔ $[0, \infty]$ دارای جواب است. زیرا

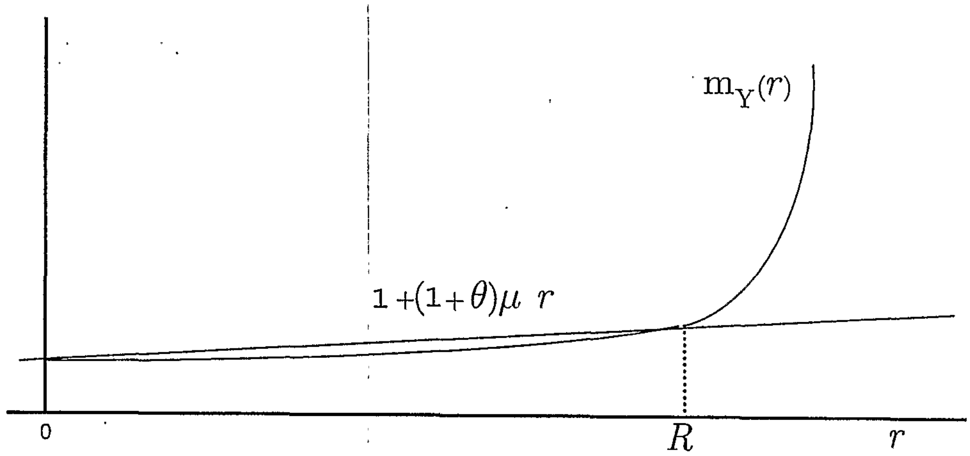
$$m'_Y(r) = E(ye^{ry}) > 0,$$

بنابراین $m_Y(r)$ نسبت به r صعودی اکید است. از طرفی $m''_Y(r) = E(y^2 e^{ry}) > 0$، پس $m_Y(r)$ بر $[0, \infty]$ محدب است و در نتیجه، $m'_Y(r)$ بر $[0, \infty]$ صعودی است. یعنی شیب خط مماس بر خم

$m_Y(r)$ مرتب افزایش می‌یابد و در صفر کمترین است.

$$m'_Y(\circ) = E(Y) = \mu_1 < (1+\theta)\mu_1,$$

پس چون شیب $l_2(r)$ ثابت است، این دو منحنی در یک‌جا یکدیگر را قطع می‌کنند که این همان جواب $r = R$ است و با توجه به قضیهٔ کران نمایی لاندبرگ به آن ضریب تعدیل لاندبرگ می‌گوییم.



شکل ۲.۱: نمایش تقاطع دو منحنی $l_1(r)$ و $l_2(r)$

در نظریهٔ مخاطره، علاوه بر کران نمایی لاندبرگ، معادلهٔ اساسی لاندبرگ نیز یکی از معادله‌های مهم به‌شمار می‌آید. زیرا ریشه‌های این معادله نقش مهمی را در اثبات قضایا و تحلیل توابعی که در مباحث آتی مطرح خواهد شد، ایفا می‌کنند.

۴.۱.۱ معادلهٔ اساسی لاندبرگ

قبل از معرفی معادلهٔ اساسی لاندبرگ، ابتدا نیروی سوددهی را که در معادلهٔ مذکور کاربرد دارد، معرفی می‌نماییم.

از گربر(۱۹۹۷) ، i را نرخ سوددهی سالانه و $i^{(m)}$ را نرخ سوددهی m بار درسال درنظر می‌گیریم

که طبق تعریف دارای ارتباطی به شکل $i^{(m)} = m[(۱+i)^{۱/m} - ۱]$ هستند. حال با میل دادن m به سمت بی‌نهایت می‌نویسیم:

$$\lim_{m\to\infty} i^{(m)} = \lim_{m\to\infty} m[(۱+i)^{۱/m} - ۱] = \lim_{m\to\infty} \frac{(۱+i)^{۱/m} - (۱+i)^{۰}}{۱/m},$$

که این در واقع تعریف مشتق تابع $(۱+i)^x$ در نقطه $x = ۰$ است که در این‌جا $x = ۱/m$. پس اگر مقدار $\lim_{m\to\infty} i^{(m)}$ را با δ نمایش دهیم، آن‌گاه

$$\ln(۱+i) = \delta,$$

که به δ نیروی سوددهی می‌گویند. پس با استفاده از تعریف δ، به $(۱+i)^t = e^{\delta t}$ عامل انباشتگی و به $e^{-\delta t}$، عامل تنزیل می‌گوییم.

اکنون با توجه به اهمیت ریشهٔ معادلهٔ اساسی لاندبرگ در تعیین توابعی که در قسمت‌های بعدی به آن‌ها خواهیم پرداخت، این معادله را به‌صورت زیر تعریف می‌نماییم.

از ویلمات و لین (۲۰۰۱) و با درنظرگرفتن δ به‌عنوان نیروی سوددهی، $\tilde{p}(s) = \int_۰^\infty e^{-sy} dF(y)$ به‌عنوان تبدیل لاپلاس توزیع مقادیر ادعا و دو معادلهٔ $h_۱(s) = \lambda\tilde{p}(s)$ و $h_۲(s) = \lambda + \delta - cs$ که در شکل زیر نشان داده شده‌است، نقطهٔ تقاطع دو منحنی $h_۱(s)$ و $h_۲(s)$ را به‌دست می‌آوریم.

پس اگر $\delta > ۰$، آن‌گاه $h_۲(۰) = \lambda + \delta > \lambda = h_۱(۰)$. از طرف دیگر برای $y > ۰$، $h'_۱(s) < ۰$ و $h''_۱(s) > ۰$، در حالی‌که $h_۲(s)$ یک خط مستقیم نزولی است. بنابراین یک ریشهٔ منحصربه‌فرد و مثبت $\rho = \rho(\delta)$ در بازهٔ $\left(۰, \frac{\lambda+\delta}{c}\right)$ وجود دارد که به ازای آن $h_۱(s) = h_۲(s)$. درنتیجه

$$\lambda\tilde{p}(\rho) = \lambda + \delta - c\rho.$$

حالا اگر $\delta = ۰$، آن‌گاه $h_۲(۰) = h_۱(۰)$ و $h'_۲(۰) = -c > -\lambda E(Y) = h'_۱(۰)$. بنابراین در حالت $\delta = ۰$، $\rho(۰) = ۰$ یک ریشهٔ منحصربه‌فرد نامنفی برای معادله فوق است.

پس درحالت کلی، ρ را ریشهٔ مثبت معادلهٔ زیر که به **معادلهٔ اساسی لاندبرگ** معروف است، قرار می‌دهیم

$$c_i\rho + \lambda\tilde{p}(\rho) - (\lambda+\delta) = ۰, \qquad (۱.۱)$$