



دانشگاه سبزگان

دانشکده علوم - گروه فیزیک

## مطالعه خواص اپتیکی مواد چپگرد

پایان نامه کارشناسی ارشد

هادی شیروی

استاد راهنما : دکتر محمد محمودی

استاد مشاور: دکتر امیرحسین درونه

اسفند ۱۳۸۷

## چکیده

در این پایان‌نامه نخست مفهوم ضریب شکست منفی و علت آن در متامتریال‌ها بررسی شده است. تغییرات ضریب گذردهی الکتریکی برای یک آرایه متشکل از سیم‌های بلند و نازک فلزی و نیز رفتار ضریب تراوایی مغناطیسی برای آرایه‌ای شامل حلقه‌های تو در تو فلزی، مورد بررسی قرار گرفته است. علاوه بر این برای ساختاری متشکل از ترکیب دو آرایه قبلی، تغییرات هم‌زمان این ضرایب نشان داده شده است. همچنین بعضی از خواص و ویژگی‌های منحصر به فرد مواد با ضریب شکست منفی و از آن جمله عدسی کامل بیان گردیده است.

سپس برای اولین بار ماتریس پرتو برای تیغه‌ای از جنس ماده با ضریب شکست منفی معرفی شده و از آن برای بررسی رفتار باریکه گاوسی لیزر استفاده شده است. با به‌کارگیری این ماتریس، مکان دقیق و پهنای باریکه گاوسی خروجی از عدسی کامل محاسبه می‌شود. علاوه بر این پایداری تشدیدگرهایی که حاوی مواد با ضریب شکست منفی هستند با استفاده از این ماتریس، مورد بررسی قرار گرفته است.

## فهرست مندرجات

|    |   |
|----|---|
| ۶  | مقدمه   |
|    | <b>فصل اول</b>  |
| ۹  | <b>مواد با ضریب شکست منفی</b>   |
| ۹  | ۱-۱ ضریب شکست منفی  |
| ۱۰ | ۲-۱ چرا $n$ منفی می‌شود؟  |
| ۱۱ | ۳-۱ منفی شدن ضریب شکست منفی یا معکوس شدن بردار موج                        |
| ۱۴ | ۴-۱ آیا در مواد طبیعی $\epsilon$ منفی وجود دارد؟                          |
| ۱۸ | ۵-۱ شبکه سیمی به‌عنوان ماده‌ای با $\epsilon$ منفی در فرکانس‌های پایین GHz |
| ۲۴ | ۶-۱ مواد با تراوایی مغناطیسی منفی   |
| ۳۲ | ۷-۱ محیط‌های مغناطیسی همسانگرد منفی                                       |
| ۳۴ | ۸-۱ مواد با ضریب شکست منفی  |
| ۳۷ | ۹-۱ برخی اثرات بردار موج معکوس  |
| ۳۸ | ۱-۹-۱ زاویه شکست منفی و قانون اسنل  |
| ۴۰ | ۲-۹-۱ بازتابش کلی و زاویه حد  |
| ۴۱ | ۳-۹-۱ عدسی یا لنز کامل  |
| ۴۲ | ۱-۳-۹-۱ ویژگی‌های لنز کامل  |
| ۴۳ | ۴-۹-۱ جابجایی گوس-هنشین معکوس   |
| ۴۵ | ۵-۹-۱ پدیده دوپلر   |

## فصل دوم

|    |  |
|----|--|
| ۴۸ | ماتریس پرتو برای تیغه NRM و نقش آن در بررسی رفتار باریکه گاوسی |
| ۴۸ | ۱-۲ ماتریس پرتو  |
| ۵۲ | ۲-۲ معرفی ماتریس پرتو برای تیغه NRM                            |
| ۵۳ | ۳-۲ تحقیق معادله کانونی $d=a+a'$                               |
| ۵۴ | ۴-۲ معادله میدان الکتریکی در باریکه گاوسی                      |
| ۵۷ | ۲-۴-۱ تعریف شعاع مختلط انحنا                                   |
| ۶۰ | ۲-۴-۲ دامنه میدان  |
| ۶۲ | ۲-۴-۳ ضریب فاز طولی  |
| ۶۲ | ۲-۴-۴ ضریب فاز شعاعی   |
| ۶۳ | ۵-۲ قانون ABCD برای باریکه گاوسی                               |
| ۶۵ | ۶-۲ بررسی رفتار باریکه گاوسی در برخورد با تیغه NRM             |
| ۶۸ | ۷-۲ محاسبه مکان کمر باریکه گاوسی                               |
| ۷۰ | ۸-۲ محاسبه شعاع باریکه گاوسی                                   |
| ۷۱ | ۹-۲ بررسی رفتار باریکه گاوسی در برخورد با محیط NRM نامحدود     |

## فصل سوم

|    |   |
|----|---|
| ۷۴ | تحلیل تشدیدگرهای لیزری با حضور مواد با ضریب شکست منفی |
| ۷۴ | ۱-۳ اجزای اصلی دستگاه تولید لیزر و شرح عمل آنها       |

|    |  |            |
|----|--|------------|
| ۷۶ | کاربرد ماتریس پرتو در کاواک‌های نوری         | ۲-۳        |
| ۸۲ | شرط پایداری برای تشدیدگرهای حاوی NRM         | ۳-۳        |
| ۸۷ | تشدیدگرهای فیبرنوری                          | ۴-۳        |
| ۹۰ | ویژگی تشدیدگرهای فیبرنوری                    | ۱-۴-۳      |
| ۹۴ | تشدیدگرهای فیبرهای نوری از جنس NRM           | ۵-۳        |
| ۹۴ | شرط پایداری برای تشدیدگر فیبرنوری از جنس NRM | ۱-۵-۳      |
| ۹۷ |  | نتیجه‌گیری |
| ۹۸ |  | کتاب نامه  |

## مقدمه

بررسی پیشرفت‌های جهش‌گونه در حوزه علوم طبیعی و به تبع آن پیشرفت بشر در طول تاریخ نشان داده که همیشه این پیشرفت‌ها با تحولی بزرگ در درک انسان از ماهیت نور همراه بوده است. در سیر تحولات درک انسان از ماهیت نور، بررسی رفتار مواد مختلف با تابش نور بسیار حائز اهمیت بوده است به طوری که در توجیه رفتار نوری مواد در طبیعت یا علت پیدایش رنگ‌ها و بحث‌هایی نظیر آن، نظریه‌های مختلف در مورد ماهیت نور رد و یا تایید می‌شدند. به طور مثال نیوتن با مشاهده پدیده‌های نوری مانند تجزیه نور در منشور و یا شکست نور در آب و یا بازتابش در آینه‌ها، توانست نظریه ذره‌ای بودن نور را توجیه کند و بپذیرد.

در قرون شانزدهم و هفدهم میلادی و پس از آن، نور یا به صورت ذره‌ای و یا به صورت موجی تصور می‌شد اما در قرن نوزدهم ماکسول<sup>۱</sup> مفهوم عمیق‌تری از موجی بودن نور را به مردم ارائه داد و توانست نظریه ذره‌ای بودن موج را کنار بزند. تا این‌که در قرن بیستم معلوم شد که نور می‌تواند هم جنبه موجی و هم جنبه ذره‌ای از خود نشان دهد و تنها نظریه‌ای که می‌تواند این رفتار دوگانه را توجیه کند، نظریه الکترودینامیک کوانتومی است.

به‌رحال یکی از راه‌های بررسی اپتیکی مواد، شناخت و بررسی ضریب شکست آن‌ها است. می‌دانیم که ضریب شکست یک ماده نسبت سرعت فازی نور در خلاء به سرعت آن در ماده است. در واقع می‌توان ضریب شکست را چگالی نوری مواد به‌شمار آورد. تا چند دهه پیش مردم فقط به ضریب شکست مواد معمولی که ماهیتاً مثبت بودند، توجه داشتند و آن‌ها را مورد بررسی قرار می‌دادند و اساساً کمتر کسی راجع به موادی با ضریب شکست منفی فکر می‌کرد. تفکر منفی بودن ضریب شکست، تفکر نغز و نادری بود که تا آن موقع در ذهن مردم شکل نگرفته بود.

اما در سال ۱۹۶۷ وسلایگوی<sup>۲</sup> روسی نظریه منفی شدن ضریب شکست را مطرح، و اثبات کرد که با

---

<sup>۱</sup> Maxwell

<sup>۲</sup> V. G. Veselago

منفی شدن همزمان بخش حقیقی ضرایب گذردهی الکتریکی و تراوایی مغناطیسی در یک فرکانس خاص، بخش حقیقی ضریب شکست فازی ماده منفی می‌شود [۱]. اگرچه این موضوع ایده بسیار جالب و جدیدی بود اما چون ساخت چنین ماده‌ای بسیار دور از ذهن به نظر می‌رسید، لذا با استقبال چندانی مواجه نشد.

این روند تا اواخر دهه ۱۹۹۰ میلادی ادامه داشت تا این‌که جان پندری<sup>۱</sup> در سال ۱۹۹۶ موفق شد آرایه‌ای را بسازد که ضریب گذردهی الکتریکی حقیقی آن در تابش با فرکانس‌های گیگا هرتز، منفی شود [۲]. طبق نظریه وسلایو منفی شدن ضریب گذردهی الکتریکی به تنهایی برای ساخت مواد با ضریب شکست منفی کافی نبود. لذا سه سال گذشت تا این‌که پندری توانست آرایه‌ای را بسازد که در اثر تابش امواج با فرکانس‌های گیگا هرتز، ضریب تراوایی مغناطیسی حقیقی آن نیز منفی شود [۳].

اکنون شرایط برای ساخت آرایه‌ای که بتواند به‌طور همزمان این دو ضریب را برای یک فرکانس خاص منفی کند مهیا شده بود. در سال ۲۰۰۰ اسمیت<sup>۲</sup> و همکارانش توانستند که با ترکیب دو آرایه پیشنهادی پندری، آرایه‌ای را بسازند که بخش حقیقی ضریب شکست فازی آن برای تابش در محدوده گیگا هرتز، منفی شود. پس از این واقعه بود که مواد با ضریب شکست منفی پا به عرصه وجود نهادند و بسیار مورد توجه و علاقه دانشمندان قرار گرفتند و سبب کشف و به‌وجود آمدن ایده‌هایی نو و جذاب مثل موج‌برها [۴،۵،۶]، تشدیدگرها [۷] و ابزار نامریی کردن [۸] شدند. اخیراً نیز نظریه‌هایی مبنی بر ایجاد این‌گونه مواد در محیط‌های گازی شکل گرفته است [۳۳].

در این پایان‌نامه سعی شده ضمن معرفی ماتریس پرتو برای تیغه‌ای از جنس مواد با ضریب شکست منفی، روش ماتریسی تحلیل سیستم‌های اپتیکی برای سیستم‌های شامل این‌گونه از مواد تعمیم داده شود. در فصل اول ضمن بیان مفهوم ضریب شکست منفی، به روش ساخت متامتریالی که ضریب شکست فازی منفی دارد اشاره شده و در ادامه بعضی از ویژگی‌ها و خصوصیات این‌گونه از مواد بیان

---

<sup>۱</sup> J. B. Pendry

<sup>۲</sup> D. R. Smith

گردیده است. در فصل دوم ماتریس پرتو  $2 \times 2$  برای تیغه‌ای از جنس مواد با ضریب شکست منفی معرفی شده که به وسیله آن رفتار باریکه گاوسی تابیده شده به این تیغه‌ها مورد بررسی قرار گرفته و درستی رابطه کانونی عدسی کامل نشان داده شده است. در فصل سوم ضمن اشاره به روش ساخت دستگاه لیزر، تشدیدگرهای اپتیکی و همین‌طور تشدیدگرهای حاوی مواد با ضریب شکست منفی مورد ارزیابی قرار گرفته و با روش ماتریسی، پایداری آن‌ها مورد بحث قرار می‌گیرد. در پایان پیشنهاد ساخت فیبرنوری از جنس این‌گونه مواد ارائه شده است.



## فصل اول

### مواد با ضریب شکست منفی

مواد با ضریب شکست منفی<sup>۱</sup> که به اختصار آن‌ها را NRM می‌گویند، موادی هستند که ضریب شکست حقیقی آن‌ها منفی است. این مواد به واسطه ساختار ویژه‌ای که دارند، خواص ویژه‌ای را هم از خود نشان می‌دهند. NRM ها، تاکنون در طبیعت یافت نشده‌اند، اما ممکن است روزی خبر کشف آن‌ها در طبیعت به گوشمان برسد. این مواد از متامتریال‌ها ساخته شده و ساختاری مصنوعی دارند. متامتریال‌ها از شبکه‌های تناوبی و معمولا با ساختاری از جنس فلز طوری ساخته می‌شوند که ویژگی‌های مطلوب ما را داشته باشند. در این فصل به بررسی این مواد و ویژگی‌های منحصر به فرد آن‌ها می‌پردازیم.

#### ۱-۱ ضریب شکست منفی

تعریف ضریب شکست یک ماده در اپتیک هندسی به شکل  $n = \frac{c}{v}$  است که در آن  $c$  سرعت نور در خلاء و  $v$  سرعت نور در ماده می‌باشد. طبق معادلات ماکسول ضریب شکست برای یک موج تخت به صورت  $n^2 = \epsilon\mu$  نوشته می‌شود که  $\epsilon$  و  $\mu$  به ترتیب ضرایب گذردهی الکتریکی و تراوایی مغناطیسی نسبی ماده هستند. در مواد معمولی این ضرایب مثبت‌اند و لذا  $n$  به راحتی از رابطه فوق به دست می‌آید اما برای مواد ناهمسانگرد این ضرایب مختلط می‌شوند و در نتیجه ضریب شکست رابطه متفاوتی پیدا

---

<sup>۱</sup> Negative Refractive index Materials

می‌کند.  $\mu, \epsilon$  پاسخ ماکروسکوپی یک محیط همگن در مقابل میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی را توصیف می‌کنند چراکه این‌ها خود پارامترهای ماکروسکوپی هستند. معمولاً پاسخ ماکروسکوپی در میانگین زمانی و فضایی بزرگی معین می‌شود. طول مدت میانگین‌گیری در اندازه‌گیری‌های ماکروسکوپی به فرکانس نوسانگرهای مولکولی و یا اتمی (به‌طور جداگانه)، وقتی که در معرض میدان‌های خارجی قرار می‌گیرند بر می‌گردد. پس این موضوع را می‌توان برای مواد غیر همگن نیز تعمیم داد. مواد غیر همگنی که، در مقیاس طولی (ثابت شبکه) بسیار کوچک‌تر از طول موج تابش‌اند و نیز می‌توانند در مقایسه با مقیاس طولی اتمی و یا مولکولی بزرگ باشند. با توجه به این موضوع، تابش، این ساختارها را به‌طور جداگانه تفکیک نمی‌کند اما به تشدیدهای ماکروسکوپی ساختار پاسخ می‌دهد. یعنی  $\mu, \epsilon$  به‌طور هم‌زمان به تابش پاسخ می‌دهند. حال اگر در این شرایط بخش حقیقی  $\mu, \epsilon$  منفی شود، ضریب شکست محیط طبق رابطه (۱-۳) منفی می‌شود [۹]. به چنین موادی متماتریال گفته می‌شود و با پارامترهای ماکروسکوپی‌ای مثل  $\mu, \epsilon$ ، که مانند مواد همگن با این پارامترها پاسخ‌شان را نسبت به میدان‌های الکترومغناطیسی مشخص می‌کنند، توصیف می‌شوند [۱۰، ۱۱]. پس به‌طور خلاصه، هنگامی که دو آرایه‌ی کاملاً جدا که رفتارهای متفاوتی دارند ( $\mu, \epsilon$ ) و هر یک به یکی از مؤلفه‌های میدان پاسخ می‌دهند با هم در یک ترکیب قرار می‌گیرند، چنانچه ثابت شبکه‌ها در قیاس با طول موج ناچیز باشد، این موج در داخل شبکه‌ها دچار پراش نمی‌شود و محیط برای این موج یک محیط پیوسته است. این ضعف موج در تشخیص ریز ساختار شبکه به ما امکان ساخت ترکیبی با خواص دلخواه را می‌دهد.

## ۲-۱ چرا n منفی می‌شود؟

تمام مواد پاشنده هستند یعنی در آن‌ها گذردهی الکتریکی و تراوایی مغناطیسی توابع مختلطی از فرکانس به‌دست می‌آیند و امواج درون آن‌ها میرا می‌شوند- رابطه (۱-۱۷). اگر در ماده‌ای ضرایب

گذردهی الکتریکی و تراوایی مغناطیسی برای یک بازه از طول موج به صورت زیر شوند؛ یعنی:

$$\varepsilon = |\varepsilon| e^{i(\pi - \delta_1)} \quad \text{و} \quad \mu = |\mu| e^{i(\pi - \delta_2)} \quad (1-1)$$

که در آن‌ها  $\delta_1, \delta_2$  اختلاف فاز پاسخ ماده به میدان خارجی باشند، از نتایج معادلات ماکسول داریم:

$$\begin{aligned} n &= \sqrt{\varepsilon \mu} = \sqrt{|\varepsilon| |\mu|} \sqrt{e^{i(\pi - (\delta_1 + \delta_2))}} \\ &= \sqrt{|\mu| |\varepsilon|} \times \sqrt{e^{i\left(\pi - \frac{\delta_1 + \delta_2}{2}\right)}} = \sqrt{|\mu| |\varepsilon|} \times e^{i\left(\pi - \frac{\delta_1 + \delta_2}{2}\right)} \\ &= \sqrt{|\mu| |\varepsilon|} \times \left[ \cos\left(\pi - \frac{\delta_1 + \delta_2}{2}\right) + i \sin\left(\pi - \frac{\delta_1 + \delta_2}{2}\right) \right] \\ &= \sqrt{|\mu| |\varepsilon|} \times \left[ -\cos\left(\frac{\delta_1 + \delta_2}{2}\right) + i \sin\left(\frac{\delta_1 + \delta_2}{2}\right) \right] \end{aligned} \quad (2-1)$$

حال اگر  $\delta_1 + \delta_2 = 0$  باشد بخش حقیقی ضریب شکست  $n$  منفی و بخش موهومی آن مثبت (صفر) می‌شود.

$$n = -\sqrt{|\mu| |\varepsilon|} \quad (3-1)$$

### ۳-۱ منفی شدن ضریب شکست یا معکوس شدن بردار موج

برای بررسی رفتار ماده در زمان منفی بودن  $\varepsilon, \mu$  مثل همیشه به سراغ معادلات ماکسول می‌رویم و

بررسی را از آنجا شروع می‌کنیم، داریم:

$$\nabla \times \vec{E} = \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \& \quad \nabla \times \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + J \quad (4-1)$$

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E} \quad \& \quad \vec{B} = \mu \vec{H}$$

که در آن‌ها  $\vec{E}$  میدان الکتریکی،  $\vec{H}$  شدت میدان مغناطیسی و  $\vec{D}$  جریان جابجایی می‌باشند. البته

فرض بر این است که جریان رسانش صفر است. برای موج تخت تک‌فام با بردار موج  $\vec{k}$ ، طبق معادلات

ماکسول، به نتایج زیر می‌رسیم.

$$\vec{k} \times \vec{E} = \omega \mu_0 \mu \vec{H} \quad (5-1)$$

$$\vec{k} \times \vec{H} = -\omega \epsilon_0 \epsilon \vec{E} \quad (6-1)$$

در معادلات فوق،  $\vec{k}, \vec{H}, \vec{E}$  یک دستگاه راستگرد را به نمایش می‌گذارند اما اگر در محیطی، قسمت حقیقی  $\epsilon, \mu$  به‌طور هم‌زمان منفی شود و بخش موهومی آن‌ها قابل اغماض باشد،  $\vec{k}, \vec{H}, \vec{E}$  یک دستگاه چپگرد را تشکیل می‌دهند. به همین علت مواد با ضریب شکست منفی را مواد چپگرد نیز می‌نامند. از طرفی  $\vec{E}, \vec{H}$  با  $\vec{S}$  یک دستگاه راستگرد را تشکیل می‌دهند چراکه جهت انتشار انرژی در این مواد بنا به قانون علیت تغییر نمی‌کند. پس درمی‌یابیم که بردار  $\vec{S}$  با بردار  $\vec{k}$  یعنی بردار موج، جهت‌های متفاوت دارند. دو دستگاه راستگرد و چپگرد در شکل (۱-۱) نشان داده شده‌اند.



شکل ۱-۱. شکل سمت راست دستگاه  $\vec{k}, \vec{H}, \vec{E}$  راستگرد و شکل سمت چپ دستگاه  $\vec{k}, \vec{H}, \vec{E}$  چپگرد. در این دستگاه  $\vec{k}$  و  $\vec{S}$  در خلاف جهت هم هستند.

در این جا نکته قابل ذکر این است که اگر بردار موج  $\vec{k}$  علامت منفی به‌خود بگیرد، معادلات موج  $\vec{E}$  و  $\vec{H}$  چنین می‌شوند:

$$\vec{E} = \hat{E}_0 e^{-i(\omega t + \vec{k} \cdot \vec{r})} \quad (7-1)$$

$$\vec{H} = \hat{H}_0 e^{-i(\omega t + \vec{k} \cdot \vec{r})} \quad (8-1)$$

یعنی ظاهراً جهت انتشار این امواج در محیط NRM نیز عوض می‌شود اما باید گفت که حتی اگر چنین اتفاقی رخ دهد، بردار پونتینگ همچنان بدون تغییر باقی می‌ماند. چون که  $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$  از

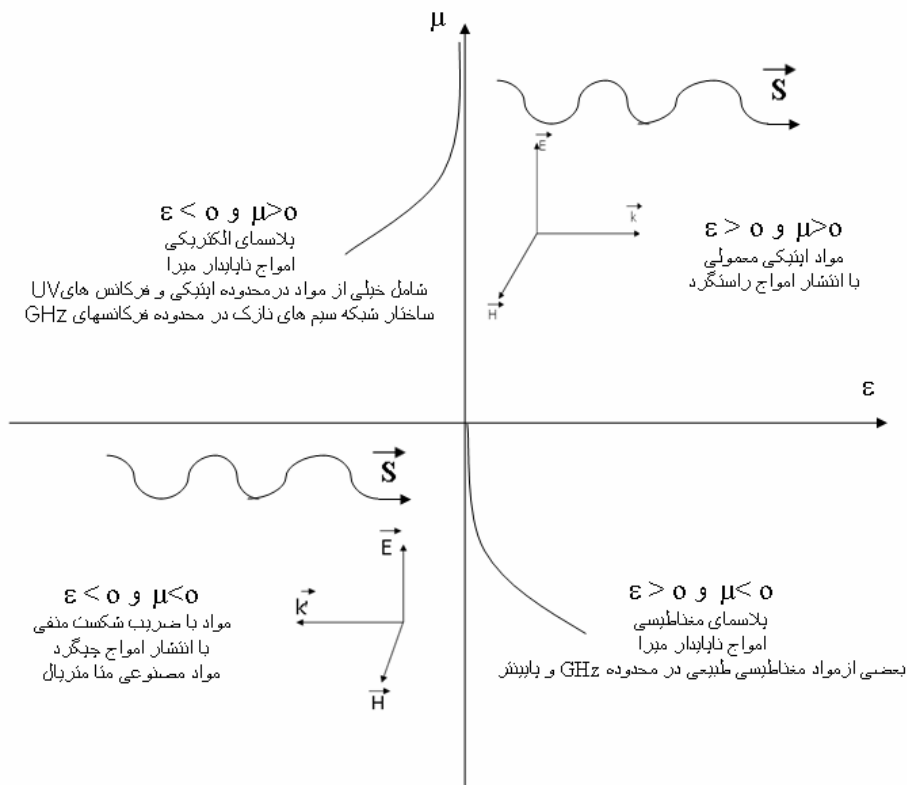
آن جایی که بردار  $\vec{k}$  در رابطه پاشندگی زیر صدق می‌کند؛

$$\vec{k} = n \frac{\omega}{c} \hat{n} \quad (9-1)$$

لذا این رابطه حکم می‌کند که  $n$  مقداری منفی باشد. در این رابطه  $\hat{n}$  برداری است که در راستای انتشار انرژی  $\vec{k}$  می‌باشد. پس با توجه به مطالب گفته شده در این جا و در بخش قبل، با منفی بودن هم‌زمان  $\epsilon, \mu$  ضریب شکست  $n$  از دو معادله مجزا یعنی (۳-۱) و (۹-۱) مقدار منفی به‌خود می‌گیرد. درواقع به این نتیجه می‌رسیم که منفی بودن (با شدن) ضریب شکست یک محیط، معادل پیدایش بردار موجی در آن است که با بردار موج میدان تابشی در خارج از محیط مختلف‌الجهت می‌باشد.

با توجه به روابط سرعت فاز و سرعت گروه تغییر جهت بردار موج در NRM باعث می‌شود تا سرعت فاز نیز در این مواد تغییر جهت دهد. این درحالی است که سرعت گروه همچنان می‌تواند در جهت انتشار انرژی بماند [۹].

باید توجه داشت که این اتفاقات زمانی رخ می‌دهند که در محیط، بخش حقیقی هر دو پارامتر  $\mu, \epsilon$  منفی شود. اگر فقط یکی از آن‌ها منفی شود، یعنی  $\text{Re}(\epsilon) < 0$  یا  $\text{Re}(\mu) < 0$  محیط دیگر اجازه انتشار امواج را در درون خود نمی‌دهد و امواج به سرعت میرا می‌شوند. این موضوع در بخش‌های بعد آورده شده است. در شکل (۲-۱) مواد بر اساس علامت  $\mu, \epsilon$  تقسیم‌بندی شده‌اند. با توجه به این شکل امواج فقط در نواحی ۱ و ۳ می‌توانند از محیط عبور کنند [۹].



شکل ۱-۲. تقسیم‌بندی مواد بر اساس ویژگی‌های مغناطیسی و الکتریکی. خط‌های موجی در ناحیه ۱ و ۳ نشان دهنده این است که این مواد اجازه انتشار امواج را در درون خود می‌دهند. در ناحیه ۲ و ۴ امواج در درون مواد ناپایدارند که در شکل به صورت نمایی افت دامنه امواج نشان داده شده است [۹].

## ۴-۱ آیا در مواد طبیعی $\epsilon$ منفی وجود دارد؟

در فرکانس‌های اپتیکی، خیلی از فلزات ضریب گذردهی الکتریکی منفی دارند و آن هنگامی است که الکترون‌های رسانش در فلزات می‌توانند انباشته شوند و بین یون‌های مثبت ساکن هسته‌ها به‌طور آزادانه نوسان کنند و کل این مجموعه از نظر بار الکتریکی خنثی باشد. این حالت همان رفتار شبه پلاسمایی است که برای یک ضریب گذردهی الکتریکی منفی در فرکانس‌های کمتر از فرکانس پلازما رخ می‌دهد. برای پلاسماهای گازی و حالت جامد  $\epsilon < 0$  قابل حصول است.

برای پی بردن به روند منفی شدن ضریب گذردهی الکتریکی در فلزات، رابطه آن را با پارامترهای فلز و فرکانس طبیعی آن به‌دست می‌آوریم.

فرض کنیم که در محیط، هیچ توزیع بار و جریان خالصی وجود ندارد. اگر این محیط در معرض موج الکترومغناطیسی قرار گیرد، جریان‌های القایی به دلیل وجود حامل‌های بار آزاد در محیط رسانا شکل می‌گیرند. لذا برای معادلات ماکسول داریم:

$$\nabla \times H = \frac{\partial D}{\partial t} + gE \quad \nabla \cdot D = \rho \quad D = \epsilon \epsilon_0 E \quad (10-1)$$

$$\nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t} \quad \nabla \cdot B = 0 \quad B = \mu \mu_0 H$$

یادآور می‌شویم که  $g$  رسانندگی محیط و  $\epsilon, \mu$  به ترتیب ضرایب گذردهی و تراوایی نسبی محیط‌اند. از معادله شدت میدان مغناطیسی می‌توان برای یک موج تخت تک‌فام چنین نوشت:

$$k \times H_c = -\omega D_c - igE_c \quad (11-1)$$

که اندیس  $c$  نشانگر کمیت‌های مختلط می‌باشد. چون فلزات پاسخ مغناطیسی ندارند، پس فرض

می‌شود که تراوایی محیط با خلاء برابر است. لذا،  $\mu = \frac{\mu}{\mu_0} = 1$  (نسبی) و چون  $\frac{1}{c^2} = \mu_0 \epsilon_0$  است پس

(11-1) را چنین می‌نویسیم:

$$k \times B = -\frac{\omega}{c^2} \left( \epsilon + \frac{ig}{\epsilon_0 \omega} \right)$$

کمیت داخل پرانتز را به دلیل مختلط بودن با  $\epsilon_c$  نشان می‌دهیم.  $\epsilon$  یا ضریب گذردهی خلاء کمیتی

مختلط به دست آمد. حال از معادلات ماکسول در (10-1) استفاده می‌کنیم و بردار موج را برای محیط

به دست می‌آوریم.

$$k^2 = \left( \epsilon + \frac{ig}{\epsilon_0 \omega} \right) \frac{\omega^2}{c^2} \Rightarrow k = \frac{\sqrt{\epsilon_0} \omega}{c} \quad (12-1)$$

و از این‌جا رابطه  $\epsilon$  محیط رسانا با بردار موج و فرکانس به دست می‌آید. مختلط بودن  $\epsilon$  منجر به

مختلط شدن بردار موج می‌شود. هنگام تابش موج الکترومغناطیسی به فلز، موج درون فلز (اگر  $g$

بی‌نهایت نباشد) منتشر می‌شود اما به شدت و به صورت نمایی متلاشی می‌گردد.

چگونگی انتشار امواج الکترومغناطیسی در محیط‌های خطی، به‌طور کامل با ثابت‌های اپتیکی  $n$  (ضریب شکست) و  $k$  (بردار موج) تعیین می‌شود که این ثابت‌ها تنها به ثابت دی‌الکتریک  $K$  و رسانندگی  $g$  ماده و از همه مهم‌تر به فرکانس موج بستگی دارند. مدل درود-لورنتس یک مدل میکروسکوپی است که می‌توان رفتار مواد را پیشگویی کند و بر این پایه مبتنی است که ذرات باردار تشکیل‌دهنده ماده به‌صورت نوسانگرهای هارمونیک کلاسیک یا به‌صورت ذرات آزاد در نظر گرفته شوند [۹].

معادله حرکت کلاسیک برای نوسانگر یک بعدی میرایی واداشته عبارت است از:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \gamma \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \frac{eE_m}{m} \quad (13-1)$$

که در آن  $\omega_0$  فرکانس طبیعی ذره،  $\gamma$  ثابت میرایی و  $E_m$  میدان مولکولی است.  $m$  و  $e$  هم به ترتیب بار و جرم ذره هستند. با فرض این که میدان مولکولی، میدانی یکنواخت است و عدد موج  $k$  ی آن برابر صفر، پس  $E_m = \hat{E}_m e^{-i\omega t}$ . حال با توجه به این فرض، جواب‌های حالت پایایی معادله (۱۳-۱) با روش مشهور جایگزینی  $X(t) = X_c e^{-i\omega t}$  به دست می‌آیند. نتیجه عبارت است از:

$$X_c = \frac{eE_m}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega} \quad (14-1)$$

در این رابطه دامنه حرکت ذره با میدان وادارنده  $E_m$  و فرکانس وادارنده که به ازای  $\omega = \omega_0$  خیلی بزرگ است (تشدید) متناسب می‌شود. با استفاده از رابطه قطبش خطی؛

$$P = (\epsilon_c - 1)\epsilon_0 E = -Nex = \frac{Ne^2 / mE}{\omega_0^2 - \omega(\omega + i\gamma)}$$

برای  $\epsilon_c$  یا ثابت دی‌الکتریک محیط به دست می‌آوریم که:

$$\epsilon_c = 1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega} \quad (15-1)$$

که در آن  $\omega_p$  فرکانس پلاسما است. یعنی:

$$\omega_p = \sqrt{\frac{Ne^2}{\epsilon_0 m}} \quad (16-1)$$



برای بارهای آزاد که در پلاسما وجود دارند دیگر نیروی بازگرداننده‌ای از طرف هسته‌ها وجود ندارد. لذا  $\omega_0 = 0$  می‌شود و جمله نیروی بازگرداننده در رابطه (۱۳-۱) حذف می‌گردد. پس رابطه (۱۵-۱) را می‌توان چنین نوشت؛

$$\varepsilon_c = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 - i\gamma\omega} \quad (17-1)$$

و مقدار حقیقی آن به صورت زیر است:

$$\varepsilon_r = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 + \gamma^2} \quad (18-1)$$

و اگر فرض کنیم که میرایی محیط برابر صفر باشد داریم:

$$\varepsilon_r = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \quad (19-1)$$

با کمی دقت می‌توان فهمید که  $\varepsilon_r$  در فرکانس‌های موج تابشی ( $\omega$ ) کمتر از فرکانس پلاسما، منفی می‌شود. اگر به هر نحوی فرکانس پلاسما از فرکانس موج تابشی بزرگ‌تر شود، ضریب گذردهی الکتریکی مقادیر منفی به خود می‌گیرد. در محدوده نور مرئی فلزاتی مانند نقره و جیوه مقدار  $\varepsilon$  منفی دارند، اما همان‌طور که بیان شد، چون در متامتریال‌ها ثابت شبکه باید خیلی کوچک‌تر از طول موج تابشی باشد لذا تا حد امکان فرکانس را در محدوده گیگاهرتز در نظر می‌گیریم [۹]. از رابطه (۱۶-۱) معلوم است که فرکانس پلاسما به  $m, N$  بستگی دارد و با تغییر این دو، فرکانس پلاسما نیز تغییر می‌کند. اگر  $\omega_p$  را پایین بیاوریم، درواقع آستانه منفی شدن  $\varepsilon$  را کمتر کرده‌ایم. پس با این حال به محیطی احتیاج داریم که تعداد ذرات در واحد حجم آن کمتر و جرم ذرات آن بیشتر باشد. چنین چیزی در طبیعت یافت نمی‌شود، اما می‌توان برای این منظور ساختاری مصنوعی ایجاد کرد [۱۳].

## ۵-۱ شبکه سیمی به عنوان ماده‌ای با $\epsilon$ منفی در فرکانس‌های پایین GHz

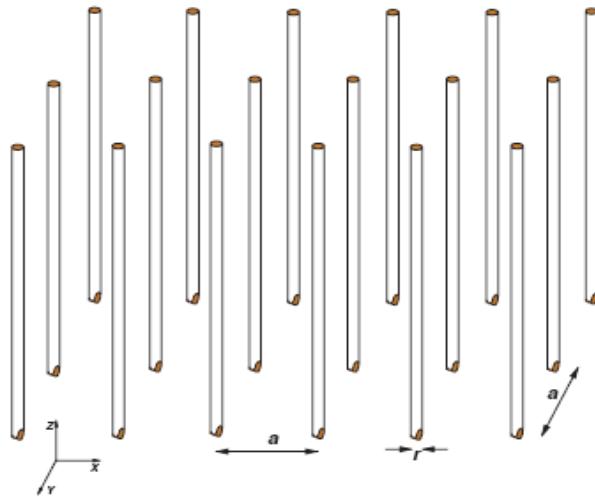
کامپوزیت‌های متامتریال به علت پاسخ‌های الکتروپنایمیکی بسیار زیادی که دارند مدت‌هاست که مورد مطالعه دانشمندان قرار گرفته‌اند [۱۴]. تئوری محیط‌های مؤثر برای توضیح و تفسیر چنین سیستم‌هایی، وقتی که طول موج تابش فرودی خیلی بزرگ‌تر از واحد طبیعی مقیاس طول ساختار باشد، بسط و گسترش یافته‌اند.

پندری در [۲،۱۳] و سون پیپر<sup>۱</sup> در [۱۵] به‌طور جداگانه اثبات کرده‌اند که ساختارهای شبکه سیمی فلزی می‌توانند برای ساختن متامتریالی که خصوصیات ذکر شده را داشته باشد به کار روند و دارای یک نقطه توقف باند پایینی فرکانس باشند- از فرکانس صفر تا فرکانس قطعی بالا- که به حرکت الکترون‌ها در سیم‌های فلزی نسبت داده می‌شوند. متامتریال مورد بررسی پندری شامل سیم‌های باریک و درازند که در مقیاس‌های کوچک‌تر از طول موج ساخته شده‌اند و می‌توانند به‌طور مؤثری همگن باشند. باند توقف پایین فرکانس می‌تواند به گذردهی الکتریکی منفی نسبت داده شود و منجر به دستیابی به مواد با گذردهی الکتریکی منفی گردد. حتی این روش برای فرکانس‌های میکروویو نیز می‌تواند ایده خوبی باشد.

سیستمی را که پندری معرفی کرد- شبکه سیم‌های نازک و دراز فلزی- می‌تواند پارامترهای به کار رفته در  $\omega_p$  را تغییر دهد و آستانه فرکانس قطع را پایین بیاورد [۹]. در این کامپوزیت می‌توان چگالی تعداد الکترون‌ها را کم کرد و جرم مؤثر الکترون‌ها را افزایش داد به‌طوری‌که جرم الکترون به سنگینی جرم اتم نیتروژن به‌نظر رسد. در شکل (۱-۳) پیکربندی شبکه سیمی نازک و دراز فلزی نشان داده شده است. این شبکه سیمی رفتاری شبیه پلازما با چگالی پایین و حامل بارهای سنگین دارد. وقتی که این آرایه را در معرض امواج الکتریکی موازی با محور سیم‌ها و با فرکانس GHz قرار دهیم، الکترون‌های درون سیم مجبور به حرکت در امتداد سیم می‌شوند.

---

<sup>۱</sup> Sievenpiper



شکل ۱-۳. آرایه‌ای از سیم‌های نازک و دراز که فاصله هر کدام از سیم‌ها  $a$  می‌باشد (ثابت شبکه). سطح مقطع یک سیم  $\pi r^2$  است که شعاع میله است [۹].

چون میدان تابشی باید از شرط  $\lambda \gg a \gg r$  پیروی کند، لذا نمی‌تواند تک‌تک سیم‌ها را به‌طور جداگانه "ببیند" و چگالی الکترون‌های درون آن‌ها را تغییر دهد، بلکه فقط می‌تواند چگالی بار متوسط را تغییر دهد. برای چگالی بار متوسط یا مؤثر، داریم؛

$$N_{eff} = \frac{\pi r^2}{a^2} n \quad (20-1)$$

که در آن  $n$  چگالی واقعی الکترون‌های درون سیم‌ها است. در این رابطه ضریب سطح مؤثر یا  $\frac{\pi r^2}{a^2}$  باعث کاهش چگالی الکترون‌ها از  $n$  به  $N_{eff}$  شده است.

اما در این آرایه اتفاق مهم دیگری نیز رخ می‌دهد که سبب افزایش جرم مؤثر الکترون‌های درون سیم‌های نازک می‌شود. ما در پی یافتن راهی هستیم که بتوان جرم الکترون‌ها را با استفاده از پارامترهای آرایه فلزی تغییر داد. حال تنها رابطه‌ای که جرم در آن ظاهر می‌شود همان رابطه تکانه وارد شده بر الکترون است. هرگاه برهم‌کنش الکترون‌ها را با میدان الکترومغناطیسی بررسی کنیم در می‌یابیم که معادله‌ای که این برهم‌کنش را توصیف می‌کند معادله کلاسیک نیروی لورنتز است و

همیلتونی کلاسیک الکترون در حضور میدان با تبدیل پیمانه‌ای  $P \rightarrow P + eA$  همچنان در آن صادق می‌باشد [۱۲]. از این‌جا پیداست که باید پتانسیل برداری محاسبه گردد.

وقتی که آرایه سیم‌های نازک در معرض میدان الکتریکی قرار می‌گیرند، جریان القایی درون آن‌ها به وجود می‌آید که این جریان‌ها، میدان مغناطیسی در اطراف سیم‌ها به وجود می‌آورند.

میدان مغناطیسی در فاصله  $\rho$  از یک سیم را در نظر بگیرید. این میدان به دلیل این‌که چگالی جریان غیر یکنواخت است، میدانی متغیر و غیر یکنواخت می‌باشد و تا اندازه‌ای بزرگ می‌شود که سیم‌ها بیشتر شار را از خود عبور دهند. با استفاده از تقارن می‌توان یک نقطه صفر برای میدان مغناطیسی بین سیم‌ها پیدا کرد. پس بنابراین می‌توان میدان مغناطیسی را در فاصله  $\rho$  از یک سیم به صورت زیر به دست آورد [۹]:

$$\vec{H}(\rho) = \frac{\hat{\phi} I}{2\pi} \left( \frac{1}{\rho} - \frac{1}{a - \rho} \right)$$

که در آن  $\hat{\phi}$  برداری که زاویه‌ای در دستگاه استوانه‌ای است.

از این‌جا پتانسیل برداری مربوط به میدان یک میله رسانای حامل جریان با طول زیاد را با استفاده از شرایط مرزی که روی محیط میله و نقطه صفر بین میله‌ها ( $\frac{a}{2}$ ) می‌باشد، به دست می‌آوریم.

با محاسبه مستقیم  $\nabla \times A$  داریم؛

$$\vec{A}(\rho) = \frac{\hat{z} I}{2\pi} \left[ \frac{a^2}{4\rho(a - \rho)} \right] \quad \text{برای } \rho < \frac{a}{2}$$

$$\vec{A}(\rho) = 0 \quad \text{برای } \rho > \frac{a}{2}$$

با این شرایطی که اعمال شد از هم‌پوشانی پتانسیل برداری یک سیم با سیم دیگر جلوگیری می‌شود و القای متقابل بین سیم‌های مجاور کاملاً مشخص می‌گردد.

با توجه به این‌که  $r \ll a$  می‌باشد و جریان درون میله برابر است با  $I = \pi r^2 nev$ ، که در آن  $v$  سرعت متوسط الکترون است، لذا پتانسیل برداری برای میدان میانگین به شکل ساده زیر در می‌آید،