

الله أَكْرَمُ الْجَنَانِ لِرَحْمَةِ

کلیه حقوق مادی مترتب بر نتایج مطالعات، ابتکارات و
نوآوری های ناشی از تحقیق موضوع این پایان نامه
متعلق به دانشگاه رازی است.



دانشکده علوم

گروه فیزیک

پایان نامه جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد رشته‌ی فیزیک
گرایش نظری

عنوان پایان نامه

سالیتون در پیوندگاه جوزفسون

استاد راهنما:

دکتر کیومرث منصوری

نگارش:

سمانه قیصری

۱۳۸۹ آذر



**Faculty of Basic Science
Department of Physics**

M.Sc.Thesis

Title of the Thesis Soliton in Josephson Junction

By: Samaneh Gheysari

Evaluated and approved by thesis committee:as

Supervisor Dr. K. Mansouri

External Examiner Dr. Sh. Salimi

Internal Examiner Dr. S. Behrouzi

December ۱۴۰۰



دانشکده علوم پایه

گروه فیزیک

پایان نامه جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد رشته فیزیک گرایش نظری

نام دانشجو سمانه قیصری

تحت عنوان

سالیتون در پیوندگاه جوزفسون

در تاریخ ۱۷/۹/۸۹ توسط هیأت داوران زیر بررسی و با درجه عالی به تصویب نهایی رسید.

امضاء ۱- استاد راهنما دکتر کیومرث منصوری با مرتبه علمی استادیار

امضاء ۲- استاد داور داخل گروه دکتر صمد بهروزی با مرتبه علمی استادیار

امضاء ۳- استاد داور خارج از گروه دکتر شهریارسلیمی با مرتبه علمی استادیار

تهدیر و سکر

پاس خداوندی همتارا که توفیق گذراندن این مرحله از زندگیم را به من اعطافرمود.

با پاس و مشکر فراوان از راهنمایی‌های استاد گرامی جاپ آقای دکتر منصوری.

پاس و مشکر از شادروان پدرم که تمام زندگی و آرزوی ایش را وقت موقیت فرزندانش کرد و چه حیف که فرصت دیدار لجند رضایت او در گذراندن این دوره تحصیلی از من کرفته شد.

از زحمات همسرم آقای حمید یوسفی که در تمام مرالی تهیه و تدوین این پژوهش از پیچ کوشش و ارشادی دینه تتموده و صبورانه مرا یاری دادگال مشکر و قدردانی را دارم.

بهمنین از خانواده‌ی عزیزم که همواره باعث دلکرمی ام بوده‌ام و تمامی دوستانم (دانشجویان کارشناسی ارشد ۸۷) که بهمن خواهرانی مهربان مرا یاری کردند صیغه‌ای ابراز قدردانی و مشکر را دارم.

تعدیم به روح جاودان پر م

مادر مهر با نعم

و همسر عزیزم

چکیده

در این پایان‌نامه پیوندگاه جوزفسون توسط پدیده میکروسکوپی تونل‌زنی و تاثیر اعمال ولتاژ به دو سر آن و حضور در میدانهای مغناطیسی مورد بررسی و معرفی قرار می‌گیرد. در اینجا هدف، دست یافتن به جوابهای معادله سینوسی گوردون است که رفتار پیوندگاه جوزفسون را توصیف می‌کند.

اثر جوزفسون پدیده‌ای شامل شارش جریان در عرض دو ابرسانای مجزا که بطور ضعیف توسط یک لایه نازک بهم متصل شده‌اند، می‌باشد. پیوندگاه جوزفسون با تونل‌زنی جفت‌های کوپر همراه است. پیوندگاه جوزفسون طویل پیوندگاهی است که حداقل یک بعد بزرگتر از طول جوزفسون دارد و در فیزیک کاربرد زیادی دارد. پیوندگاه جوزفسون طویل برای مطالعه سالیتونها پیشنهاد می‌شود. یک فلاکسون در یک پیوندگاه جوزفسون طویل یک کوانتم شار مغناطیسی را حمل می‌کند و در خیلی از موارد رفتار آن مانند سالیتونها است. این شار مغناطیسی که توسط یک ابرجریان چرخشی تولید شده اغلب گردابه جوزفسون نامیده می‌شود و بین دو ابرسانا که توسط یک لایه نازک نانومتری عایق از هم جدا شده‌اند، جایگزیده است. فلاکسون از لحاظ ریاضی با یک کینک از اختلاف فاز کوانتمی بین دو الکترود ابرسانای پیوندگاه مناسب است.

سالیتون جوزفسون همچنین یک پالس الکترومغناطیسی است. وقتی سالیتونها بطور تناوبی به قسمت انتهای آزاد یک پیوندگاه خطی می‌رسند، تابشی در ناحیه میکروموج و یا موج میلیمتری از طیف الکترومغناطیس گسیل می‌شود که منجر به کاربرد پیوندگاههای جوزفسون طویل بعنوان نوسانگرهای می‌شود.

فهرست مطالب

صفحه	عنوان
فصل اول: مقدمه‌ای بر سالیتون	
۱	۱- مقدمه
۲	۲- موج منفرد
۳	۳- در جستجوی سالیتونها
۶	۶- سالیتون معادله KDV
۸	۸- سالیتون معادله Sine Gordon
۱۰	۱۰- فصل دوم: ابررسانایی و پدیده تونل زنی
۱۱	۱۱- ۱- مقدمه
۱۱	۱۱- ۱-۱- دیامغناطیس کامل
۱۲	۱۲- ۱-۲- عمق نفوذپذیری مغناطیسی
۱۳	۱۳- ۱-۲- عوامل موثر بر ابررسانایی
۱۴	۱۴- ۲- اندرکنش الکترون و شبکه
۱۵	۱۵- ۳-۲- زوجهای کوپر
۱۶	۱۶- ۴-۲- نظریه BCS
۱۷	۱۷- ۵-۲- شبه ذره
۱۸	۱۸- ۶-۲- پدیده تونل زنی و شکاف انرژی
۱۹	۱۹- ۱-۶-۲- عمل تونل زدن بین دو ابررسانایی متشابه
۲۰	۲۰- ۲-۶-۲- تونل زنی جوزفسون
۲۱	۲۱- فصل سوم: اثرجوزفسون
۲۲	۲۲- ۱-۳- تابع موج زوج الکترون
۲۳	۲۳- ۲- فاز موج زوج الکترون
۲۴	۲۴- ۳- ۳- شارگونه
۲۷	۲۷- ۴-۳- معادلات پایه‌ای اثرجوزفسون
۲۹	۲۹- ۱-۴-۳- ارتباطات ضعیف
۳۰	۳۰- ۵-۳- اثر جوزفسون DC
۳۶	۳۶- ۶-۳- اثر جوزفسون AC
۳۸	۳۸- فصل چهارم: پیوندگاه جوزفسون
۳۹	۳۹- ۱-۴- شبیه سازی پیوندگاههای جوزفسون

۴۰	۱-۱-۴ - تشبيه پاندولی
۴۲	۲-۴ - ميدان مغناطيسي و اثرات آن روی پيوندگاه جوزفسون
۴۹	۳-۴ - پيوندگاه جوزفسون طويل
۵۲	۱-۳-۴ - پلهای ميدان صفر
۵۴	فصل پنجم: معادله سينوسی گوردون
۵۵	۱-۵ - مدل سازی پيوندگاههای جوزفسون طويل
۵۵	۱-۱-۵ - ابررساناهای ايدهآل
۶۴	۲-۱-۵ - تونل زنی شبه ذرات
۶۴	۳-۱-۵ - کاربرد جريان باياس
۶۶	۲-۵ - امواج پلاسمای جوزفسون
۶۸	۳-۵ - حل معادله سينوسی مختل شده
۷۲	کاربردها
۷۳	نتيجه‌گيري و پيشنهادات

فصل اول

مقدمه ای بر سالیتون

۱-۱ مقدمه

فصل اول

مقدمه‌ای بر سالیتون

سالیتون^۱ ها نقش مهمی در بسیاری از پدیده‌ها ایفا می‌کنند. گاهی آنها به شکل بی‌خطری مثل امواج منفرد در یک کanal ظاهر می‌شوند و گاه به شکل امواج عظیمی به نام سونامی که مسافت‌های طولانی را می‌پیمایند، تهدیدی برای سواحل به شمار می‌آیند. سالیتونهای اپتیکی ظرفیت فیرهای را برای ارتباطات تلفنی زیاد کرده‌اند و سالیتونهای Sine-Gordon، در مواد چگال اتفاق می‌افتد. در همه این موارد یک سالیتون پایدار است. هدف اصلی در این پایان‌نامه بررسی پیوندگاه جوزفسون و رسیدن به معادله حاکم بر آن یعنی معادله سینوسی گوردون است. در سال ۱۹۶۲ برایان جوزفسون^۲ شارش جریان همراه با تونل‌زنی کوانتمویی همدوس جفتهای کوپر از بین سد میان دوالکترودهای ابررسانا یعنی یک پیوندگاه جوزفسون را پیش‌گویی کرد، که متناسب با تابع سینوسی اختلاف فاز است و به عنوان رابطه dC جوزفسون شناخته می‌شود. مشتق زمانی اختلاف فاز دو سر پیوند متناسب با ولتاژ در عرض سد است، که به عنوان رابطه aC جوزفسون شناخته می‌شود^[۳]. معادله سینوسی گوردون که از این دو رابطه نتیجه می‌شود دارای دو نوع همگن و ناهمگن است و جوابهای این معادله فلاکسونها نامیده می‌شوند که در اغلب موارد مانند سالیتونها رفتار می‌کنند.

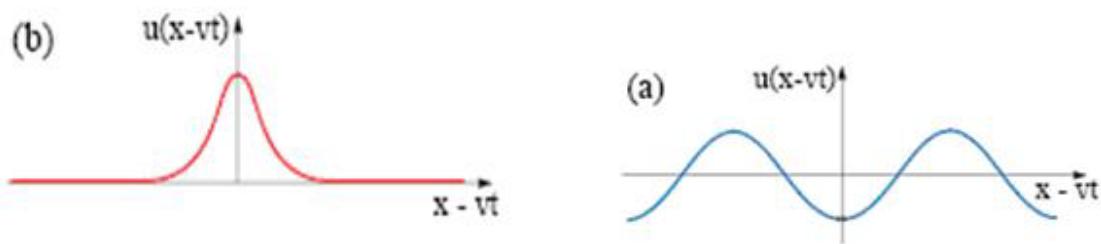
در فصل اول این پایان‌نامه به معرفی سالیتونها به عنوان امواج متزווی خود تقویت کننده پرداخته شده است. در فصل دوم، دیدگاههای میکروسکوپی و ماکروسکوپی ابررسانایی و پدیده تونل زنی در پیوندگاه جوزفسون مورد بررسی قرار می‌گیرد. فصل سوم شامل معرفی فلاکسون و اثبات معادلات پایه‌ای جوزفسون با استفاده از روابط ریاضی و ویژگیهای فیزیکی می‌شود. فصل چهارم به شبیه‌سازی پیوندگاه جوزفسون و تاثیر میدان مغناطیسی بر روی پیوندگاه جوزفسون پرداخته است و در فصل پنجم با مدل‌سازی پیوندگاه جوزفسون به معادلات سینوسی گوردون همگن و ناهمگن رسیده و جوابهای آنها را به روش تحلیلی و محاسبات عددی به دست می‌آوریم. در انتها کاربردها و نتیجه گیری بیان شده است.

^۱ Soliton
^۲ Brayan Josephson

۲-۱ موج منفرد

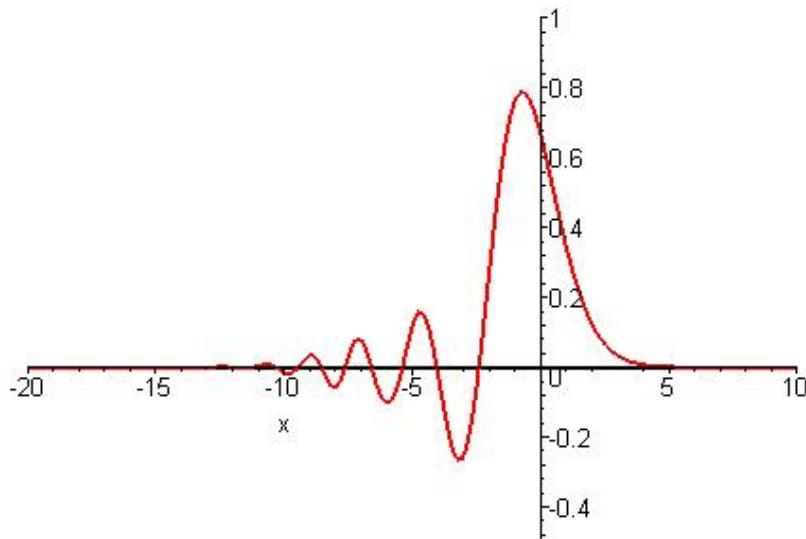
تاسال ۱۹۶۰، فیزیکدانها فکر می کردند که تقریباً به تمامی خواص و ویژگی های حرکت موجی پی برده اند. امواج در محیط های گوناگون مثل امواج آب و امواج الکترومغناطیسی و ... جملگی از قوانین بنیادی واحدی پیروی می کنند که دامنه، بسامد و سرعت امواج با معادلات ساده ای به خواص محیط انتشار مربوط می شوند. اما در میان امواج غیرعادی تر موج و همچنین انواعی که توصیف ریاضی آنها دشوار تر است امواجی هستند که آنها را امواج منفرد می نامند. موج منفرد شامل یک براهمدگی یا یک فورفتگی است که به صورت انفرادی حرکت می کند.

اکثر امواج واقعی کاملاً سینوسی نیستند. امواج غیر سینوسی را امواج مرکب می نامند و می تواند بسیار متنوع باشد. به عنوان مثال، شکل امواج دریا ممکن است پیچیده و پر اعوجاج باشد، نور بهندرت تکفam است، موج صوتی نوع آمیزه ای از چندین بسامد است و طنین آن عمدتاً توسط شکل موج تعیین می شود. تحلیل ریاضی امواج مرکب نسبت به امواج سینوسی خالص به مراتب دشوار تر است. مثلاً موج مرکب در حین انتشار الزاماً شکل خود را حفظ می کند و بنابراین معادلات توصیف کننده این امواج باید وابستگی آنها به زمان و مکان را به صراحت نشان بدهند. در مقابل امواج سینوسی دست کم در محیط بدون اصطکاک هرگز تغییر نمی کنند. پس معادلات آن هم بسیار ساده ترند. به غیر از امواج منفرد تمامی امواجی که درباره شان صحبت کردیم تناوبی اند و این از مشخصه های ماهیتی آنهاست. از لحاظ ریاضی دامنه چنین موجی در هر نقطه یک تابع تناوبی از مکان و زمان است. به عنوان مثال یک موج یک بعدی مثل موج در یک طناب بینهایت دراز و بدون اصطکاک را در نظر بگیرید. فرض می شود طول موج λ و دوره تناوب T باشد. در اینصورت اگر دامنه در مکان مشخصی مثل x معلوم باشد، در $x - \lambda$ ، x ، $x + \lambda$ و $x + T$ آخر هم معلوم خواهد بود. بهمین ترتیب اگر دامنه در زمان t اندازه گیری شود فوراً می توان مقدار آن را در زمانهای $T - t$ ، T و $T + t$ نیز معلوم کرد. در نتیجه کل موج را به جهت الگوی تکرار شونده اش می توان با دانستن شکل یک طول موج توصیف کرد [۶].



شکل (۱-۱) موج سینوسی (a) و موج منفرد (b)

برای بررسی شکل موجهای مرکب آنالیز فوریه فوق العاده مفید است. نیازی نیست که انتشار امواج مرکب را مستقیماً توصیف کرد بلکه می‌توان آنها را به مولفه‌های سینوسی شان، توابع سینوسی و کسینوسی سری فوریه تجزیه کرد و به بررسی حرکتهای ساده‌تر این امواج پرداخت. این مولفه‌ها که دامنه‌های آنها توصیفی از موج معینی را بدست می‌دهند هارمونیک نامیده می‌شوند. در مرحله نهایی می‌توان این امواج سینوسی را مجددآ باهم جمع کرد تا موج جدیدی حاصل شود. این فرایند که مکمل آنالیز فوریه است سنتز فوریه نام دارد. یکی از خواص مهم مرکب که به کمک آنالیز فوریه آن را به آسانی می‌توان فهمید، پاشندگی است. پاشندگی گرایش موج به پخش شدن در فضاست که به اتلاف آن می‌انجامد. علت اساسی پاشندگی این است که امواج دارای بسامدهای مختلف در بیشتر محیط‌ها با سرعتهایی حرکت می‌کنند که اندکی باهم فرق دارند. قاعده‌تا هرچه بسامد امواج بیشتر باشد حرکت آنها آهسته‌تر است و این امواج در پشت پیکره اصلی موج ظاهر می‌شوند و موج کوتاه‌تر و پهن‌تر می‌شود. هرچه این امواج بیشتر پیش می‌روند تعداد بیشتری از امواج عقب می‌افتد و پیکره اصلی موج بازهم کوتاه‌تر و پهن‌تر می‌شود. اگر موج می‌توانست بطور نامتناهی پیش برود، چنان پهن و کوتاه می‌شد که به کلی ناپدید می‌شد [۶].

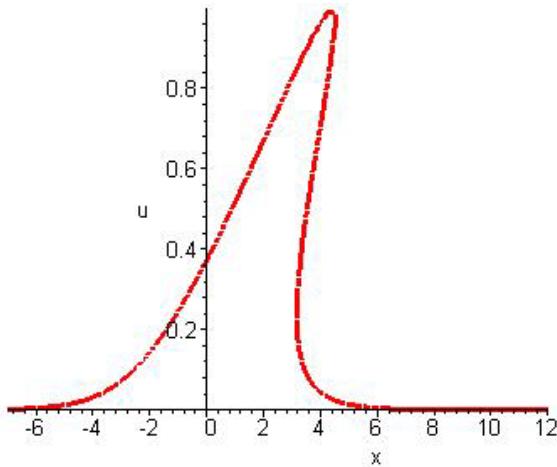


شکل (۲-۱) پاشندگی موج [۶]

این حکم درباره امواج صوتی و امواج آب و نیز امواج نوری که در محیط‌های مادی در حرکت باشند صادق است. پاشندگی می‌تواند موج را تحت شرایط ایده‌آل که هیچ گونه تضعیف ناشی از اصطکاک یا اثرهای مرتبط با آن وجود ندارد منهدم کند. موج سینوسی ساده علی‌الاصول می‌تواند تا بینهایت دوام بیاورد اما موج مرکب عمر محدودی دارد و در اثر پاشندگی از بین می‌رود [۵]. از آنجا که هر موج منفرد ضرورتاً یک موج مرکب است پس هر موج منفرد باید در معرض پاشندگی باشد. قانون پاشندگی در مورد امواج مرکب لغو نمی‌شود، اما اثر جبران کننده‌ای هم در کار است که دقیقاً با پاشندگی موازن می‌کند. از آنجا که پاشندگی حاصل جفت‌شدگی بسامد موج با سرعت انتشار موج است. اثر جبران کننده در امواج منفرد باید

حاصل جفت شدگی دامنه و سرعت باشد. این اثر جبران کننده را اثر غیر خطی موج می‌نامند. یعنی در محیط‌های گوناگون که حامل امواج منفردند، امواج مرتفعتر سریعتر حرکت می‌کنند. همین جفت شدگی است که موج منفرد را پایدار می‌سازد و به آن همدوسی چشمگیری می‌دهد.

با پاشیده شدن موج منفرد، مولفه‌های دارای بسامد بیشتر از مولفه‌های دارای بسامد کمتر عقب می‌مانند. در نتیجه کل موج تخت‌تر می‌شود. یا به عبارت دیگر دامنه‌اش کاهش می‌یابد. اما مولفه‌های کم دامنه‌تر آهسته‌تر حرکت می‌کنند و این یعنی که قله موج کم کم از لبه پیش‌روندۀ که دامنه کمتری دارد سبقت می‌گیرد. اثر دامنه شیب موج را تیزتر می‌کند که معادل با وارد کردن مولفه‌های با بسامد بیشتر است شکل (۱-۳). این دو پدیده رقیب، پهن شدن ناشی از وابستگی بسامد و تیز شدن شیب به علت وابستگی دامنه به سرعت به یک تعادل پایدار می‌رسند و شکل موج ثابت می‌ماند. اثرهای غیرخطی در بسیاری از انواع موجها تحت شرایط حدی مشاهده می‌شوند و برای تشکیل امواج منفرد و سولیتونها بسیار اساسی‌اند. اینکه پاشندگی و غیرخطی بودن دقیقاً یکدیگر را ختنی می‌کنند و امواج منفرد پدید می‌آورند، شاید یک توصیف غیر عادی و ناموجه به نظر برسد و در واقع تصادف هیچ دخالتی در این قضیه ندارد. شکل موج را توازن بین این گرایشها ی متضاد تعیین می‌کند. درست به گونه‌ای که وزن قایق با نیروی شناوری آب به تعادل می‌رسد. اگر شرایط به نفع پاشندگی بیشتر تغییر کند موج منفرد به یک نمایه پهن‌تر تغییر خواهد کرد و اگر آثار غیر خطی غالب شوند موج تیزتر خواهد شد. یکی از پیامدهای غیرخطی بودن این است که اصل برهم‌نهی دیگر صادق نیست یعنی یک موج بزرگ با مجموع دو موج کوچک‌تر معادل نیست [۶].



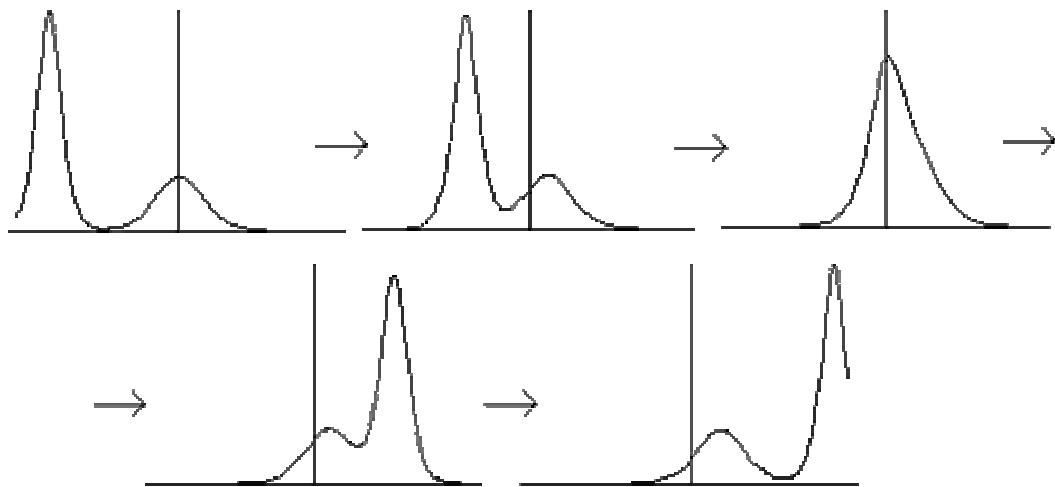
شکل (۱-۳) اثر غیر خطی موج [۶]

امواج منفرد را نخستین بار در اواسط قرن نوزدهم از راه آزمایش مشاهده کردند، اما ۵۰ سال طول کشید تا توضیح مناسبی دال بر وجود آنها پیدا شد و ۵۰ سال دیگر گذشت تا تکنیک‌های مناسبی تدوین شدند و امکان پژوهش درباره این امواج را فراهم آورند.

۱-۳ در جستجوی سالیتونها

جان اسکات راسل که مهندس ساختمان و اهل اسکاتلند بود در سال ۱۸۳۴ برای نخستین بار امواجی با شکل ثابت را ثبت کرد. او یک موج سالیتوری را در کanal مشترک در اسکاتلند مشاهده کرد. راسل برای تحقیقات عملی و نظری روی این امواج مقداری زمان صرف کرد، او مخزن‌های موجی در خانه‌اش ساخت و متوجه برخی خواص کلیدی شد.

- امواج پایدار بودند و می‌توانستند در مسیرهای خیلی طولانی حرکت کنند (امواج معمولی مایلند که یا پهن شوند و یا سرازیر شده و بیافتد)
- سرعت به اندازه‌ی موج و به پهناش روی عمق آب بستگی دارد.
- برخلاف امواج معمولی هیچ گاه ترکیب نمی‌شوند و بنابرین یک موج بزرگ بجای ترکیب با یک موج کوچک، از آن سبقت می‌گیرد.
- اگر یک موج به ازای عمق آب خیلی بزرگ باشد به دو موج یکی بزرگ و دیگر کوچک تقسیم می‌شود.
- سرعت چنین موجی دقیقاً به دامنه‌ی آن بستگی دارد. سرعت امواج در آب عمیقتر، بیشتر است و امواج مرتفعتر سریعتر از امواج تخت‌تر حرکت می‌کنند [۸].
تا سال ۱۹۶۰ به نظر می‌رسید که در امواج منفرد چیزهای عجیب و غریب دیگری وجود ندارد اما بعد کشف غیرمنتظره‌ای روی داد. نورمن زابوسکی از آزمایشگاه‌های بل و مارتین کروسکال از دانشگاه پرینستون مشغول مطالعه تغییرات این امواج از طریق شبیه سازیهای کامپیوتری حرکت آنها بودند. چیزی که در شبیه‌سازیها مشاهده شد این بود که دو موج منفرد پس از برخورد از میان یکدیگر عبور می‌کنند و با همان شکل و هویت قبلی خود سالم از طرف دیگر در می‌آیند. امواج منفرد چنان همدوسی و پایداری چشمگیری را به نمایش گذاشتند که به نظر می‌رسید شبیه ذرات ماده هستند تا شبیه امواج. به همین جهت زابوسکی و کروسکال به پیروی از این رسم که ذرات بنیادی در فیزیک با کلمات مختوم به اون نامگذاری می‌شوند این امواج را سالیتون نامیدند. برجسته ترین خصوصیت سالیتونها اینست که آنها شبیه ذرات رفتار می‌کنند. مطابق شکل (۱-۴) که برخورد دو موج سالیتونی را نشان می‌دهد موج با دامنه بیشتر سریعتر حرکت می‌کند و پس از برخورد با موج کوتاه‌تر بدون تغییر شکل به مسیر خود ادامه می‌دهد [۶].



شکل (۱-۴) برخورد دو موج منفرد

درازین و جانسون (۱۹۸۹) سه خاصیت به سالیتون نسبت دادند. به موجی که سه خاصیت زیر را دارا باشد سالیتون می‌گویند.

۱. شکل آن تغییر نکند.
۲. در منطقه‌ای از فضا محدود باشد.
۳. بعد از برخورد با سالیتونهای دیگر شکل خود را حفظ کند.

روشهای جدید و قدرتمندی برای توصیف این امواج به زبان ریاضی ابداع شده و بیش از یکصد معادله به دست آمده که امواج منفرد می‌توانند جوابهای آنها باشند. از جمله معادله کورتوگ - دوریز (KDV)، معادله غیر خطی شرودینگر و معادله ساین - گوردون و ... بعلاوه این امواج در حوزه‌های طبیعی گوناگون مثل جو اقیانوسها، فیزیک پلاسم و احتمالاً در دستگاههای عصبی موجودات زنده مشاهده شده‌اند. و سالیتونها نقش مهمی در ارتباطات راه دور بر عهده گرفتند. پایداری شکل و مصونیت امواج در برابر اعوجاج، آنها را حاملهای ایده‌آلی برای سیگنالهای راه دور ساخته است. سالیتونها را بر طبق معادلات غیر خطی ای که تکامل آنها را توصیف می‌کند می‌توان طبقه‌بندی کرد. در اینجا دو نوع از این معادلات آمده است.

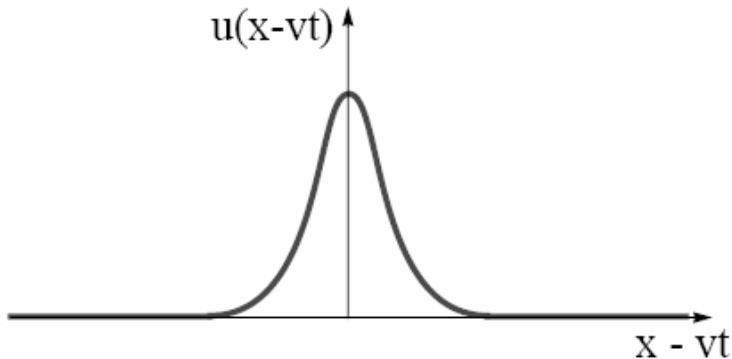
$$u_t = 6uu_x - u_{xxx} \quad (1) \text{ معادله KDV}$$

$$u_{tt} = u_{xx} - \sin u \quad (2) \text{ معادله Sine-Gordon}$$

در این معادلات، u تابعی بی بعد و وابسته به متغیرهای زمانی و فضای است.

۱-۳-۱ سالیتون معادله KDV

ویژگیهای اساسی سالیتون KDV را می‌توان به شکل زیر خلاصه کرد. شکل جواب معادله KDV به صورت زیر است.



شکل (۱-۵) جواب معادله (Korteweg-de Vries) KDV

۱) دامنه آنها با سرعت افزایش پیدا می‌کند (و بالعکس) بنابراین آنها نمی‌توانند در حالت سکون وجود داشته باشند.

۲) پهنه‌ای آنها به طور معکوس با ریشه مربعی سرعتشان متناسب است.

۳) یک پالس موج یک سویه است، یعنی سرعتش نمی‌تواند برای جوابهای معادله KDV منفی باشد.

۱-۳-۲ سالیتون معادله Sine-Gordon

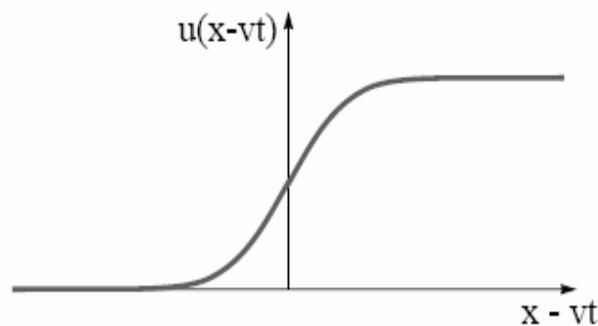
معادله Sine-Gordon نقش مهمی در بیشتر شاخه‌های فیزیک ایفا می‌کند. این معادله می‌تواند در تئوری جابجاشدگی مواد، در تئوری اتصال جوزفسون و مانند آن یافت شود. همینطور می‌تواند در تفسیر فرایندهای زیستی معینی مثل دینامیک DNA استفاده شود. جوابهای این معادله را از روش‌های مختلفی می‌توان بدست آورد. یکی از این روش‌ها، جداسازی متغیرها است که البته در این مورد جوابهای محدودی به ما می‌دهد. روش دیگر تبدیلات بکلاند است که از طریق آن جوابهای چند سالیتونی را می‌توان بطور کامل بدست آورد. ویژگی اصلی سالیتونهای Sine-Gordon، که در شکل (۱-۶) نشان داده شده است به صورت زیر خلاصه می‌گردد.

۱. دامنه‌اش مستقل از سرعت است، و این دامنه برای سرعت صفر دارای مقداری ثابت خواهد بود.

بنابراین کینک ممکن است ایستا هم باشد.

۲. ویژگیهایی از یک ذره نسبیتی دارد.

۳. کینکی که جهت پیچ خورده مخالفی دارد آنتی کینک نامیده می‌شود.



شکل (۶-۱) جواب معادله Sine-Gordon

این سالیتونها بینهایت پایدار هستند و تحت تأثیر اصطکاک، سرعتشان کند می‌شود و سرانجام می‌ایستند و در حالت سکون می‌توانند و برای مدت‌ها باقی بمانند [۶].