بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه ارومیه

پایداری در فضاهای نرمدار ناارشمیدسی

مختار حیدری

دانشکده‌ی علوم

گروه ریاضی

پایان‌نامه برای دریافت درجه‌ی کارشناسی ارشد

استاد راهنما:

دکتر علی عبادیان

دی ۱۳۸۹

قدردانی و تشکر

خدا را شکر می‌گویم از این که فرصتی برای آموختن دانستنیهای نو و تمرین تفکر ریاضی‌وار به من اعطا کرد. از استاد راهنمای گرامی جناب آقای دکتر عبادیان که تکمیل این پایان‌نامه بدون کمکهای ایشان ممکن نبود کمال تشکر را دارم. از داوران محترم آقایان دکترشمس و دکتررضایی که افتخار شاگردی‌شان را نیز دارم، به خاطر راهنمایی‌های ارزشمندشان بسیار سپاسگزارم.

همچنین از صبر و راهنمایی‌های پدرم، محبت و دلسوزی‌های بی‌منت مادرم، درک شرایط و رفتار متناسب با آن شرایط از اطرافیانم شاید تنها عوامل بیم دهنده، بیدار کننده و امید دهنده در مسیر زندگی گذشته، حال و آینده‌ام بوده‌اند، نهایت تشکر را دارم.

از تمامی هم‌کلاسیها و دوستان عزیزم که در این مدت یار و همراه من بوده‌اند کمال تشکر و قدردانی را دارم.

پایان نامه آقای: مختار حیدری به تاریخ ۱۳۸۹/۱۰/۲۹ شماره

مورد پذیرش هیات محترم داوران با رتبه بسیار خوب و نمره ۱۶ (به حروف شانزده تمام)

قرار گرفت.

۱- استاد راهنما و رئیس هیئت داوران : دکتر علی عبادیان

۲- داور خارجی : دکتر بهمن رضایی

۳- داور داخلی : دکتر سعید شمس

۴- نماینده تحصیلات تکمیلی : دکتر حبیب امانی

فهرست مندرجات

چکیده

در این پایان نامه ، پایداری هایرز- اولام -راسیاس [1] تعمیم‌یافته برای معادلات تابعی زیردر فضاهای نرمدار ناارشمیدسی [2] بررسی می کنیم.

معادلات تابعی کوشی[3]

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \tag{1}$$

معادلات تابعی جینسن[4]

$$2f(\tfrac{x+y}{2}) = f(x) + f(y) \tag{2}$$

معادلات تابعی درجه دوم[5]

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x) + 2f(y) \tag{3}$$

معادلات تابعی درجه سوم [6]

$$f(kx+y) + f(kx-y) = k(f(x+y) + f(x-y) + 2(k^3-k)f(x) \tag{4}$$

معادلات تابعی درجه‌چهارم [7]

$$f(kx+y) + f(kx-y) = k^2(f(x+y) + f(x-y)) + 2k^2(k^2-1)f(x) - 2(k^2-1)f(y) \tag{5}$$

Hyers-Ulam-Rassias[1]
Non-Archimedean[2]
Cauchy functional equations[3]
Jensen functional equations[4]
quadratic functional equations[5]
Cubic functional equations[6]
Quartic functional equations[7]

این پایانامه بر گرفته از:

(1)"Alireza Kamel Mirmostafaee, Stability of Quartic Mappings in Non-Archimedean Normed Spaces, Kyungpook Math.j.49(2009),289-297" .

(2)"M.Eshaghi Gordji, M.B.Savadkouhi, Stability of Cubic and Quartic Mappings in Non-Archimedean Spaces, Act Appi Math(2010) 110:1321-1329" .

است .

واژه های کلیدی: فضای ناارشمیدسی ، میدان ناارشمیدسی ، پایداری تعمیم‌یافته هایرز- اولام - راسیاس ، معادله تابعی کوشی ، معادله تابعی درجه دوم معادله تابعی درجه سوم ، معادله تابعی درجه‌چهارم ، معادله تابعی جینسن .

پیشگفتار

مساله پایداری تابعی اولین بار در سال ۱۹۴۰ توسط اس .ام .اولام[۸] باطرح سوالی به صورت زیر مطرح شد :

فرض کنیم $(G_1, *)$ یک گروه و $(G_2, \circ, d)$ یک گروه متری با متر $d(.,.)$ باشد و ϵ داده شده باشد آیا $\delta(\epsilon)$ موجود است به طوری که اگر نگاشت $h : G_1 \longrightarrow G_2$ به ازای هر $x, y \in G_1$ در رابطه

$$d(h(x * y), h(x) \circ h(x)) < \delta$$

صدق کند آنگاه همریختی $H : G_1 \longrightarrow G_2$ موجود باشد به طوری که‌به ازای هر $x \in G_1$ ،

$$d(h(x), H(x) < \epsilon$$

اگر پاسخ مثبت باشد در این صورت می گوییم همریختی $H(x * y) = H(x)(y)$ پایدار است . به عبارت دیگر در این مساله شرایط لازم برای اینکه یک همریختی نزدیک به همریختی تقریبی وجود داشته باشد موجود است .

در سال ۱۹۴۰ اولام اولین بارمسئله پایداری معادلات تابعی را بصورت زیر مطرح کرد :

تحت چه شرایطی می توان یک تابع تقریباً جمعی را به یک تابع جمعی نزدیک کرد .

یک سال بعد مساله‌اولام توسط هایرز[۹]، برای فضاهای باناخ معادلات تابعی کشی بصورت زیر حل شدکه به قضیه‌هایرزمعروف شد .

---

[۸] S. M. Ulam

[۹] Hyers

اگر X و Y فضاهای باناخ $\delta, \epsilon > 0$ وتابع $f : X \longrightarrow Y$ در نا معادله

$$||f(x+y) - f(x) - f(y)|| \leq \delta$$

به ازای هر $x, y \in X$ صدق کند،آنگاه‌حد $A(x) = lim_{n \longrightarrow \infty} \frac{1}{2^n} f(2^n x)$ به ازای هر $x \in X$ وجود دارد وA یک تابع جمعی منحصر بفرد است به طوری که‌به ازای هر $x \in X$

$$||f(x) - A(x)|| \leq \epsilon$$

در سال ۱۹۵۰،آکوی قضیه هایرز رابرای توابع تقریباً جمعی تعمیم داد . راسیاس [۱۰] قضیه‌هایرزرا بصورت زیر بیان کرد :

فرض کنیم $f : X \longrightarrow Y$ یک تابع‌ازفضای نرمدار X به فضای باناخ Y باشد به طوری که‌درنا مساوی :

$$||f(x+y) - f(x) - f(y)|| \leq \epsilon)||x||^p + ||y||^p)$$

به ازای هر $x, y \in X$ صدق کند همچنین ϵ وp ثابتهایی باشند که $\epsilon > 0$ و $0 \leq p < 1$ آنگاه‌حد $A(x) = lim_{n \longrightarrow \infty} \frac{1}{2^n} f(2^n x)$ به ازای هر $x \in X$ وجود دارد وA یک تابع جمعی منحصر بفرد می باشد که درنا مساوی:

$$||f(x) - A(x)|| \leq k\epsilon||x||^p$$

به ازای هر $x \in X$ صدق می کندو در آن $k = \frac{2}{2-2^p}$.این مفهوم جدید به پایداری پایداری هایرز- اولام -راسیاس [۱۱]معروف است در این پایاننامه این مفهوم را روی معادلات تابعی تابعی کشی، معادلات تابعی جینسن، معادلات تابعی درجه دوم ، معادلات تابعی درجه سوم و معادلات تابعی درجه‌چهارم وقتی که X و Y فضاهای نرمدار نا ارشمیدسی هستند ، بررسی می کنیم‌احث پایداری ازمعادلات تابعی کشی ودرجه دوم روی فضاهای باناخ ووجود نگاشتهای جمع پذیر منحصر بفرد در

[۱۰] Rassias

[۱۱] Hyers-Ulam-Rassias

مراجع [۱]و[۱۱]وپایداری معادلات تابعی کشی ،پایداری معادلات تابعی جینسن [۱۲] ، معادلات تابعی درجه دوم ، معادلات تابعی درجه سوم و معادلات تابعی درجه‌چهاردر فضاهای نرم‌دار ناارشمیدسی در مراجع [۵]،[۸]،[۹]و[۱۲]بررسی شده اند .

این پایان نامه مشتمل برسه فصل است :

در فصل اول تعاریف ومفاهیم بنیادی ازمراجع [۱۳] و[۱۴]آورده شده است .

فصل دوم شامل دو بخش زیراست :

بخش اول: بعداز تعریف معادله تابعی کشی به بررسی قضایایی در مورد پایداری معادلات تابعی کشی در فضاهای باناخ می پردازیم برای این منظور از مراجع [۱]و[۱۱]استفاده شده است .

بخش دوم: بعدازارایه تعریفی از ، معادله تابعی درجه دوم به بررسی پایداری معادلات تابعی درجه دوم‌در فضاهای باناخ می پردازیم برای این منظور از مرجع [۱۱]استفاده شده است .

فصل سوم شامل شش بخش زیراست :

در بخش اول به‌تعریف میدان ناارشمیدسی وفضاهای نرم‌دار ناارشمیدسی می پردازیم برای این منظور از مراجع [۷]،[۸]و[۱۲]استفاده شده است.

در بخش دوم به پایداری معادلات تابعی کشی درفضاهای نرم‌دار ناارشمیدسی می پردازیم‌برای این منظور از مراجع [۸]و[۹]استفاده شده است.

در بخش سوم بعداز تعریف معادله تابعی جینسن به پایداری معادلات تابعی جینسن درفضاهای نرم‌دار ناارشمیدسی می پردازیم‌برای این منظور از مراجع [۵]،[۹]و[۱۲]استفاده شده است.

در بخش چهارم بعداز تعریف معادله تابعی درجه دوم به پایداری معادلات تابعی‌درجه دوم درفضاهای نرم‌دار ناارشمیدسی می پردازیم‌برای این منظور از مرجع [۷]استفاده شده است.

در بخش پنجم بعداز تعریف معادله تابعی درجه سوم به پایداری معادلات تابعی‌درجه سوم درفضاهای

[۱۲] Jensen

نرم‌دار ناارشمیدسی می پردازیم‌برای این منظور از مرجع [۱۲]استفاده شده است.

در بخش ششم بعداز تعریف معادله تابعی درجه‌چهار به پایداری معادلات تابعی‌درجه‌چهار درفضاهای نرم‌دار ناارشمیدسی می پردازیم‌برای این منظور از مراجع [۸]،[۱۰]و[۱۲]استفاده شده است.

فصل ۱

مفاهیم اوّلیه

۱.۱ تعاریف و مفاهیم بنیادی

تعریف ۱.۱.۱ فضاهای متریک: مجموعهٔ نا تهی X، که اعضای آن را نقاط خواهیم نامید در صورتی یک فضای متری است که به هر دو نقطه p و q از آن . عدد حقیقی $d(p,q)$ بنام فاصله p از q، طوری مربوط شده باشد که

(۱) $d(p,q) > 0$ هرگاه $p \neq q$ و $d(p,p) = 0$ ؛

(۲) $d(p,q) = d(q,p)$ ؛

(۳) به ازای هر $r \in X$، $d(p,q) \leq d(p,r) + d(r,q)$.

هر تابعی که در این سه شرط صدق کند یک تابع فاصله یا یک متر نامیده می‌شود.

مثال ۲.۱.۱ مهمترین مثال‌های فضاهای متری عبارتنداز فضاهای اقلیدسی $\mathbb{R}^k$ به ویژه $\mathbb{R}^1$(خط حقیقی) و $\mathbb{C}$ (صفحهٔ مختلط) . فاصله در $\mathbb{R}^k$ بدین صورت تعریف می‌شود:

$$d(x,y) = |x-y| \quad (x,y \in \mathbb{R}^k) .$$

توجه به این امر مهم است که هر زیر مجموعه Y از فضای متری X، خود یک فضای متری با همان تابع فاصله می‌باشد.

تعریف ۳.۱.۱ دنباله‌های کشی : دنباله $\{P_n\}$ در فضای متری X را یک دنباله کشی می نامیم هرگاه به ازای هر $\varepsilon > 0$، عدد طبیعی N موجود باشد بطوریکه اگر $n \geq N$ و $m \geq N$، آنگاه $d(P_n, P_m) < \varepsilon$.

تعریف ۴.۱.۱ یک فضای متری که درآن هر دنباله کشی همگرا باشد تام نامیده می‌شود.

فضاهای اقلیدسی تام هستند.

تعریف ۵.۱.۱ گردایه‌ی τ از زیر مجموعه‌های X را یک توپولوژی بر X گوئیم اگر τ در سه شرط زیر صدق کند:

(الف) $\varnothing \in \tau$ و $X \in \tau$؛

(ب) هرگاه به ازای $i = 1, 2, 3, \ldots, n$ اگر $V_i \in \tau$، آنگاه $V_1 \cap V_2 \cap \ldots \cap V_n \in \tau$ ؛

(ج) هرگاه $\{V_\alpha\}$ گردایه‌ای از اعضای τ (متناهی، شمارش‌پذیر یا شمارش ناپذیر)باشد، آنگاه $\bigcup_\alpha V_\alpha \in \tau$.

تعریف ۶.۱.۱ هرگاه τ یک توپولوژی در X باشد، آنگاه X را یک فضای توپولوژیک و اعضای τ را مجموعه‌های باز در X می‌نامند.

تعریف ۷.۱.۱ هرگاه X و Y دو فضای توپولوژیک بوده و f نگاشتی از X به توی Y باشد، آنگاه گوئیم f پیوسته است اگر به ازای هر مجموعهٔ باز V در Y، $f^{-1}(V)$در X باز باشد.

تعریف ۸.۱.۱ فرض کنیم X و Y دو فضای توپولوژیک بوده و f نگاشتی از X به توی Y باشد. f را در نقطه $x_0 \in X$ پیوسته گوئیم اگر به هر همسایگی V از $f(x_0)$ یک همسایگی مانند W

از $x_\circ$ متناظر باشد که $f(W) \subseteq V$. اگر X و Y فضاهای توپولوژیک باشند،آنگاه نگاشت f از X به توی Y پیوسته است اگر و فقط اگر f در هر نقطه از X پیوسته باشد.

تعریف ۹.۱.۱ (الف) فرض کنیم X فضای توپولوژیک باشد. گردایه m از زیر مجموعه‌های مجموعهٔ X را یک σ - جبر در X نامیم، اگر در شرایط زیر صدق کند:

(۱) $X \in m$؛

(۲) اگر $A \in m$، آنگاه $A^c \in m$ که در آن A^c متمم A نسبت به X است؛

(۳) اگر $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ و به ازای $n = 1, 2, 3, \ldots$، $A_n \in m$، آنگاه $A \in m$.

(ب) فرض کنیم m یک σ - جبر در X باشد،در این صورت X را یک فضای اندازه پذیر و اعضای m را مجموعه‌های اندازه پذیر می‌نامیم.

(پ) فرض کنیم X یک فضای اندازه پذیر و Y یک فضای توپولوژیک باشد وهمچنین فرض کنیم f نگاشتی از X به توی Y است،در این صورت f اندازه پذیر است اگر به ازای هر مجموعه باز V در Y، $f^{-1}(V)$ یک مجموعه اندازه پذیر در X باشد.

تعریف ۱۰.۱.۱ مجموعه‌های بورل[1]: فرض کنیم X یک فضای توپولوژیک باشد. کوچکترین σ - جبر مانند B در X هست بطوریکه هر مجموعه باز در X متعلق به B است. اعضای B را مجموعه‌های بورل X می‌نامند. بخصوص مجموعه‌های بسته مجموعه‌های بورل هستند. هر نگاشت پیوسته از X اندازه پذیر بورل می‌باشد. نگاشت‌های اندازه پذیر بورل را اغلب نگاشت‌های بورل یا توابع بورل می‌نامند.

تعریف ۱۱.۱.۱ فضای برداری مختلط X را یک فضای خطی نرمدار نامیم، اگر به هر $x \in X$ یک عدد حقیقی نامنفی مانند $\|x\|$ بنام نرم x چنان مربوط شده باشد که:

---

[1] Borel

(آ) به ازای هر $x, y \in X$، $||x+y|| \leq ||x|| + ||y||$.

(ب) اگر $x \in X$ و α یک اسکالر باشد، آنگاه $||\alpha x|| = |\alpha| ||x||$.

(ج) $||x|| = ۰$ تساوی $x = ۰$ را ایجاب کند.

بنا به (آ) نامساوی مثلثی برقرار است:

$$||x-y|| \leq ||x-z|| + ||z-y|| \quad (x, y, z \in X) .$$

این در تلفیق با (ب) (فرض $\alpha = ۰$ و $\alpha = -۱$) و (ج) نشان می‌دهد که هر فضای خطی نرمدار را می‌توان یک فضای متری گرفت. فاصله بین x و y مساوی $||x-y||$ است.

تعریف ۱۲.۱.۱ هر فضای باناخ[۲] یک فضای خطی نرمدار است که با متر تعریف شده به وسیله نرمش تام می باشد . میدان مختلط با نرم $||x|| = |x|$ یک فضای باناخ می باشد.

تعریف ۱۳.۱.۱ اگر $f : X \to Y$ یک تابع پیوسته دوسوئی باشد آنگاه f را همئومورفیسم نامیم اگر $f^{-۱} : Y \to X$ پیوسته و یک به یک باشد.

تعریف ۱۴.۱.۱ نگاشت‌های خطی: فرض کنید X و Y فضاهای برداری بر میدان اسکالر φ باشند. گوئیم نگاشت $\Lambda : X \to Y$ خطی است هرگاه،

$$\forall x, y \in X \ , \ \forall \alpha, \beta \in \varphi \quad \Lambda(\alpha x + \beta y) = \alpha \Lambda(x) + \beta \Lambda(y) .$$

تعریف ۱۵.۱.۱ فضای دوگان X^* از فضای برداری توپولوژیک X متشکل از همه تابعک‌های خطی پیوسته بر X می‌باشد.

اعمال جمع و ضرب اسکالر در این فضا بصورت زیر تعریف می‌شود:

---

[۲] Banach space

$$\alpha(\Lambda(x)) = \Lambda(\alpha x) \quad (\alpha \in \varphi) \; ;$$

$$(\Lambda_۱ + \Lambda_۲)(x) = \Lambda_۱(x) + \Lambda_۲(x) \quad (\Lambda_i \in X^* \quad i = ۱, ۲ \;) \, .$$

با این اعمال فضای X^* یک فضای برداری است.

فصل ۲

نظریه پایداری روی فضاهای باناخ

۱.۲ پایداری معادلات تابعی کشی

تعریف ۱.۱.۲ یک تساوی تابعی را پایدار[۱] گوییم هر گاه برای تابعی که در یک تساوی تابعی مفروض صدق می کند ، تابع دیگری به اندازه دلخواه نزدیک به تابع اول ، که در تساوی تابعی مفروض صدق می کند وجود داشته باشد .

تعریف ۲.۱.۲ معادله تابعی کشی : معادله تابعی $f(x+y)=f(x)+f(y)$ را معادله تابعی کشی[۲] می نامیم .

تعریف ۳.۱.۲ نگاشت f را تقریباً خطی[۳] گوییم هرگاه:

$$\exists\, k \geq 0 \;, \exists\, p;\; 0 \leq p < 1 \;\; ; \;\; \|f(x+y)-f(x)-f(y)\| \leq k\|x\|^p + \|y\|^p \quad (\forall x, y \in E) \;.$$

تعریف ۴.۱.۲ فرض کنیم f و φ هر دو E را به توی E' بنگارند. گوییم $f(x)$ و $\varphi(x)$ مجاورند[۴] هرگاه،

---

[۱] stabel

[۲] Cauchy functional equations

[۳] approximately linear

[۴] near

$$\exists k \geq ۰ \ , \ ۰ \leq p < ۱ \ ; \ ||f(x) - \varphi(x)|| \leq k||x||^p \quad (\forall x \in E) \ .$$

تعریف ۵.۱.۲ نگاشت $A : E_۱ \to E_۲$ رایک نگاشت جمعی[۵] می نامیم هرگاه در معادله تابعی کشی زیرصدق می کند:

$$A(x+y) = A(x) + A(y) \quad (\forall x, y \in E_۱) \ .$$

تعریف ۶.۱.۲ تبدیل $f : E_۱ \to E_۲$ رایک δ ـخطی[۶] نامیم هر گاه :

$$||f(x+y) - f(x) - f(y)|| \leq \delta \quad (x, y \in E_۱) \ .$$

قضیه ۷.۱.۲ فرض کنیم $E_۱$ و $E_۲$ فضاهای باناخ[۷] باشند. در این صورت اگرنگاشت

$$f : E_۱ \to E_۲$$

به ازای هر $x, y \in E_۱$ و $\delta > ۰$ در نا مساوی تابعی زیر صدق کند:

$$||f(x+y) - f(x) - f(y)|| \leq \delta \tag{۱}$$

آنگاه‌نگاشت جمعی منحصر بفردی مانند $A : E_۱ \to E_۲$ وجود دارد بطوریکه:

$$A(x) = lim_{n \longrightarrow \infty} \frac{۱}{۲^n} f(۲^n x) \ . \tag{۲}$$

و به ازای هر $x \in E_۱$ و $\delta > ۰$

$$||f(x) - A(x)|| < \delta \ . \tag{۳}$$

برهان : برای هر $x \in E_۱$ نامساوی

$$||f(۲x) - ۲f(x)|| \leq \delta \ . \tag{۴}$$

---

[۵] additive mapping

[۶] $\delta - linear$

[۷] Banach space

برقرار است . در رابطه (۴) به جای x، $\frac{x}{2}$ را قرار می‌دهیم و طرفین را بر ۲ تقسیم‌می کنیم. آنگاه داریم،

$$||\tfrac{1}{2}f(x) - f(\tfrac{x}{2})|| \leq \tfrac{1}{2}\delta \;\; ; \; x \in E_1 . \tag{۵}$$

با استفاده از استقرا بدست می آوریم:

$$||\tfrac{1}{2^n}f(x) - f(\tfrac{x}{2^n})|| \leq (1 - \tfrac{1}{2^n})\delta . \tag{۶}$$

برای $n = 1$ داریم:

$$||\tfrac{1}{2}f(x) - f(x/2)|| \leq \tfrac{1}{2}\delta .$$

که همان رابطه (۵) است.

حال فرض کنیم که برای $k = n$ برقرار باشد برای $k = n + 1$ ثابت می‌کنیم. در رابطه (۴) به جای x، $\frac{x}{2^{(n+1)}}$ را قرار می‌دهیم و طرفین را بر ۲ تقسیم‌می کنیم. آنگاه داریم،

$$||\tfrac{1}{2}f(\tfrac{x}{2^n}) - f(\tfrac{x}{2^{n+1}})|| \leq \tfrac{1}{2}\delta \quad ; \; x \in E_1 . \tag{۷}$$

از فرض استقراً داریم:

$$||\tfrac{1}{2^{n+1}}f(x) - \tfrac{1}{2}f(\tfrac{x}{2^n})|| \leq \tfrac{1}{2}(1 - \tfrac{1}{2^n})\delta \quad ; \; x \in E_1 . \tag{۸}$$

$$||\tfrac{1}{2^{n+1}}f(x) - f(\tfrac{x}{2^{n+1}}) - \tfrac{1}{2}f(\tfrac{x}{2^n}) + \tfrac{1}{2}f(\tfrac{x}{2^n})|| \leq ||\tfrac{1}{2}f(\tfrac{x}{2^n}) - f(\tfrac{x}{2^{n+1}})||+$$

$$||\tfrac{1}{2}f(\tfrac{x}{2^n}) - f(\tfrac{x}{2^{n+1}})|| + ||\tfrac{1}{2^{n+1}}f(x) - \tfrac{1}{2}f(\tfrac{x}{2^n})|| \leq \tfrac{1}{2}\delta + \tfrac{1}{2}(1 - \tfrac{1}{2^n})\delta$$

بنابراین

$$||\tfrac{1}{2^{n+1}}f(x) - f(\tfrac{x}{2^{n+1}})|| \leq (\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2^{n+1}})\delta \leq (1 - \tfrac{1}{2^{n+1}})\delta ; \; x \in E_1 . \tag{۹}$$

بنابراین نامساوی (۶) برای هر $x \in E_1$ و $n \in \mathbb{N}$ برقرار است. قرارمی دهیم :

$$q_n(x) = 2^{-n}f(2^n x) \qquad (\forall n \in \mathbb{N} \, , \; x \in X) . \tag{۱۰}$$

آنگاه

$$q_m(x) - q_n(x) = \tfrac{1}{2^m}f(2^m x) - \tfrac{1}{2^n}f(2^n x) \tag{۱۱}$$

$$= \tfrac{1}{2^m}(f(2^{m-n}2^n x) - 2^{m-n}f(2^n x)) .$$