دانشگاه فردوسی مشهد

دانشکده علوم ریاضی و آمار

پایان‌نامه جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد ریاضی محض (هندسه)

عنوان :
مجموعه‌های ε - نامرئی در جاذب‌های سیستم‌های دینامیکی

استاد راهنما :

دکتر فاطمه هلن قانع

استاد مشاور :

دکتر علیرضا زمانی بهابادی

نگارش :

زهرا ناجی راد

زمستان ۹۰

فهرست مطالب

مقدمه

مطالعه‌ی جاذب‌ها در سیستم‌های دینامیکی از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. یک جاذب مجموعه‌ای از حالت‌ها است که سایر حالت‌ها به طور مجانبی به آن همگرا هستند. علیرغم این ایده‌ی ساده، تعاریف متفاوت و نامعادلی از مفهوم جاذب وجود دارد. جاذب‌های میلنور، جاذب‌های بیشین و جاذب‌های تصادفی نمونه‌هایی از جاذب‌های مختلف می‌باشند. در این پایان‌نامه به مطالعه‌ی جاذب‌های تصادفی و نواحی ε- نامرئی آن‌ها می‌پردازیم. جاذب‌های تصادفی در ۱۹۸۶ توسط ایلیاشنکو معرفی شدند. یک جاذب تصادفی، مجموعه‌ای بسته و کمین است که تقریباً هر مدار با میانگین زمانی ۱ در هر همسایگی از آن سپری می‌کند. یک ناحیه‌ی نامرئی از یک جاذب، مجموعه‌ای باز از جاذب است که مدار تقریباً هر نقطه با بسامد میانگین کمتر از ε از آن ناحیه عبور کند. وجود یک ناحیه‌ی ε- نامرئی در یک جاذب بدین معنی است که در تجربیات عددی، ناحیه‌ی بزرگی در جاذب مشاهده نمی‌گردد. در [۱۰] ایلیاشنکو و نگات مجموعه‌ای باز در فضای پادضرب‌های روی سلونوئید با تار دایره‌ای ساختند به قسمی که هر پادضرب در این مجموعه، ساختاراً پایدار و L- کراندار لیپ‌شیتز بود و یک جاذب تصادفی با ناحیه‌ی ε- نامرئی، برای مقادیر کوچک ε ($\varepsilon = ۲^{-n}$)، اختیار

می‌کرد. به ویژه، اندازه‌ی این ناحیه‌ی ε-نامرئی، در مقایسه با اندازه‌ی جاذب قابل لحاظ بود. آن‌ها نشان دادند که اختلال‌های کوچک از پادضرب‌ها در فضای دیفیومورفیسم‌ها، همچنان دارای یک جاذب تصادفی با ویژگی‌های مذکور می‌باشد.

مطالب این پایان‌نامه، از مقاله‌ی زیر استخراج گردیده است:

Yu. Ilyashenko and A. Negut 2010 Invisible parts of attractors, *Non linearity* **23** (1199-1219).

این پایان‌نامه در چهار فصل تدوین گردیده است. در فصل اول به مفاهیم پایه‌ای و قضایای مرجع می‌پردازیم. در فصل دوم جاذب‌های مختلف معرفی می‌گردند و سپس پادضرب‌ها را مورد بررسی قرار می‌دهیم. در فصل سوم جاذب‌های تصادفی پادضرب‌های روی نگاشت نوبت برنولی و ناحیه‌ی ε-نامرئی آن‌ها بررسی می‌شوند و سپس در فصل چهارم به پادضرب‌های روی نگاشت سلونوئید و جاذب‌های تصادفی آن‌ها می‌پردازیم و به ویژه، اثبات قضیه‌ِی اصلی ارائه می‌شود.

فصل ۱

تعاریف و مفاهیم مقدماتی

۱.۱ سیستم‌های دینامیکی و متریک ریمانی

به سه‌تایی $\{T, X, \varphi_t\}$ یک سیستم دینامیکی[۱] گوییم، که در آن T مجموعه‌ی زمان ، X فضای حالت و $\varphi_t : X \longrightarrow X$ یک خانواده از عملگرها می‌باشد که در شرایط زیر صدق می‌کند.

$$\varphi_\circ = id \quad , \quad \varphi_{t+s} = \varphi_t + \varphi_s \ , \ \forall t, s \in T$$

مجموعه‌ی زمان T می‌تواند مجموعه‌ی اعداد صحیح $\mathbb{Z}$ و یا مجموعه‌ی اعداد حقیقی $\mathbb{R}$ باشد، به سیستم نوعِ اول سیستم دینامیکی گسسته[۲] و به دیگری سیستم دینامیکی پیوسته[۳] گوییم.

---

[۱] dynamical system

[۲] discrete dynamical system

[۳] continuous dynamical system

یک متریک ریمانی[۴] روی منیفلد M، تابعی مانند $\phi : p \longrightarrow \phi_p$ ، $p \in M$ است، که در آن ϕ_p یک ۲-تانسور متقارن و معین مثبت روی فضای مماسی بر M در نقطه‌ی p می‌باشد، یعنی برای هر w, v, u و $\alpha \in R$ داریم

$$\phi_p(v, w+u) = \phi_p(v, w) + \phi_p(v, u)$$

$$\phi_p(v+w, u) = \phi_p(v, u) + \phi_p(w, u)$$

$$\phi_p(\alpha v, w) = \phi_p(v, \alpha w) = \alpha \phi_p(v, w)$$

$$\phi_p(v, w) = \phi_p(w, v)$$

$$\phi_P(v, v) \geqslant ۰,\ v = ۰ \Longleftrightarrow \phi_p(v, v) = ۰.$$

به‌علاوه، برای هر جفت از میدان‌های برداری هموار X و Y روی یک زیرمجموعه‌ی باز U از M، تابع $\phi_p(X, Y) : U \longrightarrow \mathbb{R}$ با ضابطه‌ی

$$[\phi_p(X, Y)](p) = \phi_p(X(p), Y(p))$$

تعریف می‌شود، تابعی هموار باشد. منیفلد M همراه با متریک ریمانی ϕ_p را منیفلد ریمانی[۵] گوییم.

قضیه ۱.۱.۱ *هر منیفلد همبند ریمانی یک فضای متریک است که در آن $d(p, q)$ (فاصله‌ی بین دو نقطه‌ی دلخواه p و q) ، به‌صورت اینفیمم[۶] طول $D^۱$ - منحنی‌هایی از نقطه‌ی p به q*

[۴] Reimannian metric

[۵] Riemannian manifold

[۶] infimum

تعریف می‌شود، (دراینجا منظور از منحنی‌های از رده‌ی D^1 ، منحنی‌های به‌طور قطعه‌ای C^1 می‌باشد). توپولوژی این فضای متریک، همان توپولوژی منیفلد است.

برهان. [۲۱]، فصل ۵ را ببینید. □

توجه داریم که چنین نیست که هر منیفلدی ریمانی باشد، بلکه روی هر C^∞ منیفلد می‌توان یک متریک ریمانی تعریف کرد. ([۲۱] ، فصل ۵ را ببینید).

۲.۱ C^r-توپولوژی فضای دیفیومورفیسم‌ها

فرض کنیم M یک C^r-منیفلد، W زیرمجموعه‌ی بازی از M و $f : W \longrightarrow \mathbb{R}$ تابعی حقیقی مقدار باشد. f را تابعی از رده‌ی C^r خوانیم، درصورتی که برای هر $p \in M$، یک همسایگی مختصاتی (U, φ) موجود باشد به‌قسمی که $\hat{f} = fo\varphi^{-1}$ روی $\varphi(U \cap W)$ تابعی از رده‌ی C^r باشد. متذکر می‌شویم که این تعریف مستقل از انتخاب (U, φ) است. ([۲۱] را ببینید).

فرض کنیم M و N دو منیفلد C^r باشند. نگاشت $f : M \longrightarrow N$ را از رده‌ی C^r خوانیم درصورتی که برای هر $p \in M$ بتوان دو همسایگی مختصاتی (U, φ) و (V, ψ) به‌ترتیب حول p و $f(p)$ چنان یافت که $f(U) \subset V$ و $\psi o f o \varphi^{-1} : \varphi(U) \longrightarrow \psi(V)$ تابعی از رده‌ی C^r باشد. در اینجا تعریف مشتق‌پذیری f از انتخاب زوج‌های (U, φ) و (V, ψ) مستقل است.

تابع $f : M \longrightarrow N$ را یک C^r-دیفیومورفیسم خوانیم درصورتی که f یک همیومورفیسم C^r و f^{-1} نگاشتی C^r باشد.

قضیه ۱.۲.۱ (ویتنی) [۷]

هر منیفلد هموار و فشرده با بعد m را می‌توان به‌طور هموار به‌عنوان یک زیرمنیفلد بسته در $\mathbb{R}^{۲m+۱}$ نشاند.

برهان. [۲۱] را ببینید. □

فرض کنیم $C^r(M,\mathbb{R}^s)$، $r \geqslant ۱$، فضای تمام نگاشت‌های C^r از M به $\mathbb{R}^s$ باشد. اگر M فشرده باشد، می‌توان یک پوشش متناهی از همسایگی‌های باز $V_۱,...,V_k$ برای M چنان یافت که هر V_i در دامنه‌ی یک همسایگی مختصاتی (U_i,ϕ_i) قرار داشته باشد به‌طوری‌که $\phi_i(V_i)=B_۱(۰)$ و $\phi_i(U_i)=B_۲(۰)$، جایی که $B_\varepsilon(x)$ گویی به شعاع ϵ و مرکز x است. برای هر $f\in C^r(M,\mathbb{R}^s)$ فرض می‌کنیم

$$f_i = fo\varphi_i^{-۱} : B_۲(۰) \longrightarrow \mathbb{R}^s$$

و نرم زیر را روی فضای $C^r(M,\mathbb{R}^s)$ تعریف می‌کنیم.

$$||f||_r = \max_{i=۱,...,k} \sup\{||f_i(u)||, ||Df_i(u)||, ..., ||D^r f_i(u)||, \quad u\in B_۱(۰)\}$$

می‌توان نشان داد که $||\ ||_r$ یک نرم کامل روی $C^r(M,\mathbb{R}^s)$ است و توپولوژی تولید شده توسط آن به پوشش $V_۱,...,V_k$ بستگی ندارد، ([۲۲] را ببینید).

اکنون فرض کنیم M یک منیفلد فشرده و N منیفیلدی بسته باشد، دراین حالت برای تعریف یک C^r- توپولوژی بین این دو منیفلد، به‌کمک قضیه‌ی ویتنی N را در فضای اقلیدسی

[۷] Whetiney

$\mathbb{R}^s$ می‌نشانیم. بنابراین $C^r(M,N) \subset C^r(M,\mathbb{R}^s)$. درنتیجه می‌توان توپولوژی حاصل از نرم بالا را روی $C^r(M,N)$ به‌عنوان زیرفضایی از $C^r(M,\mathbb{R}^s)$ درنظر گرفت. می‌توان نشان داد این توپولوژی مستقل از نشاندن N می‌باشد. ([۲۲] را ببینید) .

فضای C^r-دیفیومورفیسم‌های روی منیفلد M با توپولوژی C^r را به‌عنوان زیرفضایی از $C^r(M,M)$ درنظر می‌گیریم و آن را با $D_iff^r(M)$ نمایش می‌دهیم.

فرض کنیم $f \in D_iff^r(M)$ ، دراین‌صورت C^r-دیفیومورفیسم g را $C^r - \epsilon$ -نزدیک به f گوییم هرگاه $||f-g||_r < \epsilon$. اگر $\epsilon > 0$ به‌قدر کافی کوچک باشد، آن‌گاه g را یک C^r -اختلال[۸] f نیز خوانند.

۳.۱ ساختار مداری یک دیفیومورفیسم

تعریف ۱.۳.۱ *فرض کنیم M یک منیفلد m بعدی باشد و $f \in D_iff^r(M)$. برای هر $p \in M$ مدار[۹] p تحت نگاشت f عبارت است از $\{f^n(p) | n \in Z\}$. این مجموعه را با $Orb_f(p)$ نمایش می‌دهیم. همچنین f - مدار مثبت p برابر است با*

$$Orb_f^+ = \{f^n(p) \mid n \geqslant 0\}$$

و f - مدار منفی p برابر است با $Orb_f^- = \{f^{-n}(p) \mid n \geqslant 1\}$. اگر $Orb_f(p)$ متناهی باشد p را یک نقطه تناوبی[۱۰] f خوانند. درحالتی که $Orb_f(p)$ فقط از یک نقطه تشکیل شده باشد

[۸] perturbation

[۹] orbit

[۱۰] periodic point

یعنی $f(p)=p$ ، p نقطه‌ی ثابت[۱۱] f خوانده می‌شود.

کوچکترین عدد صحیح $n \geqslant 1$ که به‌ازای آن $f^n(p) = p$، دوره تناوب[۱۲] p است و مجموعه‌ی تمام نقاط تناوبی f را با $per(f)$ نمایش می‌دهیم.

زیرمجموعه‌ی Λ از M را ناوردا[۱۳] گوییم درصورتی که $f(\Lambda) = \Lambda$. بدیهی است که هر مدار f ناورداست. به‌سادگی می‌توان نشان داد مجموعه‌ی Λ ناورداست اگر وتنها اگر Λ اجتماعی از مدارهای f باشد. ([۲۱] را ببینید).

نقطه‌ی p را ناسرگردان[۱۴] خوانند اگر برای هر همسایگی V از p ، عدد صحیحی مانند $n \neq 0$ وجود داشته باشد که $f^n(V) \cap V \neq \emptyset$. مجموعه‌ی تمام نقاط ناسرگردان f را با $\Omega(f)$ نمایش می‌دهیم.

یک ϵ - زنجیر[۱۵] به طول n از نقطه‌ی x به y برای نگاشت f ، دنباله‌ی $\{x = x_0, ..., x_n = y\}$ است به‌طوری که برای هر j ، $1 \leqslant j \leqslant n$ داشته باشیم

$$d(f(x_{j-1}), x_j) < \epsilon$$

مجموعه‌ی زنجیر بازگشتی[۱۶] برای f ، مجموعه‌ای از اعضای X است که برای هر $\epsilon > 0$، یک ϵ- زنجیر از x به x وجود داشته باشد و آن را با $R(f)$ نمایش می‌دهیم.

[۱۱] fixed point

[۱۲] period

[۱۳] invariant

[۱۴] nonwandering

[۱۵] ϵ-chain

[۱۶] chain recurrent set

تعریف ۲.۳.۱ *q را نقطه‌ی ω- حدی[۱۷] p خوانند، درصورتی که دنباله‌ای از اعداد طبیعی مانند $\{n_i\}$ وجود داشته باشد که $n_i \longrightarrow \infty$ ، $f^{n_i}(p) \longrightarrow q$. مجموعه‌ی تمام نقاط ω- حدی p را با $\omega(p)$ نشان می‌دهیم. اگر x یک نقطه از مدار p باشد، آن‌گاه $\omega(p) = \omega(x)$ ([؟] را ببینید). به‌طریق مشابه نقطه و مجموعه‌ی α - حدی[۱۸] p ، به‌صورت نقطه و مجموعه‌ی ω- حدی p برای f^{-1} تعریف می‌شود.*

تعریف ۳.۳.۱ *یک تزویج[۱۹] بین دو دیفیومورفیسم f و g عبارتست از یک همسانریختی $h : M \longrightarrow N$ به‌طوری‌که $hof = goh$. بدیهی است که در این حالت برای هر $n \in \mathbb{Z}$ داریم $hof^n = g^n oh$ و بنابراین اگر $q = h(p)$ ، آن‌گاه*

$$orb_g(q) = h(orb_f(p)).$$

یعنی h مدارهای f را بر روی مدارهای g می‌برد. به همین ترتیب یک نیم - تزویج[۲۰] بین این دو دیفیومورفیسم عبارت است از نگاشت پیوسته و پوشای $h : M \longrightarrow N$ به‌طوری‌که $hof = goh$.

---

[۱۷] ω-limit set

[۱۸] α-limit set

[۱۹] conjugacy

[۲۰] semiconjugacy

۴.۱ فضای نمادین

فضای نمادین[۲۱] در مطالعه‌ی دستگاه‌های دینامیکی دارای اهمیت است. این فضا از دنباله‌هایی با مقادیر اعداد طبیعی بین ۱ تا N تشکیل شده است و نگاشت ویژه‌ای روی آن تعریف می‌شود.

فرض کنیم N یک عدد صحیح بزرگتر از ۱ باشد. فضای تمام توابع از $\mathbb{N}$ به $\{۱,۲,...,N\}$؛ یعنی $\{۱,۲,...,N\}^{\mathbb{N}}$، را با نماد $\Sigma^{\mathbb{N}}$ نمایش می‌دهیم و متریک زیر را روی آن تعریف می‌کنیم.

$$d(s,t)=\sum_{k=۱}^{\infty}\frac{\delta(s_k,t_k)}{۳^k}$$

که $s=(s_۱,s_۲,...)$ و $t=(t_۱,t_۲,...)$ و

$$\delta(i,j)=\begin{cases} ۰ & i=j \\ ۱ & i\neq j\ . \end{cases}$$

روی فضای $\Sigma^{\mathbb{N}}$ نگاشت نوبت[۲۲] را به‌صورت

$$\sigma:\Sigma^{\mathbb{N}}\longrightarrow\Sigma^{\mathbb{N}}\quad,\quad \sigma(s_۱,s_۲,...)=(s_۲,s_۳,...)$$

تعریف می‌کنیم. فضای $(\Sigma^{\mathbb{N}},\sigma)$ فضای نمادین (روی N نماد) نامیده می‌شود.

---

[۲۱] symbol space

[۲۲] shiff map

۵.۱ نقاط و مجموعه‌های هذلولوی

تعریف ۱.۵.۱ *فرض کنیم $p \in M$ یک نقطه‌ی ثابت (تناوبی) از $f \in D_iff^r(M)$ باشد. گوییم p یک نقطه‌ی ثابت (تناوبی) هذلولوی[۲۳] است اگر $T_pM \longrightarrow T_pM$ $(Df^k(p))D_pf :$ دارای مقدار ویژه‌ای با قدرمطلق ۱ نباشد. دراین‌صورت اگر قدرمطلق همه‌ی مقادیر ویژه‌ی D_pf کمتر از یک باشد، p را جاذب (چاهک)[۲۴] و اگر بیشتر از یک باشد، p را دافع (منبع)[۲۵] خوانند.*

تعریف فوق را می‌توان به مجموعه‌های ناوردای M به‌صورت زیر گسترش داد.

فرض کنیم Λ زیرمجموعه‌ی ناوردای فشرده‌ای از M باشد. گوییم Λ دارای ساختار هذلولوی روی M است اگر برای هر $x \in \Lambda$ ، یک تجزیه‌ی منحصربه‌فرد $T_xM = \mathbb{E}_x^u \oplus \mathbb{E}_x^s$ موجود باشد به‌طوری‌که

۱. تغییرات $x \longmapsto \mathbb{E}_x^s$ و $x \longmapsto \mathbb{E}_x^u$ در Λ پیوسته باشند.

۲. تجزیه‌ی فوق Df -ناوردا باشد، یعنی $Df(\mathbb{E}_x^s) = \mathbb{E}_{f(x)}^s$ و $Df(\mathbb{E}_x^u) = \mathbb{E}_{f(x)}^u$.

۳. اعداد ثابت $C > ۰$ و $۰ < \lambda < ۱$ موجود باشند به‌طوری‌که

$$Df^{-n}(v) \leqslant C\lambda^n ||v|| \quad v \in \mathbb{E}_x^u, n \geqslant ۰$$

$$Df^{n}(v) \leqslant C\lambda^n ||v|| \quad v \in \mathbb{E}_x^s, n \geqslant ۰$$

[۲۳] hyperbolic

[۲۴] attractor(sink)

[۲۵] repellor(source)

(نرم فوق، نرم تولید شده توسط متریک ریمانی است). منظور از پیوستگی در (۱) این است که برای هر ϵ داده شده، $\delta > 0$ ای موجود است به‌طوری‌که اگر $d(p,q) < \delta$ ، آن‌گاه

$$\mathbb{E}_q^u \subset C_p^u(\mathbb{E}) = \{v^u + v^s; v^k \in \mathbb{E}_p^u \ \ , \ \ v^s \in \mathbb{E}_p^s, |||v^s|| \leqslant \epsilon ||v^u||\}.$$

اگر مجموعه‌ی ناوردای Λ دارای ساختار هذلولوی برای دیفیومورفیسم f باشد، Λ را یک مجموعه‌ی ناوردای هذلولوی[۲۶] خوانند.

تعریف ۲.۵.۱ *نگاشت $f : M \longrightarrow M$ را درنظر می‌گیریم. فرض کنیم Λ مجموعه‌ی هذلولوی برای f باشد. Λ را موضعاً بیشین[۲۷] نامیم اگر همسایگی U از Λ موجود باشد به‌طوری‌که هر مجموعه‌ی f - ناوردا در U و شامل Λ ، بر آن منطبق باشد.*

تعریف ۳.۵.۱ *فرض کنیم $f : M \longrightarrow M$ یک C^1 - دیفیومورفیسم و $\Lambda \subset M$ مجموعه‌ای ناوردا برای f باشد. Df - تجزیه‌ی $T_\Lambda M = \mathbb{E}^u + \mathbb{E}^c + \mathbb{E}^s$ جزئاً هذلولوی[۲۸] خوانده می‌شود اگر متریک ریمانی $||.||$ بر روی منیفلد و ثابت‌های $1 > \lambda > 0$ و $1 < \mu$ وجود داشته باشد به‌طوری که در هر نقطه‌ی $x \in \Lambda$ ، نامساوی‌های زیر برقرار باشد*

$$0 < ||Df(x)|_{\mathbb{E}^s}|| < \lambda < m(Df(x)|_{\mathbb{E}^c}) \leqslant ||Df(x)|_{\mathbb{E}^c}|| < \mu < m(Df(x)|_{\mathbb{E}^c})$$

که در آن هم نرم[۲۹] m به‌صورت زیر تعریف می‌شود.

$$m(Df(x)) = \inf\{||Df(x)(v)|| \ \mid \ ||v|| = 1\}$$

[۲۶] hyperbolic invariant set

[۲۷] locally maximal

[۲۸] partially hyperbolic

[۲۹] conorm

۶.۱ دیفیومورفیسم‌های مورس-اسمیل

فرض کنیم p یک نقطه‌ی ثابت هذلولوی برای دیفیومورفیسم f باشد. برای هر $\epsilon > 0$ ، منیفلدهای پایدار و ناپایدار موضعی[۳۰] در نقطه‌ی p (با اندازه‌ی ϵ) را به‌صورت زیر تعریف می‌شوند.

$$W^s_\epsilon(p) = \{q \in M | d(f^n(q), f^n(p)) \leqslant \epsilon, \forall n \geqslant 0\},$$

$$W^u_\epsilon(p) = \{q \in M | d(f^{-n}(q), f^{-n}(p)) \leqslant \epsilon, \forall n \geqslant 0\}.$$

منیفلدهای پایدار و ناپایدار[۳۱] نیز به‌صورت زیر تعریف می‌شوند

$$W^s(p) = \bigcup_{n \geq 0} f^{-n}(W^s_\epsilon(p)),$$

$$W^u(p) = \bigcup_{n \geq 0} f^{n}(W^u_\epsilon(p)).$$

فرض کنیم $S \subset N$ یک C^r زیرمنیفلد و $f : M \longrightarrow N$ یک نگاشت از رده‌ی C^k باشد، $r, k \geqslant 1$. گویند f بر S در نقطه‌ی p اریب[۳۲] است اگر

$$f(p) \notin S \quad \text{و یا} \quad df_p(TM_p) + TS_{f(p)} = TN_{f(p)}$$

معمولاً از نماد $f \pitchfork S$ برای نشان دادن این مفهوم استفاده می‌شود. همچنین f را بر S اریب خوانند، هرگاه در هر نقطه‌ی $p \in M$ بر S اریب باشد. تقاطع اریب[۳۳] بین دو زیرمنیفلد

---

۳۰ local(un) stable manifold

۳۱ (un) stable manifold

۳۲ transversal

۳۳ transversality

$S_1, S_2 \subset N$ به‌صورت مشابه تعریف می‌شود. گوییم S_1 بر S_2 اریب است اگر نگاشت شمول $i: S_1 \longrightarrow N$ بر S_2 اریب باشد.

دیفیومورفیسم $f \in D_iff^r(M)$ را ساختاراً پایدار[۳۴] خوانند اگر همسایگی U از f در $D_iff^r(M)$ وجود داشته باشد به‌طوری هر $g \in U$ ، با f مزدوج باشد. به عبارن دیگر ساختاراً پایداري، پابرجايي توپولوژيکي ساختار مداري يك دستگاه ديناميکي تحت اختلال‌هاي کوچك است. همچنين تابع تزويج نقاط ثابت و تناوبي f را به ترتيب به نقاط ثابت و تناوبي g تصوير مي‌کند. متذکر مي‌شويم که يك تزويج مانند h بين ديفيومورفيسم‌هاي f, g، هر مدار f را به يك مدار نظير از g نقش مي‌کند.

به‌سادگي مي‌توان ديد مجموعه نقاط ناسرگردان f ، $\Omega(f)$، مجموعه‌اي بسته، ناوردا و شامل $\overline{per(f)}$، بستار مجموعه‌ي نقاط تناوبي f است.

ديفيومورفيسم f را صادق در اصل A[۳۵] گويند اگر $\Omega(f)$ هذلولوي باشد و $\overline{per(f)} = \Omega(f)$

قضیه ۱.۶.۱ (ساختاراً پايداري) *فرض کنیم M يك منيفلد فشرده و $f: M \longrightarrow M$ يك C^1 ديفيومورفيسم باشد. دراين‌صورت f ساختاراً پايدار است اگر و فقط اگر در اصل A صدق کند و براي هر $x, y \in \Omega(f)$، $W^s(x)$ و $W^u(y)$ تقاطع اريب داشته باشند.*

تعریف ۱.۶.۱ *برای منیفلد فشرده‌ی M دیفیومورفیسم $f \in Diff(M)$، $r \geq 1$ مورس-*

[۳۴] structurally stable

[۳۵] Axiom A

اسمیل[۳۶] خوانند اگر

۱. *نقاط ثابت و تناوبی f متناهی و همه‌ی آن‌ها هذلولوی باشند.*

۲. *برای هر دو نقطه‌ی ثابت (تناوبی) منیفلدهای پایدار و ناپایدار، آن‌ها تقاطع اریب داشته باشند. یعنی اگر $p_1, p_2 \in per(f)$ ، آن‌گاه*

$$W^u(p_1) \pitchfork W^s(p_2).$$

در اینجا چند ویژگی مهم دیفیومورفیسم‌های مورس-اسمیل[۳۷] را بیان می‌کنیم. (برای توضیح بیشتر [؟] را ببینید).

۱. *برای هر منیفلد M و برای هر $r \geq 1$ ، مجموعه‌ی دیفیومورفیسم‌های مورس-اسمیل در $D_iff^r(M)$ باز است.*

۲. *اگر $f \in D_iff^r(M)$ مورس-اسمیل باشد، آن‌گاه f ساختاراً پایدار است.*

۳. *مجموعه‌ی دیفیومورفیسم‌های مورس اسمیل برای $r \geq 1$ ، در $D_iff^r(S^1)$ چگال است.*

۷.۱ مفاهیم مربوط به اندازه

فرض کنیم X یک مجموعه باشد. یک خانواده A از زیرمجموعه‌های X را یک جبر خوانند

[۳۶] Morse-Smale

[۳۷] Morse Smale diffeomorphisms

اگر

$$X \in \mathcal{A},$$

$$A \in \mathcal{A} \Longrightarrow A^c \in \mathcal{A},$$

$$A, B \in \mathcal{A} \Longrightarrow A \cup B \in \mathcal{A}.$$

همچنین $\mathcal{A}$ را یک σ -جبر گویند اگر

$$A_i \in \mathcal{A}, i \geqslant 1 \Longrightarrow U_i A_i \in \mathcal{A}.$$

اگر A خانواده‌ای از زیرمجموعه‌های X باشد آن‌گاه $\mathcal{A}$ را تولید شده توسط A_0 گویند هرگاه $A_0 \subset \mathcal{A}$ و هر σ -جبر $\mathcal{A}'$ از زیرمجموعه‌های X شامل A_0 باشد.

اگر A یک جبر از زیرمجموعه‌های X باشد آن‌گاه $\mu : \mathcal{A} \longrightarrow [0, +\infty]$ را یک اندازه[38] می‌گوییم اگر برای هر خانواده $(A_i)_{i\geqslant 1}$ از زیرمجموعه‌های مجزای X به قسمی‌که $A_i \in \mathcal{A}$ و $\bigcup_{i\geqslant 1} A_i \in \mathcal{A}$ ، رابطه‌ی زیر را داشته باشیم:

$$\mu(\bigcup_{i\geqslant 1} A_i) = \sum_{i\geqslant 1} \mu(A_i).$$

اگر X یک فضای توپولوژیکی باشد، σ - جبر بورل از X را σ -جبر تولید شده توسط خانواده‌ای از مجموعه‌های باز X تعریف می‌کنیم. هر مجموعه در σ -جبر بورل X را یک زیرمجموعه‌ی بورل از X نامیم. یک نگاشت $T : X \longrightarrow Y$ را اندازه‌پذیر گوییم اگر برای هر $B \in \mathcal{B}$، $T^{-1}(B) \in \mathcal{A}$.

$A \in \mathcal{A}$ داشته باشیم $\mu(A) = \mu(T^{-1}(A))$.

[38] measure