بسم الله الرحمن الرحیم

به نام خداوند بخشنده مهربان

۳۲۷۴۷

دانشگاه صنعتی اصفهان

دانشکده علوم ریاضی

خواص حلقه‌های درون ریختی

پایان نامه کارشناسی ارشد ریاضی

موسی‌الرضا شمسیه زاهدی

استاد راهنما

دکتر احمد حقانی

۱۳۷۸

دانشگاه صنعتی اصفهان

دانشکده علوم ریاضی

پایان نامه کارشناسی ارشد رشته ریاضی آقای موسی‌الرضا شمسیه زاهدی

تحت عنـــوان

خواص حلقه‌های درون ریختی

در تاریخ ۷۸/۱۲/۹ توسط کمیته تخصصی زیر مورد بررسی و تصویب نهائی قرار گرفت.

۱ - استاد راهنمای پایان‌نامه — دکتر احمد حقانی

۲ - استاد مشاور پایان‌نامه — دکتر حسین خبازیان

۳ - استاد داور ۱ — دکتر احمد موسوی

۴ - استاد داور ۲ — دکتر بیژن طائری

سرپرست تحصیلات تکمیلی دانشکده — دکتر امیر نادری

هوالعلیم

عبادت به جز خدمت خلق نیست   به تسبیح و سجاده و دلق نیست

حمد و سپاس اورا که جاودانه وابدی است

برای اینجانب افتخار بزرگی است ، که توانستم به لطف ایزد منان، شاگرد استاد ارجمند وگرانقدر، **جناب آقای دکتراحمدحقانی** باشم و از رهنمودهای بسیار ارزنده ایشان چه در امور درسی وچه غیر درسی مستفیض گردم .
اکنون که این رساله به لطف ایزد منان و کمکهای بسیارشان، به اتمام رسیده است، از ایشان نهایت سپاسگزاری و تشکر را می نمایم.

ازکلیه اساتید محترم دانشکده ریاضی به‌خصوص جناب آقای دکتر محمود بینا مطلق، جناب‌آقای دکترمسلم نیکفر،جناب آقای‌دکترحسین‌خبازیان، جناب آقای دکتراحمد پارسیان وجناب آقای دکترامیر نادری به‌خاطرزحمات وراهنماییهایشان‌درمدت‌تحصیل،تشکر وقدردانی‌می‌نمایم.

همچنین از همه دوستانی که در مدت تحصیل، اینجانب را در امور درسی یا غیر درسی راهنمایی و کمک نموده اند، به خصوص دوستان عزیز و گرامی آقایان‌شنتیا یاراحمدیان، مهدی حجارزاده ، حسین عابدی و حسن یوسفی تشکروقدردانی می نمایم.

در پایان از آقایان علی لطفی و محسن حاجی‌ابراهیمی که اینجانب را درتایپ این رساله،کمک و یاری نموده اند، صمیمانه تشکر می کنم .

كليه حقوق مادی مترتب بر نتایج مطالعـــات ،
ابتکارات و نوآوریهای ناشی از تحقیق موضوع
این پایان نامه (رساله) متعلق به دانشگاه صنعتی
اصفهان است .

چراغ خانه دل هست ، پدر		نور و امید به دل بست ، پدر

گل اگر رست زسنگ، به دعای مادر است		گل اگر گشت جهان، به هوای مادر است

تقدیم به :

پدر صبورم

مادر فداکارم

برادر عزیزم و

خواهران مهربانم

فهرست مطالب

چکیده

در ایـن رساله هـمه حلقـه ها ، شرکت پذیر و دارای عنصر یکانی با $0 \neq 1$ می باشـند . همـه همریختـی های حلقه‌ای ضرورتاً عنصر همانی را حفظ می کند. همچنین همه مدولهای در نظر گرفته شده ، یکـانی هستند. موقعیکه صحبت از زیر حلقه R از S می شود لازم است که $1_R = 1_S$. همواره با R مدولهای چپ کارخواهد شد، به جز مواقعی که ذکر می شود.

در این رساله، خواص هاپفی و کوهاپفی ، "N, "($\frac{M}{N}$)را وقتیکه N زیـر مـدول کـاملاً پـایدار M باشـد تحت فرضیات مناسب بررسی می کنیم. به ویژه ما نشان می دهیم کـه اگـر M، متناهیاًتولیدشـده و شـبه تصویری (متناهیاًنشانده شده و شبه تزریقی) باشد آنگاه M هاپفی است اگرو تنهـا اگـر $\frac{M}{J(M)}$، هـاپفی (کوهاپفی) باشد.

اگر Nزیر مدول کاملاً پایـدارM باشد ، آنگاه $End(\frac{M}{N})$یـک حـلقه فاکتور از End(M) اسـت هـر گـاه M شبه تصویری باشد و End(N) حلقه فاکتور ازEnd(M) است، اگر M شبه تزریقی باشـد. خصوصاً ما نشان می دهیم که اگر End(M) ، نیمه موضعی ، نیمه کـامل و یـا اگـر ۱ در قلمـرو پـایدار آن باشـد ، همین نتایج برای $End(\frac{M}{N})$برقراراست اگر M شبه تصویری باشد و برای End(N) درسـت اسـت اگـر M شبه تزریقی باشد.

همچنین نشان می‌دهیم، اگر N زیر مدول M کـهAut(M) -پایـا و End(M) نیمـه موضعـی باشـد، آنگـاه $End(\frac{M}{N})$نیمه موضعی است اگر M شبه تصویری باشد و End(N) نیمه موضعی اسـت اگـر M شـبه تزریقی باشد. این نتیجه بر مبنای این حقیقت اسـت کـه اگـر $h: A \to B$ همریختـی موضعـی وB نیمـه موضعی باشد ، آنگاه A نیز ، نیمه موضعـی اسـت . درحـالتی کـه $h: A \to B$ همریختـی موضعـی و ۱ در قلمرو پایدار B است، نیاز نیست که ۱ در قلمرو پایدار A باشد، که این را بـا یـک مثـال خـاص نشـان خواهیم داد. در پایان مثالی از یک حلقه موضعی R که ایده الهای با همرتبه نامتناهی دارد خواهیم آورد

فصل اول

نتایج مقدماتی وبعد دوگان گلدی

در این فصل هدف اصلی، بررسی بعد دوگان گلدی[1] و قضیه اساسی آن می‌باشد و در پی آن به ذکر چند گزاره مورد نیاز در فصلهای آتی خواهیم پرداخت.

در ابتدا تعریف رتبه و قضیه اساسی گلدی‌را ذکر خواهیم نمود و سپس به بیان مفهوم دوگان آن می پردازیم.شایان ذکر است که اولین بار فلوری[2] در سال ۱۹۷۴ تعریفی برای دوگان بعد گلدی ذکر کرد و بعد از آن وردرجان[3] در سال ۱۹۷۹ تعریف جامع تری را ارائه نمود که ما به بیان آن خواهیم پرداخت.

تعریف ۱۰۱: مدول M دارای رتبه متناهی (بعد گلدی متناهی) است ، هر گاه مجموع مستقیم نامتناهی از زیر مدولهای ناصفر در M موجود نباشد.

تعریف ۲۰۱: زیر مدول N از M را اساسی گوئیم هرگاه برای هر زیر مدول $K \neq 0$ از M داشته باشیم $K \cap N \neq 0$.

---

[1] Goldie

[2] Fleury

[3] Varadarajan

تعریف ۳۰۱ : مدول U را یکنواخت گوئیم، هر گاه $U \neq 0$ و هر زیر مدول غیر صفر آن در U اساسی باشد.

قضیه۴۰۱ : (گُلدی) فرض کنید M یک مدول از رتبه متناهی باشد، آنگاه عدد صحیح منحصر به فرد $n \geq 0$ وجود دارد که وابسته به M است و در شرایط زیر صدق می‌کند.

i) اگر N درM اساسی و $N = \overset{k}{\underset{i=1}{\oplus}} U_i$ مجموع مستقیم از زیرمدولهای یکنواخت باشد آنگاه k=n

ii) اگر $\overset{k}{\underset{j=1}{\oplus}} N_j \subset M$ که $N_j \neq 0$ آنگاه $k \leq n$

iii) فرض کنید $N \subset M$ آنگاه N در M اساسی است اگر و تنها اگر مجموع مستقیم $\overset{n}{\underset{i=1}{\oplus}} U_i$ از n زیر مدول یکنواخت Mموجود باشد که $\overset{n}{\underset{i=1}{\oplus}} U_i \subset N$

اثبات: همان قضیهٔ ۱۰۳ در [7] است.

یادداشت ۵۰۱ : رتبه M برابرصفراست، اگر و تنها اگر M برابرصفرباشد و رتبه M برابریک است ،اگر و تنها اگر M یکنواخت باشد ورتبه M همان عددیکتای n در قضیهٔ بالا است.

یادداشت ۵*۰۱ : ترکیب نگاشت $f: M \to \Pi N_i$ و نگاشت تصویری $P_j: \Pi N_i \to N_j$ را با $f_j = P_j \ o \ f$ نشان می‌دهیم.

لم ۶۰۱ : (تعمیم‌صورت ضعیف قضیه باقیمانده چینی[1])

گیریم $f: M \to \prod_{i=1}^{r} N_i$ بطوریکه برای هر $1 \leq i \leq r$ ، $f_i: M \to N_i$ برورریختی باشد. گیریم $K_i = \ker(f_i)$ و $L_i = \underset{i \neq j}{\cap} K_j$ برای $1 \leq i \leq r$ آنگاه f برورریختی است ، اگر و تنها اگر برای $1 \leq i \leq r$، $K_i + L_i = M$.

اثبات :

چون برای هر $f_i: M \to N_i$ برورریختی است ، نگاشت $f: M \to \prod_{i=1}^{r} N_i$ بصورت $f: M \to \prod_{i=1}^{r} \frac{M}{K_i}$

---

[1] chinese Remainder theorem

و با ضابطه $f(m)=(m+K_1,\dots,m+K_r)$ برای هر $m\in M$ می باشد. فرض کنید $x\in M$ ، در این صورت یک $m\in M$ وجود دارد،
بطوریکه $f(m)=(0+K_1,\dots,x+K_i,\dots,0+K_r)$ از این رو

$$(m+K_1,\dots,m+K_i,\dots,m+K_r)=(K_1,\dots,x+K_i,\dots,K_r)\Rightarrow m\in L_i, x-m\in K_i$$

بنابراین $k_i\in K_i, x=m+k_i\in L_i+K_i$ و نتیجتاً برای هر i ، $(1\le i\le r)$، $K_i+L_i=M$.

بالعکس: فرض کنید $(m_1+k_1,\dots,m_i+k_i,\dots,m_r+k_r)\in\prod_{i=1}^{r}\frac{M}{K_i}$. چون برای هر i ، $(1\le i\le r)$ ، $K_i+L_i=M$ ، بنابراین برای هر i ، $m_i=k_i+l_i$ که $k_i\in K_i$ ، $l_i\in L_i$ ، بنابراین

$$f(l_1+\dots+l_i+\dots+l_r)=(l_1+K_1,\dots,K_r)+(K_1,\dots,l_i+K_i,\dots,K_r)+(K_1,\dots,l_r+K_r)=$$

$$(l_1+K_1,\dots,l_i+K_i,\dots,l_r+K_r)=(m_1+K_1,\dots,m_i+K_i,\dots m_r+K_r)$$

و از این رو f پوشاست . □

تعریف ۷۰۱ : مدول M دارای بعد دوگان گلدی (همرتبه [۲]) بزرگتریامساویk (k عدد صحیح) است ، هرگاه مدولهای N_i برای $1\le i\le k$ با هر $N_i\ne 0$ و یک برورریختی $\phi:M\to\prod_{i=1}^{k}N_i$ وجودداشته‌باشد .اگر $M\ne 0$ آنگاه همرتبه $1\le M$ همچنین همرتبه مدول صفر را صفر تعریف می کنیم . وقتیکه $M\ne 0$ می گوییم ، همرتبه n=M ، هرگاه همرتبه $n\le M$ و همرتبه $n+1\le M$ اگر برای هر عدد صحیح مثبت k ، همرتبه $k\le M$، گوییم همرتبه $M=\infty$.

یادداشت ۷*۰۱ : گاهی اوقات ممکن است همرتبهٔ مدول M را با Codim(M) و رتبهٔ آن را با dim(M) نمایش دهیم.

---

[۲] corank

تعریف ۸۰۱ : فرض‌کنید M یک R مدول‌باشد، یک زیر مدول S از M را کوچـک [۳] مـی نـامیم، هر گاه بـرای هـر $N \leq M$ اگـر $S + N = M$ آنگـاه $N = M$. اگـر S زیرمـدول کوچـک M باشـد می‌نویسیم $S \langle\langle M$.

مثال ۹۰۱ : Z -زیر مدول $S = \{0,2\}$ از Z_4 یک زیر مدول کوچک آن است .

تعریف ۱۰۰۱ : مدول M را میان تهی [۴] گوییم هرگاه $M \neq 0$ و اگر L زیرمدول‌سرهٔ M باشـد آنگاه $L\langle\langle M$.

مثـال ۱۱۰۱ : چـون زیـر مدولهـای سـره Z – مدولهـای Z_{p^n} و Z_{p^∞} (بـرای p اول و $n \geq 1$) بـه صورت یک زنجیزه می باشند، این مدولها میان تهـی هسـتند، امـا Z- مـدول $Z_{p^1p^2}$ بـرای اعـداد اول P^2, P^1 میان تهی نیست.

لازم به ذکر است که ما از علامت 〉 به عنوان زیرمدول بو دن استفاده می کنیم.

گزاره ۱۲۰۱: مدول M میان تهی است اگر و تنها اگر همرتبه Mبرابریک باشد .

اثبات:

فرض کنید مدول M میان تهـی باشـد، آنگـاه $M \neq 0$ از ایـن رو همرتبـه $1 \leq M$. فـرض کنیـد $\phi: M \to N_1 \times N_2$ یـک بروریختـی بـا $N_1 \neq 0 \neq N_2$ باشـد. فـرض کنیـد بـــرای j=1,2 ، $\phi_j: M \to N_j$ نگاشت تصویری باشد، گـیریم $K_i = Ker(\phi_j)$ بنـا بـه لـم ۱۰۶ ، $K_1 + K_2 = M$ ، بعلاوه $0 \neq N_j$ سپس $K_j \leq M$ (j=1,2) بدین ترتیب K_1 (همچنین K_2) در M کوچک نیست کـه متناقض با میان تهی بودن M می باشد از این رو همرتبه Mبرابریک است .

بالعکس: فرض کنیدهمرتبه Mبرابریک‌و $L\langle$M باید ثابت کنیـم L در M کوچـک اسـت. فـرض کنیـم $K\langle M$ کـه در شـرط K+L=M صـدق کنـد، اگـر $\eta_k: M \to \dfrac{M}{K}, \eta_l: M \to \dfrac{M}{L}$ بـه ترتیـب نشانگر نگاشـتهای تصویـری باشـند، بنـا بـه لـم ۶۰۱ ، نگاشـت $\phi := (\eta_L, \eta_K) := M \to \dfrac{M}{L} \times \dfrac{M}{K}$

[۳] small

[۴] Hollow

پوشاست چون $\frac{M}{L} \neq 0$ و $\frac{M}{K} \neq 0$ ، نتیجه میگیریم همرتبه $M \leq 2$ که متناقض با فرض است . □

یادداشت ۱۳۰۱ : هرگاه $M \to M''$ همریختی پوشا و همرتبه $k \leq M''$ آنگاه واضح است که همرتبه $k \leq M$. همچنین واضح است که تصویر همریختی هر مدول با بعد دوگان گلدی متناهی دارای بعد دوگان گلدی متناهی است.

لم ۱۴۰۱ : اگر $S \langle\langle M$ ، آنگاه هر زیر مدول S در M کوچک است اگر S_i برای $1 \leq i \leq n$ در M کوچک باشد ، آنگاه $\sum_{i=1}^{n} S_i \langle\langle M$.

اثبات:

فرض کنید $K \leq S$ و $K + N = M$ ، آنگاه $M = K + N \leq S + N$ بنابراین $S + N = M$ پس $N = M$. برای اثبات $\sum_{i=1}^{n} S_i \langle\langle M$ به روش استقراء عمل می‌کنیم. فرض کنید $S_1+S_2+N=M$ چون $S_1 \langle\langle M$آنگاه $S_2+N=M$ و چون $S_2 \langle\langle M$، داریم N=M. حال فرض کنید $\sum_{i=1}^{n} S_i \neq N = M$ بنابراین $\sum_{i=1}^{n-1} S_i + S_n + N = M$ بنابه فرض استقراء، $S_n+N=M$ و چون $S_n \langle\langle M$ داریم N=M. □

لم ۱۴*۰۱ : هرگاه $S \langle\langle M'$و $M' \leq M$آنگاه $S \langle\langle M$.

اثبات :

فرض کنید $S + N = M$. چون $S \langle\langle M'$ بنابه قانون مدولی داریم $S + (N \cap M') = M'$ و چون $S \langle\langle M'$ آنگاه $N \cap M' = M'$ بنابراین $S \leq M' \leq N$. و از این‌رو از S+N=M نتیجه می‌گیریم S=M. □

لم ۱۴۰۱ :** فرض کنید برای هر $1 \leq i \leq n$، $S_i \langle\langle M_i$ آنگاه $\bigoplus_{i=1}^{n} S_i \langle\langle \bigoplus_{i=1}^{n} M_i$.

اثبات : بنا به لم ۱۴*۰۱ برای هر i ، $1 \leq i \leq n$، $S_i \langle\langle \bigoplus_{i=1}^{n} M_i$. از این‌رو بنابه لم ۱۴۰۱ داریم $\bigoplus_{i=1}^{n} S_i \langle\langle \bigoplus_{i=1}^{n} M_i$.

گزاره ۱۵۰۱ : گیریم k و l اعداد صحیح مثبت و $f:M \to \prod_{i=1}^{k} v_i$ و $g:M \to \prod_{j=1}^{l} N_i$ بروریختی و N_j, v_i میان تهی باشند، فرض کنیم Ker(f) و Ker(g) در M کوچک باشند، آنگاه l=k.

اثبات : همان قضیهٔ ۱۰۱۷ در [7] است.

گزاره ۱۶۰۱ : فرض کنیم M یک مدول باشد به طوری که همرتبه k=M . فرض کنید $f:M \to \prod_{i=1}^{k} N_i$ یک بروریختی با هر $0 \neq N_i$ باشد، آنگاه هر N_i میان تهی و Ker(f) در M کوچک است .

اثبات :

فرض کنید K:=Ker(f) در M کوچک نباشد، آنگاه یک $L\langle M$ وجود دارد بطوریکه K+L=M، فرض کنید $\eta_1: M \to \frac{M}{L}$ ، نشانگر نگاشت تصویری متعارف باشد، آنگاه بنا به لم ۶۰۱ نگاشت $\varphi:=(\eta_1, f): M \to \frac{M}{L} \times (\prod_{i=1}^{k} N_i)$ پوشاست. این نتیجه می‌دهد که همرتبهٔ $k+1 \leq M$ که تناقض است. فرض کنید یکی از N_iها مثلاً N_1 میان‌تهی نباشد، آنگاه همرتبهٔ $N_1 \leq 2$ بنابراین نگاشت پوشای $h:N_1 \to A \times B$ با $A \neq 0 \neq B$ وجود دارد . لذا

$$\alpha:=(h \times \prod_{i=2}^{k} IdN_i): N_1 \times \prod_{i=2}^{k} N_i \to A \times B \times \prod_{i=2}^{k} N_i$$

پوشاست و این بدان معنی است که همرتبهٔ $k+1 \leq M$ که تناقض است. □

متذکر می‌شویم که در اثبات بالا Id همان نگاشت همانی است.

قضیه ۱۷۰۱ : گیریم k یک عدد صحیح مثبت و M یک مدول با همرتبه k باشد، آنگاه :

i) یک‌همریختی پوشای $f:M \to \prod_{i=1}^{k} N_i$ و هر $0 \neq N_i$ وجود دارد که هر N_i ، میان تهی و Ker(f) در M کوچک است.

ii) اگر $g:M \to \prod_{i=1}^{l} V_i$ بروریختی باشد و هر V_i میان تهی و Ker(g) در M کوچک باشد، آنگاه l=k.

iii) گیریم $h:M \to M''$ بروریختی‌باشد، آنگاه Ker(h) در M کوچک است اگر و تنها اگر همرتبه $k = M''$.

اثبات :

i) نتیجه فوری از تعریف همرتبه و گزاره ۱۶۰۱ می باشد.

ii) نتیجه‌ای از (i) و گزارهٔ ۱۵۰۱ است.

iii) گیریم $H=Ker(h)$ فرض کنیم H در M کوچک باشد.چون همرتبه $k=M$ ، یک نگاشت پوشای $f:M\to\prod_{i=1}^{k}N_i$ با هر $0\neq N_i$ وجود دارد. گیریم $K_i=Ker(f_i)$ ، آنگاه $K_i\neq M$ و چون H در M کوچک است داریم $H+K_i\neq M$. قرار می دهیم $H_i=H+K_i$ ، فرض کنیم $\eta_i:M\to\frac{M}{H_i}$ ، نگاشت متعارف تصویری باشد، چون $H\leq H_i$،یک نگاشت پوشای $\alpha_i:M''\to\frac{M}{H_i}$ با ضابطه $\alpha_i(m'')=m+1$ برای هر $m''\in M''$ وجود دارد ، بطوریکه $m''=h(m)$ می باشد. نگاشت α_i بوضوح خوشتعریف است، همچنین $\eta_i=\alpha_i oh$ زیرا برای هر $m\in M$ ، $\alpha_i oh(m)=m+H_i=\eta_i(m)$ حال نگاشت $\alpha:=(\alpha_1,\ldots,\alpha_k):M''\to\prod_{i=1}^{k}\frac{M}{H_i}$ را در نظر می گیریم ، همچنین می دانیم که $Ker(\alpha_i)=h(H_i)$ و $0\neq\frac{M}{H_i}$ چون f برور یختی است بنام به لم ۶۰۱ ،برای $1\leq i\leq k$ داریم $K_i+\bigcap_{i\neq j}K_j=M$ ، چون $K_i\leq H_i$ از این رو برای $1\leq i\leq k$ ، $H_i+\bigcap_{i\neq j}H_j=M$. چون $H\leq H_i$ می دانیم $h(\bigcap_{i\neq j}H_j)=\bigcap_{i\neq j}h(H_j)$ و لذا برای $1\leq i\leq k$، $h(H_i)+\bigcap_{i\neq j}h(H_j)=M''$، حال بنا به لم ۶۰۱ ، $\alpha:M''\to\prod_{i=1}^{k}\frac{M}{H_i}$ پوشاست ، از این رو همرتبه $k\leq M''$ ، اما چون همرتبه $k+1\leq M$ ، نتیجه می‌گیریم همرتبه $k+1\leq M''$، از این رو همرتبه $k=M''$.

بالعکس: فرض کنیم همرتبه $k=M''$، آنگاه نگاشت پوشای $\beta:M''\to\prod_{i=1}^{k}W_i$ با هر $0\neq W_i$ وجود دارد ، اما $\beta oh:M\to\prod_{i=1}^{k}W_i$ پوشاست و بنا به (i) $Ker(\beta oh)$در M کوچک است ، چون $Kerh\subset Ker(\beta oh)$ بنا به لم ۱۴۰۱، Ker(h) در M کوچک است. □

گزاره ۱۸۰۱ : فرض کنید دنباله ای از زیر مدولهای میان تهی $\{H_i\}_{i=1}^{k}$ وجود داشته باشد که $M=\sum_{i=1}^{k}H_i$ که آنگاه همرتبه $k\geq M$.

اثبات : همان گزاره ۱۰۷ در [۸] است . □