

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ



دانشگاه سمنان

دانشکده ریاضی، آمار و علوم کامپیوتر

پایان نامه برای دریافت درجه کارشناسی ارشد ریاضی محض (آنالیز)

مدل ریاضی اپیدمی آنفولانزای پرندگان

توسط:

محمد رضا حسین پور

استاد راهنما:

دکتر رضا معمارباشی

استاد مشاور:

دکتر فریدون حبیبیان دهکردی

مهر ۱۳۹۳

تقدیم با بوسه بر دستان پدرم:
به او که نمی دانم از بزرگی اش بگویم یا مردانگی، سخاوت، سکوت، مهربانی...
پدرم راه تمام زندگی پدرم و نخوشی همیشگیست

و تقدیم به مادر عزیزتر از جانم:
مادم، هستی من ز هستی توست تا هستی و هستم دارم دوست
گلزار جاودانگی مادراست
چشم سار جاودانگی مادراست

تقدیم به همسر من:
به پاس قدردانی از قلبی آکنده از عشق و معرفت که محیطی سرشار از سلامت و امنیت و آرامش و آسایش برای من فراهم آورده
است
همدی که با واژه سی نجیب و مغرور تلاش؛ آشنایی دارد و تلاش راستین را می شناسد و عطر رویایی آن را استشمام می کند و مراد راه رسیدن
به اهداف عالی یاری می رساند

کلیه حقوق مادی و معنوی اعم از چاپ، تکثیر، نسخه برداری، ترجمه، اقتباس و ... از این پایان نامه برای دانشگاه سمنان محفوظ است. نقل مطالب با ذکر منبع بلامانع است.

قدردانی

سپاس خدای را که سخنوران، دستودن او بماند و شمارندگان، شردن نعمت های او ندانند و کوشندگان، حق او را کزاردن نتوانند. و دور دور بر محمد و خاندان پاک او، طاهران معصوم، هم آنان که وجودمان و مدار وجودشان است؛ و نفرین پیوسته بردشمنان ایشان تا روز رستاخیز... بدون شک جایگاه و منزلت معلم، اجل از آن است که در مقام قدردانی از زحمات بی شائبه ی او، بازبان قاصود دست ناتوان، چیزی بنگاریم. اما از آنجایی که تجلیل از معلم، سپاس از انسانی است که هدف و غایت آفرینش را تا این می کند و سلامت امانت بانی را که بدستش سپرده اند، تضمین؛ بر حسب وظیفه و از باب "من لم یسکر المنعم من المخلوقین لم یسکر الله عزوجل": از پدر و مادر عزیزم این دو معلم بزرگوارم که همواره بر کوتاهی و درستی من، قلم عفو کشیده و کریمانه از کنار غفلت هایم گذشته اند و در تمام عرصه های زندگی یار و یاور بی چشم داشت برای من بوده اند؛ از صبر و سکینایی، همسرم؛ از اساد با کمال و شایسته؛ جناب آقای دکتر رضا معارباشی که در کمال سع صدر، با حسن خلق و فروتنی، از پیچ کجی در این عرصه بر من دریغ ننمودند و زحمت را بهمانی این پایان نامه را بر عهده گرفتند؛ از اساد صبور و باتقوا، جناب آقای دکتر فریدون حسینیان دهلرودی که زحمت مشاوره این پایان نامه را در حالی متقبل شدند که بدون مساعدت ایشان، این پروژه به نتیجه مطلوب نمی رسید؛ و از اساتید فرزانه و دلسوز؛ جناب آقایان دکتر علی غفاری و دکتر مجید اسحاقی که جی که زحمت داور این پایان نامه را متقبل شدند؛ کمال تشکر و قدردانی را دارم.

باشد که این خردترین، بخشی از زحمات آنان را سپاس گوید.

با تشکر فراوان
محمد رضا حسین پور

چکیده

در این پایان نامه، یک مدل ریاضی از گسترش آنفولانزای مرغی به دنیای پرندگان و دنیای انسان بررسی و تجزیه و تحلیل شده است. مدل ریاضی موجود به عفونت انسان به وسیله آنفولانزای مرغی مشترک بین انسان و پرندگان می پردازد. تجزیه و تحلیل پایداری و رفتار دراز مدت این بیماری به وسیله شبیه سازی با مقادیر پارامترهای مختلف انجام شده است.

واژه‌های کلیدی: آنفولانزای مرغی، مدل ریاضی، تجزیه و تحلیل پایداری

فهرست مطالب

پیشگفتار

۱ مفاهیم و مقدمات

۱	وجود جواب در معادلات دیفرانسیل	۱-۱
۲	شرایط یکتایی	۲-۱
۲	توسیع جواب	۳-۱
۳	شار	۴-۱
۳	پایداری	۵-۱

۲ مدل های SI و SIR

۶	مدل SI	۱-۲
۹	مدل تغییر یافته SI	۲-۲
۱۲	مدل SIR	۳-۲
۱۲	مدل اپیدمیک SIR	۱-۳-۲
۱۴	قضیه مقدار آستانه	۲-۳-۲
۲۲	مدل اصلاح شده (واکسیناسیون)	۳-۳-۲
۲۵	مدل بومی عمومی	۴-۲

۳ مدل ریاضی آنفولانزای مرغی

۳۲	مقدمه	۱-۳
۳۲	فرمول بندی مدل و تجزیه و تحلیل پایداری	۲-۳
۳۳	پارامترهای مدل	۱-۲-۳
۳۴	معادلات مربوط به مدل	۳-۳
۳۶	نقاط تعادلی	۴-۳
۳۹	پایداری	۵-۳

۴ مدل اپیدمی آنفولانزای مرغی انسان

۴۷	مقدمه	۱-۴
۴۷	مدل	۲-۴
۴۸	تجزیه و تحلیل	۳-۴
۵۲	تجزیه و تحلیل موضعی سیستم کامل	۴-۴
۵۵	شبیه سازی ها	۵-۴

کتابنامه

۷۴

واژه نامه فارسی به انگلیسی

۷۶

واژه نامه انگلیسی به فارسی

۷۸

پیشگفتار

مدل ریاضی یک بیماری مسری رفتار بیماری را در زمان شیوع به صورت کمی و دقیق توصیف می کند. به همین دلیل مدل‌های ریاضی اهمیت زیادی در کنترل بیماری های واگیر پیدا کرده اند. در واقع دانستن مشخصه های انتقال و شیوع بیماری های واگیر در جوامع و کشورها می تواند منجر به اعمال روش هایی برای کاهش ابتلا به این بیماری ها شود.

آنفولانزای مرغی یکی از بیماری های مسری مشترک بین انسان و پرندگان است که در هر سال تعداد زیادی از مردم به آن مبتلا می شوند. مطالعات نشان می دهد که تماس مستقیم با طیور بیمار منبع عفونت است و شواهدی از گسترش ویروس از فرد به فرد پیدا نشده است. این بیماری با گذر زمان دچار جهش شده است و نوع جهش یافته آن از انسان به انسان منتقل می شود.

این پایان نامه دارای ۴ فصل است که فصل اول به بیان مفاهیم و مقدمات اختصاص یافته است. در فصل دوم مدل های SI و SIR را مورد بررسی قرار داده ایم. در فصل سوم، مدل ریاضی آنفولانزای مرغی را مورد بررسی قرار داده ایم. در این فصل ما نقاط تعادل و پایداری را بررسی کرده ایم و نمونه هایی از مدار دستگاه به صورت عددی محاسبه شده اند. فصل چهارم نیز به مدل اپیدمی آنفولانزای مرغی - انسان اختصاص دارد که به مدل ها و شبیه سازی پرداخته ایم.

فصل ۱

مفاهیم و مقدمات

۱-۱ وجود جواب در معادلات دیفرانسیل

فرض کنید D مجموعه بازی از \mathbb{R}^{d+1} باشد و $f : D \rightarrow \mathbb{R}^d$ تابعی پیوسته باشد، همچنین فرض کنید I یک بازه باز باشد. در این صورت تابع برداری $\phi : I \rightarrow \mathbb{R}^d$ را یک جواب معادله ی

$$\dot{x} = f(t, x) \quad (1-1)$$

نامیم هرگاه $\phi(t)$ مشتق پذیر باشد و

$$\dot{\phi}(t) = f(t, \phi(t)), \quad (t \in I)$$

قضیه ۱-۱-۱. فرض کنید $x(t)$ تابع پیوسته بر بازه I باشد به طوری که برای $t \in I$ ، $(t, x(t)) \in D$. همچنین $\tau \in I$ را در نظر بگیرید. در این صورت $x(t)$ جواب (۱-۱) است اگر و فقط اگر

$$x(t) = x(\tau) + \int_{\tau}^t f(s, x(s)) ds$$

□

برهان. بدیهی است.

قضیه ۱-۲.۱. دستگاه (۱-۱) را در نظر بگیرید، فرض کنید D باز باشد و $f(t, x)$ بر D پیوسته باشد. در این صورت برای هر $(\tau, \zeta) \in D$ ، مسئله (۱-۱) دارای حداقل یک جواب گذرنده از نقطه (τ, ζ) است.

□

برهان. رجوع شود به قضیه (۱.۹) از [۱۹]

۲-۱ شرایط یکتایی

تعریف ۱-۱.۲. فرض کنید تابع $f(t, x)$ بر D پیوسته باشد. در این صورت $f(t, x)$ را بر D لپشیتزی می نامیم هرگاه ثابت $L > 0$ وجود داشته باشد، به طوری که برای (t, x) و (t, y) در D :

$$|f(t, x) - f(t, y)| \leq L |x - y|$$

تعریف ۱-۲.۲. f را بر D لپشیتزی موضعی نامیم هرگاه هر نقطه $z \in D$ دارای یک همسایگی $z \in U \subset D$ باشد که f بر U لپشیتزی باشد. فرض کنید f در D لپشیتزی باشد و $\phi_1(t)$ و $\phi_2(t)$ جواب هایی از $\dot{x} = f(t, x)$ بر D باشند و هر دو بر بازه I تعریف شده باشند، همچنین $\tau \in I$ موجود باشد که $\phi_1(\tau) = \phi_2(\tau)$. در این صورت برای هر $t \in I$ ، $\phi_1(t) = \phi_2(t)$.

قضیه ۱-۳.۲. اگر $\phi_1(t)$ و $\phi_2(t)$ جواب هایی از معادله (۱-۱) بر ناحیه D باشند و هر دو بر یک بازه I تعریف شده باشند، همچنین f بر D لپشیتزی موضعی باشد و $\tau \in I$ موجود باشد که $\phi_1(\tau) = \phi_2(\tau)$ ، آن گاه $\phi_1(t) = \phi_2(t)$ ، $\forall t \in I$.

□

برهان. رجوع شود به قضیه (۱.۱۱) از [۱۹]

۳-۱ توسیع جواب

تعریف ۱-۱.۳. جواب $x(t)$ با دامنه تعریف $I = (a, b)$ از معادله (۱-۱) را در نظر بگیرید، جواب $x_1(t)$ را توسیع $x(t)$ نامیم هرگاه بازه I تعریف $x_1(t)$ ، بازه ای مانند I_1 باشد که $I \subsetneq I_1$ و $x(t) = x_1(t)$ ، $\forall t \in I$. همچنین $x_1(t)$ را توسیع $x(t)$ به راست گوئیم هرگاه بر $I_1 = (a, b_1)$ تعریف شده باشد که $b_1 > b$ و

$$I_1 = (a, b) \text{ به طور مشابه تعریف می شود. } \forall t \in I; x(t) = x_1(t)$$

تعریف ۱-۲.۳. جواب $x(t)$ از معادله ی (۱-۱) را یک جواب ماکزیمال نامیم هرگاه قابل توسیع دادن نباشد، $x(t)$ را ماکزیمال راست نامیم هرگاه از راست قابل توسیع دادن نباشد و ماکزیمال چپ نامیم هرگاه از چپ قابل توسیع دادن نباشد.

گزاره ۱-۳.۳. فرض کنید $x(t)$ جوابی از معادله ی (۱-۱) بر $I = (a, b)$ با $b < \infty$ باشد، $x(t)$ توسیعی به راست دارد اگر و فقط اگر $\lim_{t \rightarrow b^-} x(t) = \psi$ و $(b, \psi) \in D$.

برهان. رجوع شود به قضیه (۱.۱۷) از [۱۹] □

قضیه ۱-۴.۳. فرض کنید $x(t)$ جوابی از معادله ی (۱-۱) بر $I = (a, b)$ با $b < \infty$ باشد. در این صورت توسیع ماکزیمالی از $x(t)$ به راست موجود است.

برهان. رجوع شود به قضیه (۱.۲۰) از [۱۹] □

۴-۱ شار

تعریف ۱-۱.۴. مجموعه باز $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ را در نظر بگیرید، تابع $\phi : \mathbb{R} \times \Omega \rightarrow \Omega$ را با شرایط زیر یک شار می نامیم

(الف) ϕ بر $\mathbb{R} \times \Omega$ پیوسته باشد؛

(ب) $\forall \zeta \in \Omega : \phi(0, \zeta) = \zeta$

(ج) $\forall \zeta \in \Omega, \forall t, s \in \mathbb{R}; \phi(t, \phi(s, \zeta)) = \phi(t + s, \zeta)$

گزاره ۱-۲.۴. فرض کنید $f(x)$ بر Ω لیپشیتزی موضعی باشد و $h : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^+$ پیوسته و لیپشیتزی موضعی باشد. در این صورت $\dot{x} = f(x)$ و $\dot{x} = h(x)f(x)$ مدارهای یکسانی دارند.

۵-۱ پایداری

تعریف ۱-۱.۵. فرض کنید $f : D \rightarrow \mathbb{R}^d$ و $x \in D$ ، مجموعه ی $\{x; f(x) = 0\}$ را مجموعه ی نقاط ثابت (نقاط ساکن) معادله $\dot{x} = f(x)$ نامیم.

تعریف ۱-۲.۵. در معادله ی $\dot{x} = f(x)$ که f بر Ω تعریف شده است، Ω را فضای فاز دستگاه نامیم. فضای فاز دستگاه و جواب گذرنده از Ω را تصویر فاز دستگاه نامیم.

تعریف ۱-۳.۵. زیر مجموعه ی $E \subseteq \mathbb{R}^k$ را تحت دستگاه (۱ - ۱) پایا نامیم هرگاه:

$$\forall x \in X, \forall t \in \mathbb{R}; \phi(t, x) \in E$$

تعریف ۱-۴.۵. نقطه ساکن ζ از دستگاه $\frac{dx}{dt} = f(x)$ را پایدار نامیم هرگاه برای هر $\delta > 0$ ، $\varepsilon > 0$ به گونه ای موجود باشد که:

$$\|x - \zeta\| < \delta \Rightarrow \|\phi(t, x) - \zeta\| < \varepsilon$$

در غیر این صورت آن را ناپایدار نامیم.
همچنین تعاریف زیر را داریم:

(۱) اگر $\gamma > 0$ ای باشد بطوری که برای هر x که $\|x - \zeta\| < \gamma$ داشته باشیم $\lim_{t \rightarrow \infty} \phi(t, x) = \zeta$ آن گاه ζ را نقطه جاذب نامیم.

(۲) اگر $\gamma = \infty$ ، ζ را جاذب سرتاسری نامیم.

(۳) اگر نقطه ζ پایدار و جاذب باشد آن را پایدار مجانبی نامیم.

تعریف ۱-۵.۵. فرض کنید Ω_0 همسایگی باز x^* باشد. تابع $V : \Omega_0 \rightarrow \mathbb{R}$ در x^* معین مثبت نامیده می شود هرگاه:

$$\text{الف) برای } x \in \Omega_0, V(x) \geq 0$$

$$\text{ب) } V(x) = 0 \text{ اگر و فقط اگر } x = x^*.$$

قضیه ۱-۶.۵. (روش لیاپانوف) دستگاه $\frac{dx}{dt} = f(x)$ و $E \subseteq \mathbb{R}^n$ ، $f \in C^1(E)$ را در نظر بگیرید، فرض کنیم تابع حقیقی مقدار $V : E \rightarrow \mathbb{R}$ موجود باشد به طوری که $V \in C^1(E)$ و در x^* معین مثبت باشد. در این صورت:

$$\text{الف) اگر } \dot{V}(x) = \frac{d}{dt} V(\phi(t, x)) \leq 0, \text{ آن گاه } x^* \text{ پایدار است.}$$

$$\text{ب) اگر برای } x \neq x^*, \dot{V}(x) < 0, \text{ آن گاه } x^* \text{ پایدار مجانبی است.}$$

□ برهان. رجوع شود به قضیه (۵.۱) از [۱۹]

قضیه ۷.۵-۱. (خطی سازی) فرض کنید $f(x)$ یک میدان برداری هموار بر Ω با یک نقطه ساکن p باشد. اگر تمامی مقادیر ویژه از ماتریس ژاکوبی $Df(p)$ دارای بخش حقیقی منفی باشند آنگاه p یک نقطه ثابت پایدار مجانبی مثبت است.

□ برهان. رجوع شود به قضیه (۷.۱۴) از [۱۹]

نکته ۸.۵-۱. (اصل پایایی لاسال) دستگاه $\dot{X} = f(X)$ روی Ω مفروض است، فرض کنید $V : \Omega_0 \rightarrow R$ موجود باشد به طوری که دارای مشتقات جزئی مرتبه اول پیوسته روی Ω_0 است. اگر برای یک $r \in R$ ، $K = \{X : V(X) \leq r\}$ مجموعه ای فشرده بوده و $\dot{V} \leq 0$ ، $(X \in K)$ باشد در این صورت اگر $V(\xi) < r$ داریم:

الف) $X(t, \xi)$ برای تمام $t \geq 0$ تعریف شده است.

ب) V روی $\omega(\xi)$ ثابت است.

ج) $\dot{V}(X) = 0$ روی $\omega(\xi)$

د) $\omega(\xi) \subset M = \{q \in K; \dot{V}(x(t, q)) = 0 \forall t \in R\}$

قضیه ۹.۵-۱. (قضیه پوانکاره بندیکسون) اگر $\bar{O}^+(\xi)$ یک زیر مجموعه فشرده از Ω و $\bar{O}^+(\xi) \cap F = \emptyset$ ، در این صورت $\omega(\xi)$ شامل یک مدار دوره ای است.

□ برهان. رجوع شود به قضیه (۶.۱۲) از [۱۹]

فصل ۲

مدل های SI و SIR

۱-۲ مدل SI

مدل SI یکی از ساده ترین مدل های اپیدمی^۱ می باشد. وجه تمایز آن در جمعیت تنها در قسمت مستعد^۲ $S(t)$ و قسمت آلوده $I(t)$ می باشد.

فرض می کنیم بیماری واگیردار بوده باشد، به این ترتیب افراد آلوده در تمام زمان ها با افراد مستعد در تماس هستند.

فرض کنید پخش بیماریها تا مرحله اپیدمی گسترش یابد، اندازه کل جمعیت را با $S(t) + I(t) = N$ که مخلوطی از جمعیت می باشد نشان داده شده است.

نرخ ابتلا متناسب با تعداد افراد آلوده می باشد و به صورت زیر نوشته می شود:

$$\beta = r\lambda I$$

برای این مدل معادله های دیفرانسیل به صورت زیر می باشند:

$$\frac{dS(t)}{dt} = -r\lambda I(t) S(t) \quad (1-2)$$

$$\frac{dI(t)}{dt} = r\lambda I(t) S(t) \quad (2-2)$$

^۱Epidemic

^۲Susceptible

که با توجه به

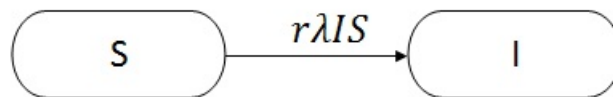
$$N = S(t) + I(t)$$

$$S(t) = N - I(t)$$

بدست می آید:

$$\frac{dI(t)}{dt} = r\lambda I(t) [N - I(t)] \quad (3-2)$$

که به نام معادله لجستیک رشد^۱ شناخته می شود.



شکل ۲-۱: مدل SI

این معادله یک معادله دیفرانسیل جدایی پذیر^۲ می باشد و به صورت زیر حل می شود:

$$\frac{1}{I(t)(N - I(t))} \frac{dI}{dt} = r\lambda$$

$$\int_0^t \frac{1}{I(t)(N - I(t))} \frac{dI}{dt} dt = \int_0^t r\lambda dt$$

$$\int_{I(0)}^{I(t)} \frac{1}{u(N - u)} du = \int_0^t r\lambda dt$$

$$\frac{1}{N} \int_{I(0)}^{I(t)} \left[\frac{1}{u} + \frac{1}{N - u} \right] du = \int_0^t r\lambda dt$$

$$[\ln(u) - \ln(N - u)]_{u=I(0)}^{I(t)} = r\lambda Nt$$

^۱ Logistic growth equation

^۲ Separable differential equation

$$[\ln I(t) - \ln(N - I(t))] - [\ln I(\circ) - \ln(N - I(\circ))] = r\lambda Nt$$

$$\ln \frac{I(t)}{N - I(t)} - \ln \frac{I(\circ)}{N - I(\circ)} = r\lambda Nt$$

$$e^{r\lambda Nt} = \frac{I(t)(N - I(\circ))}{I(\circ)(N - I(t))} = \frac{NI(t) - I(t)I(\circ)}{NI(\circ) - I(t)I(\circ)}$$

$$e^{r\lambda Nt}[NI(\circ) - I(t)I(\circ)] = NI(t) - I(t)I(\circ)$$

$$I(t) = \frac{-Ne^{r\lambda Nt}I(\circ)}{I(\circ) - N - I(\circ)e^{r\lambda Nt}}$$

$$I(t) = \frac{I(\circ)N}{I(\circ) + (N - I(\circ))e^{-r\lambda Nt}} \quad (۴-۲)$$

در نتیجه برای $t \rightarrow \infty$ ، I به N میل می کند. بنابراین تمام افراد مستعد در نهایت آلوده می شوند.

اینکه هر فرد آلوده می شود از لحاظ ریاضی به معنای پایان اپیدمی است.

برای تمام مقادیر مثبت و متناهی t داریم $S(t) \geq 0$ و $I(t) \geq 0$. کمیت زیر را تعریف می کنیم:

$$T_1 = \inf \{t : I(t) > N - 1\}$$

تابع $I(t)$ دارای مشتق مثبت است، لذا صعودی است و بنابراین T_1 را از $I(T_1) = N - 1$ بدست می

آوریم:

$$\frac{I(\circ)N}{I(\circ) + (N - I(\circ))e^{-r\lambda NT_1}} = N - 1$$

$$\frac{I(\circ)N - I(\circ)N - I(\circ)}{(N - 1)(N - I(\circ))} = -r\lambda NT_1$$

$$T_1 = \frac{1}{r\lambda N} \ln \frac{(N - 1)(N - I(\circ))}{I(\circ)} \quad (۵-۲)$$

در این لحظه زمانی اپیدمی به مرحله آخر می رسد.

۲-۲ مدل تغییر یافته SI

مدل SI یکی از ساده ترین مدل ها در بررسی رفتار های بیماریهای عفونی^۱ است. به هر حال مشاهده می کنیم که داده های آماری و داده های حاصل از مدل هم خوانی کاملی باهم اگر ندارند. داده هارا روی نمودار قرار دهیم می بینیم که مدل لجستیک در ابتدا و انتهای زمان هم خوانی مناسبی دارد، در بین این دو چندان مناسب نیست. یکی از راههای بهبود مدل در نظر گرفتن معادله زیر است.

$$\frac{dI}{dt} = kI \left[1 - \left(\frac{I}{N} \right)^p \right] \quad (۶-۲)$$

که k و p ثابت اند. اگر $u = \left(\frac{I}{N} \right)^p$ رادر معادله جاگذاری کنیم آنگاه:

$$I = (uN^p)^{\frac{1}{p}} = u^{\frac{1}{p}} N$$

و

$$du = \frac{pI^{p-1}}{N^p} dI$$

$$du = \frac{p[u^{\frac{1}{p}} N]^{p-1}}{N^p} dI$$

$$du = \frac{(p-1) pu^{\frac{1}{p}} N^{p-1}}{N^p} dI$$

$$du = pu^{\frac{1}{p}} N^{-1} dI$$

بنابراین از (۶-۲) داریم:

$$\frac{1}{pu^{\frac{1}{p}} N^{-1}} du = ku^{\frac{1}{p}} N [1 - u] dt$$

$$\frac{1}{u^{\frac{1}{p}} N^{-1}} du = kNpN^{-1} dt$$

$$\frac{1}{u[1-u]} du = kpd t$$

بطور مشابه از معادله قبلی، محاسبه می کنیم:

$$\int_0^t \frac{1}{u} + \frac{1}{u-1} du = \int_0^t kpd t$$

$$[\ln u(t) - \ln(1-u(t))]_0^t = pkt$$

$$\ln u(t) - \ln[1-u(t)] - \ln u(0) + \ln[1-u(0)] = pkt$$

$$\ln u \left[\frac{u(t) \ln[1-u(t)]}{u(0)[1-u(t)]} \right] = pkt$$

$$e^{pkt} = \frac{u(t)[1-u(0)]}{u(0)[1-u(t)]}$$

$$e^{pkt} = \frac{u(t) - u(0)u(t)}{u(0) - u(t)u(0)}$$

$$e^{pkt}[u(0) - u(0)u(t)] = u(t) - u(0)u(t)$$

$$u(t) = \left[\frac{I(t)}{N} \right]^p = \frac{e^{pkt}u(0)}{1 + u(0)[e^{pkt} - 1]}$$

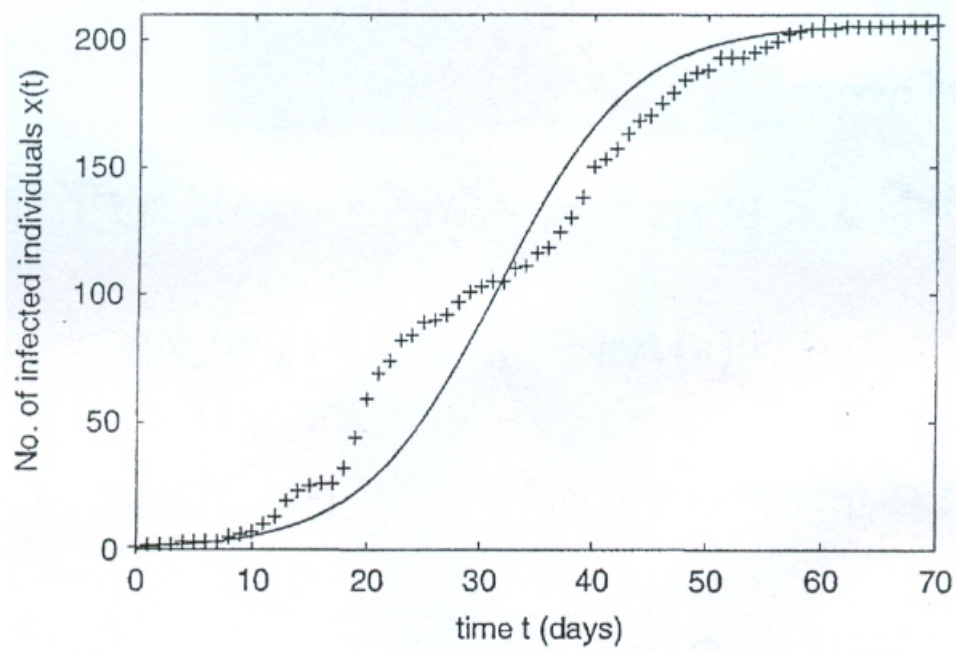
$$I(t) = \frac{N}{\left[\frac{1}{u(0)e^{pkt}} + \left[1 - \frac{1}{e^{pkt}} \right] \right]^{\frac{1}{p}}}$$

$$I(t) = \frac{N}{\left[1 + Ke^{-pkt} \right]^{\frac{1}{p}}}$$

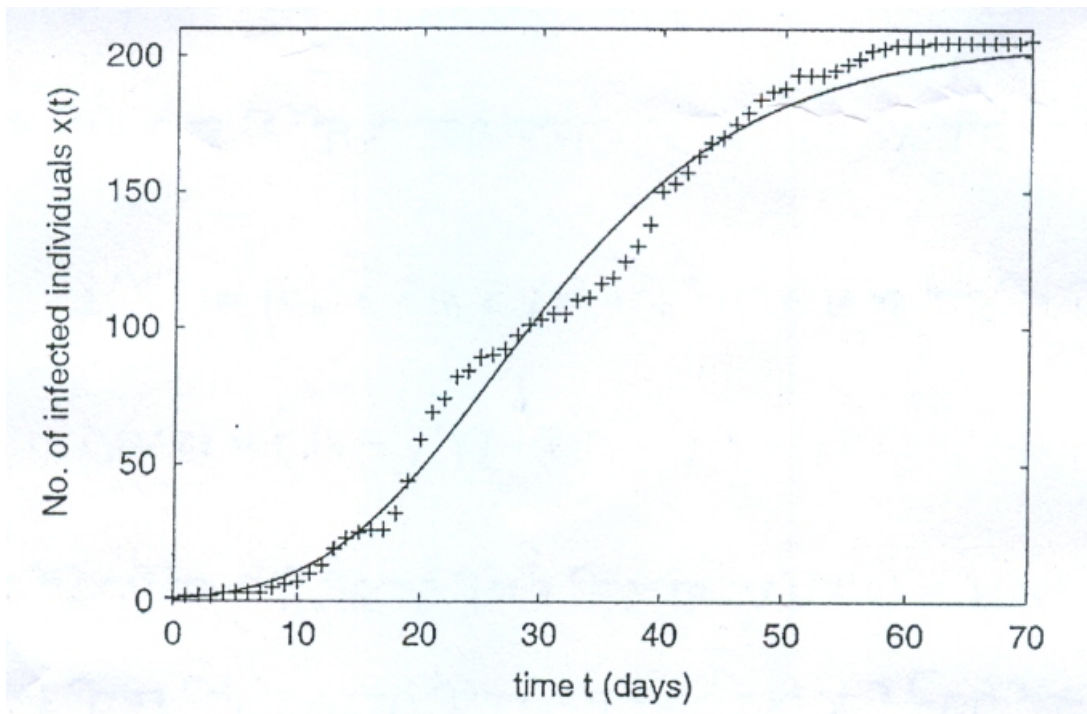
اگر $I(0) = I_0$ باشد داریم:

$$I(t) = \frac{N}{\left[1 + \left[\left(\frac{N}{I_0} \right)^p - 1 \right] e^{-pkt} \right]^{\frac{1}{p}}} \quad (7-2)$$

که k و p ثابت اند.



شکل ۲-۲: شیوع داده (+) و جواب مدل ساده (-)

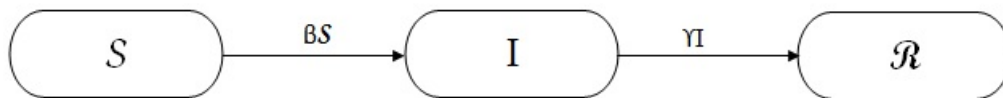


شکل ۳-۲: شیوع داده (+) و جواب مدل بهبود یافته (-)

۳-۲ مدل SIR

دو نمونه از مدل SIR وجود دارد که در همه گیر شناسی^۱ از آن استفاده می شود. یک نمونه مدل اپیدمیک است که در بیماریهایی با پخش سریع از آن استفاده می شود و یک نمونه مدل اندمیک(بومی)^۲ که در مورد بیماریهایی که در یک منطقه در مدت زمان طولانی باقی می ماند(بومی می شود) کاربرد دارد.

این دو مدل برای اپیدمیولوژی ریاضی مدرن بوجود آمده و هنوز هم در عمل از آن استفاده می شود.



شکل ۲-۴: مدل SIR

۱-۳-۲ مدل اپیدمیک SIR

فرض کنید اندازه جمعیت ثابت و بزرگ باشد و در تمام زمانها به طور کاملا همگن باشد. هر شخصی که به طور کامل از بیماری بهبود یابد مصونیت دائمی^۳ پیدا می کند و دوره نقاهت^۴ بسیار کوتاه است.

جمعیت را به سه قسمت تقسیم می کنیم:

$S(t)$: جمعیت مستعد ابتلاء به بیماری

$I(t)$: جمعیت مبتلا به بیماری عفونی

$R(t)$: جمعیت بهبود یافته^۵ از بیماری

نرخ آلوده بودن متناسب است با تعداد بیماران که برابر است با:

^۱ Epidemiology

^۲ Endemic

^۳ Permanent immunity

^۴ Convalescence

^۵ Recovered