بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه آزاد اسلامي

واحد تهران مركزي

دانشكده علوم پايه،گروه رياضي

پايان نامه براي دريافت درجه كارشناسی ارشد(M.Sc)

گرايش : رياضي كابردي

عنوان:

روش تكرار تغييراتي براي حل مسائل مقدار مرزي مرتبه دوازدهم بااستفاده از چند جمله اي هاي خي .

استاد راهنما

دكتر محمدعلي فريبرزي عراقي

استاد مشاور

دكتر مجيد اميرفخريان

پژوهشگر:

مریم مردان رمجی

زمستان 90

Islamic AZAD University

Central Tehran Branch

Faculty of Sciences Departement of Mathematics

M.Sc"Thesis"

On Applied Mathematics-Numerical Analysis

Subject:

Variational Iteration Method For Solving Twelfth-Order Boundary-Value Problems Using Hes Polynomials

Supervisor:

Dr.MohammadAli Fariborzi Araghi

Advisor:

Dr. Majid AmirFakhrian

By:

Maryam Mardan Ramaji

Winter 2012

تقدير و تشكر

فيض روح القدس ار باز مدد فرمايد   ديگران هم بكنند آنچه مسيحا مي كرد

حمد و سپاس بيكران من تقديم خداوند متعال كه ادامه ي تحصيل را قسمت من گردانيد و در تمام مراحل اين پايان نامه عنايت ويژه به من داشتندوبالطف بي كرانش اين كاربه سرانجام رسيده است.

درابتدا لازم مي دانم كه از استاد فرزانه جناب آقاي دكترمحمدعلي فريبرزي عراقي كه بر بنده منت گذاشتند و راهنمايي اين پايان نامه رابرعهده گرفتند صميمانه تشكر بنمايم.با راهنمايي هاي ارزنده ايشان مشكلات زيادي ازپايان نامه حل شد.

لازم مي دانم كه از استاد ارجمند جناب آقاي دكتر حجت اله اديبي   كه قبول زحمت كردند و داوري پايان نامه را برعهده گرفتند ودر بازبيني واصلاح متن پايان نامه راهنمايي هاي ارزنده اي نمودند كمال تشكر را بنمايم.

تشكر و سپاس فراوان از جناب آقاي دكترمجيداميرفخريان دارم كه همواره با گشاده رويي كمك زيادي به بنده نمودند.

برخود لازم مي دانم ازكليه ي كاركنان دانشكده و دوستان وعزيزاني كه هريك به نحوي بنده راموردلطف قرارداده ودربه سرانجام رساندن اين پايان نامه ياري كردند قدرداني وسپاس گزاري بنمايم.

وتشكر ويژه از همسر وپسرم كه با بزرگواري فراوان غيبت هاي مكرر بنده درجمع خانواده را پذيرفتند و درادامه تحصيل وپژوهش همواره مرا ياري كردند.

همچنين از پدر و مادرم به خاطر زحمات زيادي كه برايم در طول تحصبلم كشيدند قدرداني مي كنم.

تقدیم

به

همسر و پسرم

فهرست مطالب

چکیده :

دراین پایان نامه، روش تکراري تغییراتي رابا استفاده ازچندجمله اي هاي" خي" (VIMHP) براي حل مسائل مقدار مرزي مرتبه دوازهم موردبحث وبررسي قرارمي دهیم.
روش پیشنهادي، ترکیبي ازروش هاي تکراري تغییراتي واختلال هموتوپي مي باشد.الگوریتم پیشنهادي، کاملا کارا بوده وبراي استفاده عملي دراین گونه مسائل بسیارمناسب مي باشد.
طرح پیشنهاد شده، جواب رابدون استفاده از هرگونه گسسته سازي، خطي سازي یامفروضات محدودکننده پیدا مي کند.
براي بررسي اعتبارواثربخشي این روش چند مثال آورده شده است.درواقع تکنیك پیشنهادي، مسائل غیرخطي را بدون استفاده از چندجمله اي هاي آدومیان حل مي کند که مي تواند به عنوان مزیت آشکار این الگوریتم نسبت به روش تجزیه درنظرگرفته شود .

مقدمه:
مسائلي كه پيرامون ما قراردارند مي توانندبه صورت خطي يا غيرخطي باشند. حل مسائل خطي بعد از پيدايش ابررايانه هاي ديجيتالي باكارآيي وعملكردبسيار بالا، ساده شده است و ما مشكل چنداني براي يافتن جواب مسائل خطي نداريم و حل يك مسأله خطي آسان تر شده است. اما به طور كلي حل مسائل غيرخطي هنوز مشكل و پيچيده است ودر حالت كلي به‌دست آوردن جواب تحليلي و دقيق براي مسائل غيرخطي، بسيار مشكل و گاهي غير ممكن است. پس بايد مسائل غيرخطي را با روش‌هاي تحليلي تقريبي مناسبي حل كنيم. به واسطه داشتن ابركامپيوترهايي با دقت بالا و محاسبات با ارقام زياد و نرم افزارهاي محاسباتي عالي مانند Maple و Matlab و Mathematica و غيره، مي توان تقريب عددي مناسبي را براي جواب مسائل غيرخطي محاسبه نمود .روش هاي عددي اغلب در مسائل غيرخطي بادامنه محاسباتي پيچيده مي توانند به كار گرفته شوندوكاربرد زيادي دارندولي روش هاي تقريبي بادامنه محاسباتي ساده سرو كار دارند.وقتي يك مسأله غيرخطي شامل جواب‌هاي تكين باشد يا جواب‌هاي چندگانه داشته باشد آن گاه دشواري‌هاي بيشتر روش هاي عددي ظاهر مي‌شوند.بنابراين روش هاي عددي و تقريبي مكمل يكديگر مي باشند [47-28].
در اين رساله ازروش تحليلي تقريبي بانام روش تكراري تغييراتي بااستفاده ازچندجمله اي هاي"خي" [1]براي مسائل مقدار مرزي مرتبه دوازدهم استفاده مي كنيم.اين روش ابزار بسيار قوي براي حل مسائل غير خطي در مهندسي مي باشد[76-25].
منشأروش تكراري تغييراتي را مي توان به "مورا"[2] و" اينوكوتي" [3] و "سكاين" [4] نسبت داد [56] .ودرسال1987 توسط اينوكوتي و همكارانش براي مسائل غير خطي مطرح شد[48] . امامنشأ واقعي اين تكنيك توسط "خي" كشف شد[47-42].
علاوه براين" خي" متوجه اهميت فيزيكي روش تكراري تغييراتي وسازگاري آن بامسائل فيزيكي شد و به كارگيري اين روش براي دسته وسيعي ازمعادلات ديفرانسيل تصادفي ياجبري (قطعي)، جزئي، معمولي غيرخطي وخطي اميدواري زيادي ايجادكرد [22-16] .

1-J.H.He

2-Mura

3-Inokuti

4-Sekin

روش اختلال هموتوپي هم توسط" خي "بااستفاده ازادغام دوروش اختلال وهموتوپي استاندارد توسعه يافت.روش هاي اختلال هموتوپي وتكراري تغييراتي دردسته گسترده اي از معادلات تابعي اعمال شده است.دراين روش ها درسري نامتناهي راه حلي ارائه شده، كه معمولا به همگرايي دقيق انجاميده است .[9-11,15,34-40,64-86]

دركار بعدي "قرباني"[5] وهمكارانش ازجملات غيرخطي دريك سري از چندجمله اي ها كه آن ها را چندجمله اي هاي" خي" ناميده اند، استفاده كردند[34-23].

دراين پايان نامه، ماروش تكراري تغييراتي را باچندجمله اي هاي خي پيوند مي دهيم تا مسائل مقدارمرزي مرتبه دوازدهم رابااستفاده از روش تكراري تغييراتي بااستفاده از چند جمله اي هاي خي(VIMHP) حل كنيم.دراين تكنيك تابعك تصحيح توسعه داده شده است[15,16-57,69-86].

وضريب لاگرانژ[6] ازطريق نظريه تغييراتي به صورت بهينه محاسبه مي شود.استفاده از ضريب لاگرانژ ميزان موفقيت عملگرانتگرال راافزايش داده وحجم بسيارزياد عمليات را كاهش مي دهد[14].

اين پايان نامه شامل 4 فصل مي باشد.

درفصل اول تعاريف و مفاهيم اوليه اي كه دراين پايان نامه موردنياز است رابيان مي كنيم.

در فصل دوم با روش تكراري تغييراتي (VIM) آشنا مي شويم.ومسايل مقدارمرزي مرتبه هاي اول ودوم و چهارم خطي وغيرخطي رابا استفاده از اين روش حل مي كنيم.

در فصل سوم باروش اختلال هموتوپي (HPM) آشنا مي شويم. وچند مثال ساده ويك مسئله مقدار مرزي مرتبه ششم رابا استفاده از اين روش حل مي كنيم.

درفصل چهارم روش تكراري تغييراتي با استفاده از چندجمله اي هاي " خي" (VIMHP) را بيان مي كنيم.ودو مسئله مقدار مرزي مرتبه دوازدهم رابا استفاده از اين روش حل مي كنيم.

5-Ghorbani

6-Lagrange

فصل اول

تعاریف ومفاهیم اولیه

دراين فصل كوشش ما بر اين است كه دورنمايي از معادلات را پيش رو قرار دهيم.در ابتدا بامعادلات ديفرانسيل آشنا مي شويم.سپس بااستفاده از چند تعريف، روي معادلات ديفرانسيل معمولي بحث خود رامتمركز مي كنيم. بررسي معادلات ديفرانسيل معمولي خطي وغيرخطي توجه بسياري از دانشمندان وریاضي دان ها را به خود جلب كرده وامروزه بررسي اين معادلات هم چنان زمينه اي پويا مي باشد.
مطالب اين فصل از منابع[1-6-51] گرفته شده است.

1-1 آشنايي با معادلات ديفرانسيل

بسياري ازمسا ئل مهم واساسي درعلوم طبيعي ،مهندسي، وعلوم اجتماعي و.... را مي توان به زبان رياضي بيان كرد وآن ها را مدلسازي كرد . اگراين بيان به معادله اي منتهي مي شود كه شامل مشتق يا مشتق هايي ازتابع مجهول باشد،به چنين معادله اي معادله ديفرانسيل مي گويند.
به عنوان مثال يكي از قوانين بسيار مهم در فيزيك يعني قانون نيوتن در زير مدلسازي شده است.

$$F= m\, a \tag{1.1}$$

قوانين اساسي فيزيك وروابطي كه بايد بين كميت ها وجودداشته باشد ، مارا براي نوشتن معادلاتي توانمند

مي سازد كه علامت هاي رياضي نشان دهنده رابطه بين آن هاست.

اگر $u(t)$ مكان ذره اي درلحظه t باشد كه جرمش m است وبه آن نيروي F وارد مي شود، آنگاه داريم:

$$F[t,u,\frac{du}{dt}] = m\,\frac{d^2u}{dt^2} \tag{1.2}$$

كه درآن نيروي F تابعي از t وu و $\frac{du}{dt}$ مي باشد.براي تعيين حركت ذره اي كه درمعرض نيروي F قرار دارد بايدتابع u كه درمعادله فوق صدق مي كند را به دست آوريم.كه اين امر با حل معادله ديفرانسيل(1.2) محقق خواهدشد.
اكنون اگربخواهيم معادلات ديفرانسيل را تقسيم بندي كنيم،طبق يك تقسيم بندي معادلات ديفرانسيل به دو نوع معمولي وجزيي تقسيم مي شوند. موضوع مورد بحث ما معادلات ديفرانسيل معمولي مي باشد.

2-1 چندتعریف درمورد مفاهیم اولیه معادلات دیفرانسیل

اکنون به تعریف مفاهیم اولیه معادلات دیفرانسیل مي پردازیم.

تعریف 1-2-1

معادله اي كه شامل يك متغيروابسته ومشتقاتش نسبت به يك ياچندمتغيرمستقل باشد، معادله ديفرانسيل ناميده مي شود.

تعریف 1-2-2

معادله شامل يك متغيرمستقل x، تابع y=f(x) ومشتقات f نسبت به x، را يك معادله ديفرانسيل معمولي مي ناميم.

مثال 1-1

دو نمونه از معادله ديفرانسيل معمولي به صورت زيرمي باشد:

$$1)\quad \frac{d^3u(x)}{d\,x^3} - 10\frac{d^2u(x)}{d\,x^2} + 8\frac{d\,u(x)}{d\,x} = 0 \qquad (1.3)$$

$$2)\quad L\,\frac{d^2\,Q(t)}{d\,t^2} + R\,\frac{d\,Q(t)}{d\,t} + \frac{1}{C}\,Q(t) = E(t) \qquad (1.4)$$

كه در نمونه دوم ، Q(t) بارروي خازن مداري با ظرفيت C القاكنايي(اندوكتانس) L ومقاومت R است كه ولتاژ E(t) به آن اعمال شده است.
هدف از حل معادلـه ديفرانسـيل، يـافتن تـابعي اسـت كـه بـه ازاي هـر متغيـر مسـتقل مانند x يـا t يـا.... درمعادله صدق كند.

تعریف1-2-3

بزرگترين مرتبه مشتق دريك معادله ديفرانسيل را **مرتبه** آن معادله ديفرانسيل مي نامند.

تعریف 1-2-4

توان مشتق با بالاترين مرتبه آن را **درجه** معادله ديفرانسيل مي نامند.

مثال 1-2

مرتبه ودرجه معادلات ديفرانسيل زيررا تعيين مي كنيم.

$$1)\quad y'' + (y')^2 - 2y = 0 \qquad (1.5)$$

معادله(1.5) يك معادله ديفرا نسيل معمولي مرتبه دوم ودرجه اول مي باشد.زيرا "y با توان يك داريم.

$$2)\quad 4(y'')^3 - 2(y')^4 + 10x = 0 \qquad (1.6)$$

معادله (1.6)يك معادله ديفرانسيل معمولي مرتبه دوم ودرجه سوم مي باشد.[1]

3-1 معادلات ديفرانسيل مراتب بالاتر[1]

در حالت كلي معادله ديفرانسيل مرتبه دوم به يكي از دو صورت زيرنوشته مي شود .

$$1)\ F\left(x\,,y\,,\frac{dy}{dx}\,,\frac{d^2y}{dx^2}\right)=0 \qquad (1.7)$$

$$2)\ y''(x) = f(x,y,y') \qquad (1.8)$$

معمولاً معادلات درجه دوم را مي‌توان با يك تغييرمتغير مناسب مانند $\frac{dy}{dx}=t$ به معادلات ديفرانسيل نوع اول تبديل كرد و با جايگذاري در معادله مربوطه بااستفاده از روش معادلات ديفرانسيل مرتبه اول حل كرد.

به همين ترتيب معادلات ديفرانسيل مرتبه هاي بالاتر راداريم.

به عنوان مثال در حالت كلي معادله ديفرانسيل مرتبه سوم ،چهارم ،ششم، ... ، دوازدهم به صورت زير است:

3) $y^{(3)}(x) = f(x, y, y', y'')$ مرتبه سوم (1.9)

4) $y^{(4)}(x) = f(x, y, y', y'', y^{(3)})$ مرتبه چهارم (1.10)

5) $y^{(6)}(x) = f(x, y, y', y'', y^{(3)}, y^{(4)}, y^{(5)})$ مرتبه ششم (1.11)

6) $y^{(8)}(x) = f\left(x\,,y\,,y'\,,y''\,,y'''\,,y^{(4)}\,,y^{(5)},y^{(6)}\,,y^{(7)}\right)$ مرتبه هشتم (1.12)

7) $y^{(12)}(x) = f\left(x\,,y\,,y'\,,y''\,,y'''\,,y^{(4)}\,,y^{(5)},y^{(6)}\,,y^{(7)},y^{(8)},y^{(9)},y^{(10)}y^{(11)}\right)$ (1.13)
مرتبه دوازدهم

4-1 معادلات ديفرانسيل خطي وغير خطي

به طور كلي هر معادله ديفرانسيل خطي مرتبه nام همگن يا غيرهمگن به صورت زير مي باشد:

$$a_n(x)\,y^{(n)} - a_{n-1}(x)\,y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)\,y^{(1)} + a_0(x)\,y^{(0)} = f(x) \qquad (1.14)$$

كه در آن توابع $a_1(x)$ و $a_2(x)$ و . . . و $a_n(x)$ و $f(x)$ بر بازه I پيوسته بوده و $a_n(x)$ مخالف صفر مي باشد.

اگر در تعريف(1.14) مقدار $f(x)$ صفر باشد معادله را همگن و در غير اين صورت معادله را ناهمگن مي‌گويند.

و هر معادله ديفرانسيل كه خطي نباشد غير خطي است.

مثال3-1 : معادله زير يك معادله ديفرانسيل مرتبه پنجم خطي همگن است.

$$y^{(5)}(x) = y - 15e^x - 10xe^x \qquad (1.15)$$

مثال4-1

معادله زير يك معادله ديفرانسيل مرتبه چهارم غير خطي است.

$$u^{(4)} = u^2 - x^{10} + 4x^9 - 4x^8 - 4x^7 + 8x^6 - 4x^4 + 120x - 48 \qquad (1.16)$$

5-1 دستگاه هاي معادلات ديفرانسيل براي معادلات مرتبه بالاتر: [1]

اين قسمت مقدمه اي بر حل عددي معادلات ديفرانسيل مرتبه بالاتر تحت شرايط اوليه است.
روش هاي مورد بحث ، مربوط به آن هايي است كه يك معادله مرتبه بالاتر از يك ، را به دستگاهي از معادلات ديفرانسيل مرتبه اول تبديل ميكند.
در ابتدا چند تعريف را ارائه مي دهيم.

تعريف : [47] گوييم تابع $f(x, y_1, y_2, \cdots, y_m)$ تعريف شده بر مجموعهي

$$D = \{(x, u_1, u_2, \cdots, u_m) | a \le x \le b, -\infty < u_i < \infty, \text{به ازاي هر } i = 1,2,3, \cdots, m\}$$

در شرط ليپ شيتس بر D با متغيرهاي $u_1, u_2, \cdots, u_m$ صدق ميكند اگر ثابتي مانند $L > 0$ با خاصيت زير وجود داشته باشد :

به ازاي هر $(x, z_1, z_2, \cdots, z_m)$ و $(x, u_1, u_2, \cdots, u_m)$ در D ،

$$|f(x, u_1, u_2, \cdots, u_m) - f(x, z_1, z_2, \cdots, z_m)| \le L \sum_{j=1}^{m} |u_j - z_j| .$$

با استفاده از قضيه مقدار ميانگين ميتوان نشان داد كه هرگاه f و مشتقات جزئي اول آن در D پيوسته بوده و به ازاي هر $i = 1,2,3, \cdots, m$ و هر $(x, u_1, u_2, \cdots, u_m)$ در D

$$\left| \frac{\partial f(x, u_1, u_2, \cdots, u_m)}{\partial u_i} \right| \le L$$

آنگاه f در شرط ليپ شيتس بر D با ثابت ليپ شيتس L صدق ميكند.

قضيه : [1] فرض كنيم :

$$D = \{(x, u_1, u_2, \cdots, u_m) | a \le x \le b, -\infty < u_i < \infty, \forall\, i = 1,2,3, \cdots, m\}$$

و نيز $f_i(x, u_1, u_2, \cdots, u_m)$ ، به ازاي هر $i = 1,2,3, \cdots, m$ ، در D پيوسته و بر آن در شرط ليپ شيتس صدق كنند.در اين صورت ،دستگاه معادلات ديفرانسيل مرتبه اول (1.17) تحت شرايط اوليه آن (1.18) داراي جواب منحصر به فرد $u_1(x), u_2(x), \cdots, u_m(x)$ ، به ازاي $a \le x \le b$ است .

يك دستگاه مرتبهي m ام از مسائل مقدار اوليه مرتبه اول را ميتوان به صورت زير بيان كرد:

$$\begin{cases} \dfrac{du_1}{dx} = f_1(x, u_1, u_2, \cdots, u_m), \\ \dfrac{du_2}{dx} = f_2(x, u_1, u_2, \cdots, u_m), \\ \vdots \\ \dfrac{du_m}{dx} = f_m(x, u_1, u_2, \cdots, u_m), \end{cases} \qquad (1.17)$$

به ازاي $a \le x \le b$ ، با شرايط اوليه:

$$\begin{cases} u_1(a) = \alpha_1 , \\ u_2(a) = \alpha_2 , \\ \vdots \\ u_m(a) = \alpha_m . \end{cases} \qquad (1.18)$$

هدف، تعيين m تابع $u_1(x),\ u_2(x), \cdots, u_m(x)$ است که در دستگاه معادلات ديفرانسيل و شرايط اوليه صدق کنند.[1]
براي تحويل يك معادله ديفرانسيل مرتبه m ام كلي به شكل
$$y^{(m)}(x) = f\left(x, y , y', \cdots , y^{(m-1)}\right), \qquad a \le x \le b ,$$

با شرايط اوليه $y(a) = \alpha_1\ ,\ y'(x) = \alpha_2\ , \cdots ,\ y^{(m-1)}(x) = \alpha_m$ به يك دستگاه معادلات به صورت (1.17) و (1.18) ، فرض مي‌كنيم:

$$u_1(x) = y(x) \quad , u_2(x) = y'(x), \qquad \cdots \quad , \quad u_m(x) = y^{(m-1)}(x)$$

با اين نمادها ، دستگاه مرتبه اول :

$$\begin{cases} \dfrac{du_1}{dx} = \dfrac{dy}{dx} = u_2 \quad , \\ \dfrac{du_2}{dx} = \dfrac{dy'}{dx} = u_3 \quad , \\ \vdots \\ \dfrac{du_m}{dx} = \dfrac{dy^{(m-1)}}{dx} = y^{(m)} = f\left(x, y , y', \cdots , y^{(m-1)}\right) = f(x , u_1, u_2, \cdots , u_m). \end{cases} \qquad (1.19)$$

با شرايط اوليه زير به دست مي آيد :

$$\begin{cases} u_1(a) = y(a) = \alpha_1 , \\ u_2(a) = y'(a) = \alpha_2 \ , \\ \vdots \\ u_m(a) = y^{(m-1)}(a) = \alpha_m . \end{cases} \qquad (1.20)$$

پس در واقع روش‌هاي حل دستگاه هاي معادلات ديفرانسيل مرتبه اول همان تعميم روش هاي حل يك معادله مرتبه اول ا ست.
مادر اين رساله براي رسيدن به جواب بعضي از مسايل، به حل دستگاه ها نياز پيدا مي كنيم. براي حل دستگاه معادلات چهارمعادله چهارمجهولي به بالا از نرم افزارMatlab مي توان استفاده كرد.

فصل دوم

معرفي

روش تكراري تغييراتي

(VIM)

1-2 مقدمه

اخيرا"روش هاي متعددي براي حل معادلات ديفرانسيل غير خطي معمولي وجزئي پيدا شده است مانند روش هاي تجزيه،اختلال،اختلال هموتوپي و.... اما روش تكراري تغيير پذيررا دانشمندان و پژوهشگران بيشتر مورد مطالعه قرارداده اند كه منجر به تكامل اين روش شده است. وزواز [7]، موميني[8]، اديبات [9]ودهقان[10] رياضي داناني بودند كه براي تكامل روش، زحمات زيادي كشيدند.به عنوان نمونه وزواز روش تجزيه آدميان را براي حل مسايل مقدار مرزي مراتب بالا به كار برده است.[76]

روش تكراري تغييرپذير(VIM) براساس روش ضريب لاگرانژ،متغيرهاي محدودشده وتابعك تصحيح است.كه به وسيله رياضي دان چيني "جي هوان خي"به صورت اصلاحي از روش ضريب عمومي لاگرانژ مطرح شد واتسالا[11] و كالابا-بلمان[12] از اين روش براي حل مسائل مقدار مرزي در معادلات ديفرانسيل معمولي و با مشتقات جزئي در مسائل مهندسي و مكانيك جامدات و.....استفاده كردند.[14] اخيرا"بسياري از محققين براي اين روش كاربردهاي گسترده اي در حوزه هاي مختلف پيدا كردند. وخواص فوق العاده اي را مورد استفاده قرار دادند.[14]

در اين بخش در ابتدا ضريب عمومي لاگرانژ را معرفي مي كنيم سپس اساس روش(VIM) را شرح مي دهيم.

7-Wazwaz

8-Momaini

9-Odibat

10-Dehghan

11-Vatsala

12-Kalaba-Belman

2-2 مفاهيم اساسي روش تكراري تغييرپذير

2-2-1 ضريب عمومي لاگرانژ(λ) [12]

مي دانيم ضريب لاگرانژ دربهينه سازي وحساب تغييرات فايده زيادي دارد.اينوكوتي و همكارانش يك روش از ضريب عمومي لاگرانژ را پيشنهاد كردند.

براي به دست آوردن ضريب عمومي لاگرانژ ،معادله جبري زير را در نظر مي گيريم.

$$f(x)=0 \quad , \quad x\in R \tag{2.1}$$

اگر x_n تقريبي از ريشه هاي معادله(2.1) باشد،آن گاه داريم :

$$f(x_n) \neq 0 \tag{2.2}$$

براي بالا بردن دقت ،معادله تصحيح كننده زير راداريم:

$$x_{n+1}=x_n+\lambda f(x_n) \tag{2.3}$$

كه λ ضريب عمومي لاگرانژ مي باشد.

اگر از طرفين معادله(2.3) نسبت به x_n مشتق بگيريم و قراردهيم:

$$\frac{dx_{n+1}}{dx_n}=0 \tag{2.4}$$

مي توانيم مقداربهينه λ را به صورت زير تعيين كنيم .

$$\frac{dx_{n+1}}{dx_n}=1+\lambda f'(x_n) \quad \overset{(2.4)}{\Longrightarrow} \quad 1+\lambda f'(x_n)=0 \quad \Longrightarrow \quad \lambda=-\frac{1}{f'(x_n)} \tag{2.5}$$

حال λ به دست آمده را در معادله (2.3) جايگذاري مي كنيم.

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad , \quad f'(x_n)\neq 0 \tag{2.6}$$

معادله (2.6) "رابطه تكراري نيوتن" ناميده مي شود.

هرچه $f'(x_n)$ به صفر نزديك تر شود ، مقداربيشتري ازx_n كم شده و در نتيجه خطا بيشتر مي شود.

مثال 2-1

معادله جبري زير را در نظر مي گيريم :

$$f(x)=x^2-2x+1$$

ريشه اين معادله $x=1$ مي باشد.فرض مي كنيم $x_n = 1.1$ ريشه تقريبي معادله فوق باشد.

براي تعيينλ بهينه به صورت زير عمل مي كنيم:

$$f(x_n)=x_n^{\,2}-2x_n+10 \;\Longrightarrow\; \frac{df(x_n)}{dx_n}=f'(x_n)=2x_n-2 \;\Longrightarrow\; \lambda=-\frac{1}{f'(x_n)}=\frac{-1}{2x_n-2}$$

$$\Longrightarrow \lambda=\frac{-1}{2(1.1)-2}\cong -0.45$$

حال براي تعيين x_{n+1} ، معادله تصحيح شده زير رابا λ بهينه فوق مي نويسيم:

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \;\Longrightarrow\; x_{n+1}=1.1-[0.45(1.1^2-2(1.1)+1)] \cong 1.095$$

پس اگر $x_1 = 1.1$ باشد، $x_2 \cong 1.095$ به همين ترتيب $x_3 \cong 1.04$ و.....

مشاهده مي شودبا λ بهينه تعيين شده، در هر مرحله ميزان خطا كم تر شده و جواب تقريبي به جواب دقيق نزديك تر مي شود.

البته براي ايجاد معادله اصلاح شده، روش هاي ديگري نيز وجود داردكه ما يك حالت تصحيح شده براي x_n رابيان مي كنيم.

با استفاده از روش هاي جايگزيني ، اگر معادله (2.3) رابا يك تابع معين كمكي مانند $g(x_n)$ در نظر بگيريم ، به يك معادله اصلاح شده خواهيم رسيد.

$$x_{n+1}=x_n + \lambda\, g(x_n)\, f(x_n) \tag{2.7}$$

حال اگر از طرفين معادله (2.7) نسبت به x_n مشتق بگيريم و $\frac{dx_{n+1}}{dx_n}=0$ قراردهيم، مي توانيم مقدار بهينه λ را به صورت زير تعيين كنيم .

$$\frac{dx_{n+1}}{dx_n} = 1+\lambda\, g'(x_n)f(x_n) + \lambda\, g(x_n)f'(x_n) \quad \Longrightarrow$$

$$1+\lambda\, g'(x_n)f(x_n) + \lambda\, g(x_n)f'(x_n)= 0 \quad \Longrightarrow \lambda = -\frac{1}{g'(x_n)f(x_n)+ g(x_n)f'(x_n)} \tag{2.8}$$

$$\left(\lambda = -\frac{1}{g'f+f'g} \Longrightarrow \lambda = \frac{-1}{(gf)'} \right)$$

حال λ به دست آمده را در معادله (2.7) جايگذاري مي كنيم.

$$x_{n+1}=x_n - \frac{f(x_n)g(x_n)}{g'(x_n)f(x_n)+ g(x_n)f'(x_n)} \tag{2.9}$$

مقدار تابع كمكي در طي هر تكرار نبايد صفرباشد يا مقدار كوچكي داشته باشد.

لذا براي $g(x_n)$ شرط: $|g(x_n)| > 1$ را بايد داشته باشيم.

اكنون اگر قرار دهيم $g(x_n) = \exp(-\alpha x_n)$ به طوري كه $\alpha > 0$ باشد،آن گاه فرمول تكراري (2.9) با فرمول تكراري زير جايگزين مي شود.

$$x_{n+1}=x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)-\alpha f(x_n)} \tag{2.10}$$

زيرا:

$$[g(x_n) = \exp(-\alpha x_n) \Longrightarrow g'(x_n) = -\alpha \exp(-\alpha x_n)]$$

$$x_{n+1}=x_n - \frac{f(x_n)g(x_n)}{g'(x_n)f(x_n)+ g(x_n)f'(x_n)} \Longrightarrow \frac{\exp\cancel{(-\alpha x_n)}f(x_n)}{-\alpha\exp\cancel{(-\alpha x_n)}\, f(x_n)+ \exp\cancel{(-\alpha x_n)}f'(x_n)}$$

$$\Longrightarrow \quad x_{n+1}=x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)-\alpha f(x_n)}$$