وزارت علوم، تحقیقات و فناوری
دانشگاه تربیت معلم آذربایجان
دانشکده علوم پایه

پایان نامه

جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد

رشته ریاضی محض

عنوان

الگوریتم گرادیان تصویر شده برای حل مسئله رهاسازی برنامه‌ریزی نیمه‌معین برای مسئله حداکثر برش

استاد راهنما

دکتر علیرضا غفاری

استاد مشاور

دکتر شهرام رضاپور

پژوهشگر

بهزاد عشایری

اسفند ۱۳۸۷

تبریز - ایران

بسم الله الرحمن الرحيم

قدردانی

اکنون که به شکرانه الهی و در سایه ایزد منان، این پروژه به اتمام رسیده است، بر خود وظیفه می‌دانم تا از تمامی عزیزانی که راهگشای این پروژه بوده‌اند، تشکر و قدردانی نمایم. امید است که سپاس بی‌دریغ اینجانب را بپذیرند.

استاد محترم جناب آقای دکتر علیرضا غفّاری حدیقه که گنجینه‌های دانش خود را در نهایت صبوری و سخاوت در اختیار اینجانب قرار دادند و مرا در انجام این پروژه همراهی کردند. جناب آقای دکتر شهرام رضاپور که زحمت مشاوره این پروژه را بر عهده داشتند. جناب آقای دکتر علی خانی و دکتر جعفر پورمحمود که داوری این پروژه را پذیرفتند.

سایر اساتید محترم که در طول دوران تحصیلم افتخار شاگردی ایشان را داشته‌ام.

خانواده عزیزم و به خصوص پدر و مادر گرامی که یاور و مشوق همیشگی من در زندگی و به ویژه در دوران تحصیلاتم بوده‌اند.

برای تمام این عزیزان، سربلندی و موفقیت و سلامتی در تمام مراحل زندگی آرزو می‌کنم.

بهزاد عشایری

اسفند ماه ۱۳۸۷

ایران - تبریز

چکیده

برای گراف G با مجموعه رأس‌های V و یال‌های E و $S \subseteq V$، برش متناظر با مجموعه S که با $\delta(S)$ نشان داده می‌شود به صورت $\delta(S) = \{(i,j) \in E : i \in S, j \notin S\}$ است. اگر یال‌های گراف وزن‌های نامنفی $w = w_{ij} \in \mathbb{R}^{|E|}$ داشته باشند آن‌گاه وزن برش به‌صورت

$$w(\delta(S)) = \sum_{i,j \in \delta(S)} w_{ij},$$

تعریف می‌شود. مسئله برش‌ـبیشینه عبارت است از پیدا کردن برشی با وزن بیشینه در گراف که به‌صورت

$$\max\{w(\delta(S)) | S \subseteq V\},$$

فرمول‌بندی می‌شود.

در این پایان‌نامه پس از بیان تعریف‌ها و قضیه‌های اساسی در فصل اول، روش گرادیان تصویرشده را برای حل مسائل بهینه‌سازی خطی و غیرخطی معرفی می‌کنیم. آن‌گاه پس از معرفی بهینه‌سازی نیمه‌معین، شکل رهاسازی‌شده نیمه‌معین مسئله برش‌ـبیشینه را در نظر گرفته و آن را با استفاده از تجزیه چولسکی به شکل غیرخطی تبدیل می‌کنیم و پس از آن الگوریتم گرادیان تصویرشده را برای حل آن ارائه می‌دهیم و در پایان مزایا و تفاوت‌های این روش و روش مشابه که توسط هومر و پینادو ارائه شده‌است، را با تعیین پیچیدگی الگوریتم، بیان می‌کنیم.

واژه‌های کلیدی: مسئله برش‌ـبیشینه، روش گرادیان تصویرشده، بهینه‌سازی نیمه‌معین، رهاسازی نیمه‌معین، بهینه‌سازی درجه دوم، بهینه‌سازی عدد صحیح.

پیشگفتار

برای گراف غیرجهت‌دار و ساده G، با مجموعه رأس‌های V و مجموعه یال‌های وزن‌دار E با اعضایی به صورت جفت نامرتب $\{i,j\}$، مسئله برش-بیشینه، افراز مجموعه V به دو زیرمجموعه S و $\bar{S}=V\backslash S$ می‌باشد، طوری که مجموع وزن یال‌هایی که یک رأس آن‌ها در S و رأس دیگر در $\bar{S}$ قرار دارد، بیشینه شود. افراز V به دو زیرمجموعه S و $\bar{S}$ را یک برش می‌نامیم. مسئله برش-بیشینه یک مسئله $NP-$ کامل [۱۲] است و در حل عملا یکی از سخت‌ترین مسائل ترکیبیات می باشد. بنابراین ما در این پایان نامه برای حل مسئله برش-بیشینه، قالب‌بندی رهاسازی‌شده آن را در نظر گرفته و الگوریتم گرادیان تصویرشده را برای حل رهاسازی نیمه‌معین این مسئله ارائه می‌دهیم. مسئله برش-بیشینه کاربردهای زیادی دارد که از مهم‌ترین آنها طراحی شبکه[۵] و مسئله $Ising\ spin\ glass$ در فیزیک آماری [۳] می‌باشد. قالب‌بندی‌های مختلفی برای حل این مسئله ارائه شده‌است مثل قالب‌بندی بر اساس رهاسازی خطی [٦] که در فصل سوم این پایان‌نامه به اجمال شرح داده شده‌است. مثل دیگر مسئله‌های بهینه‌سازی ترکیبیاتی، مسئله برش-بیشینه را هم می‌توان به‌صورت بهینه‌سازی درجه دوم با متغیرهای دودویی (یا $\{-۱, ۱\}$) قالب‌بندی کرد. بر اساس این قالب‌بندی‌ها، الگوریتم‌های گوناگونی برای حل این مسئله هم برای یافتن جواب دقیق [٦] و هم برای جواب تقریبی ارائه شده‌است [۸].

اولین بار در حدود سال ۱۹۷۹، لوواشز[۱] [۱۴] یک بهینه‌سازی نیمه‌معین قالب‌بندی کرد که یک کران بالا برای مسئله ظرفیت شانون در گراف فراهم می‌کرد، شور[۲۰] رهاسازی نیمه‌معین را برای مسائل بهینه‌سازی ترکیبیاتی و مسئله‌های بهینه‌سازی غیر محدب معرفی کرد و پس از آن در مقالات دیگر نیز

[۱] Lovasz

این رهاسازی استفاده شد [۱۳، ۷، ۲]. با این ایده، رهاسازی نیمه‌معین مسئله برش-بیشینه، توسط ژوئمنز و ویلیامسون [۸] معرفی شد که دقت آن 0.87 است، به عبارت دیگر برش ایجاد شده با این نوع رهاسازی در بدترین حالت 0.87 برابر برش واقعی مسئله است.

انتخاب الگوریتم مناسب برای حل این نوع مسئله‌ها اهمیت زیادی دارد زیرا انتخاب یک الگوریتم نامناسب که برای حل یک مسئله نیمه‌معین عمومی طراحی شده‌است، ممکن است اندازه مسئله را محدود کند و به خاطر پیچیدگی بالای مسئله نتوانیم آن را در اندازه‌های بزرگ‌تر استفاده کنیم. در همین راستا در این پایان‌نامه الگوریتمی را ارائه می‌دهیم که به دلیل حجم پایین محاسبات نسبت به روش‌های دیگر، هم سرعت رسیدن به جواب بیشتر است و هم اجرای آن در رایانه به حافظه کمتری نیاز دارد. این الگوریتم، الگوریتم گرادیان تصویر شده با استفاده از بهینه‌سازی نیمه‌معین است.

در فصل اول، تعریف‌ها و قضیه‌های اساسی را آورده ، در فصل دوم، روش گرادیان تصویرشده را برای حل مسائل بهینه‌سازی خطی و غیرخطی معرفی می کنیم. در فصل سوم، بهینه‌سازی نیمه‌معین را به اجمال شرح داده و پس از آن مسئله برش-بیشینه رادر قالب‌بندی‌های مختلف معرفی می‌کنیم و در فصل چهارم، الگوریتمی برای حل آن با استفاده از روش گرادیان تصویر شده ارائه می‌دهیم و مزایای این روش را نسبت به روش‌های مشابه بررسی می‌کنیم.

فهرست مندرجات

فصل ۱

مقدمه

در این فصل، برخی تعریف‌های مقدماتی و قضیه‌های اصلی نظریه گراف و بهینه‌سازی نیمه‌معین و مسائل بهینه‌سازی را که در فصل‌های بعدی مورد استفاده قرار می‌گیرند، مطرح می‌کنیم.

۱.۱ مفاهیم مقدماتی

یک **گراف** $G(V, E)$، شامل مجموعه متناهی V و مجموعه E که‌شامل جفت‌هایی به صورت $\{i, j\}$ که i, j در V قرار دارند، است. V را مجموعه رأس‌ها و E را مجموعه یال‌ها می‌نامیم. اگر بین دو رأس گراف، دو یال وجود داشته باشد، آن‌ها را یال‌های **موازی** می‌نامیم. هر یال از یک رأس به خودش را یک **طوقه** می‌نامیم.

گرافی که طوقه و یال موازی نداشته باشد، یک گراف **ساده** نامیده می‌شود.

به مجموعه $\mathcal{C}$ در $\mathbb{R}^n$ که شامل تمام بردارهای n بعدی است، **محدّب** گفته می‌شود هرگاه به ازای هر $x_۱$ و $x_۲$ از $\mathcal{C}$ و $\lambda \in [۰, ۱]$ داشته باشیم $\lambda x_۱ + (۱ - \lambda)x_۲ \in \mathcal{C}$.

از نظر هندسی، مجموعه

$$\{\lambda x_۱ + (۱ - \lambda)x_۲ \quad | \quad \lambda \in [۰, ۱]\}$$

پاره‌خطّی است که $x_۱$ و $x_۲$ را به هم وصل می‌کند. برای هر $\lambda \in [۰, ۱]$، به هر نقطه به شکل $\lambda x_۱ + (۱ - \lambda)x_۲$ ترکیب محدّب $x_۱$ و $x_۲$ گفته می‌شود. همچنین برای هر $\lambda \in (۰, ۱)$ این نقطه را ترکیب محدّب **اکید** گویند[۴].

برای هر مجموعه $S \in \mathbb{R}^n$، کوچکترین مجموعه محدّب شامل S، **پوسته محدّب** S نامیده شده و با $Conv.hull(S)$ نشان داده می‌شود.

$$Conv.hull(S) = \{x | x = \sum_{i=۱}^{k} \lambda_i x_i \ , \ x_i \in S \ , \ i = ۱, ..., k \ , \ \lambda_i \in [۰, ۱] \ , \ \sum_{i=۱}^{k} \lambda_i = ۱ \ , \ k \geq ۱\}.$$

پوسته محدّب S، با ترکیبات محدّب نقاط مجموعه S ساخته می‌شود. مجموعه‌ای از بردارها یک **چند سقفی** است اگر پوسته محدّب تعداد متناهی بردار باشد. یعنی بردارهای $x_۱, ..., x_t$ از $\mathbb{R}^n$ موجود باشند به‌طوری‌که

$$P = Conv.hull\{x_۱, ..., x_t\}.$$

برای گراف G با مجموعه رأس‌های V و یال‌های E و $S \subseteq V$، **برش** متناظر با مجموعه S که با $\delta(S)$ نشان داده می‌شود به صورت

$$\delta(S) = \{(i, j) \in E : i \in S, j \notin S\},$$

است. اگر یال‌های گراف وزن‌های نامنفی $w = w_{ij} \in \mathbb{R}^{|E|}$ داشته باشند، آن‌گاه وزن برش به صورت

$$w(\delta(S)) = \sum_{i,j \in \delta(S)} w_{ij},$$

تعریف می‌شود. مسئله **برش‌بیشینه** عبارت است از **پیدا کردن برشی با وزن بیشینه** در گراف، که به صورت

$$\max\{w(\delta(S)) | S \subseteq V\},$$

قالب‌بندی می‌شود. مسئله برش بیشینه کاربردهای فراوانی دارد که از آن جمله می توان به کاربرد آن در طراحی شبکه[۵] و مسئله $Ising\ spin\ glass$ در فیزیک آماری [۳] اشاره کرد.

در نظریه پیچیدگی محاسباتی، **زمان حل (محاسبه)** یک مسئله، تعداد مراحلی است که برای حل آن مسئله طی می‌شود. گوئیم یک مسئله در زمان چندجمله‌ای قابل حل است هرگاه الگوریتمی برای حل مسئله موجود باشد به‌طوری‌که زمان حل مسئله از بالا به یک چندجمله‌ای کران‌دار باشد (زمان حل مسئله و اجرای محاسبات آن بزرگ‌تر از تابع چندجمله‌ای نباشد) که این چندجمله‌ای تابعی از بعد مسئله است. اگر تعداد مراحل حل یک مسئله برابر $An^{۲}$ (A مقداری ثابت است) باشد، آن‌گاه پیچیدگی محاسباتی این مسئله را با $O(n^{۲})$ نشان می‌دهیم. رده تمام مسئله‌هایی را که در مدت زمان چندجمله‌ای قابل حل هستند را با P نشان می‌دهیم. هر مسئله را می‌توان به‌عنوان یک سؤال که دارای جواب درست یا نادرست است مطرح کرد دراین‌صورت، رده تمام مسئله‌هایی که برای آن‌ها یک جواب مثبت، یک گواهی داشته باشد که از آن گواهی، درستی جواب مثبت در مدت زمان چند جمله‌ای بدست آید، NP می نامیم.

مسئله $\pi \in NP$ به رده **مسئله‌های NPـکامل** تعلق دارد هرگاه هر مسئله NP در زمان چندجمله‌ای قابل کاهش به مسئله π باشد.

مسئله برش‌بیشینه یک مسئله NPـکامل است [۱۲].

توجه داشته باشیم که اگر یک مسئله NPـکامل در زمان چندجمله‌ای قابل حل باشد، آن‌گاه تمامی مسائل رده NP در زمان چندجمله‌ای حل خواهند شد و بنابراین خواهیم داشت $P = NP$.

رده $NP-$ سخت رده مسائلی است که حداقل از مسائل رده NP، سخت‌تر است، به عبارت دیگر مسئله H یک مسئله $NP-$ سخت است اگر و فقط اگر یک مسئله $NP-$ کامل مثل L باشد که در زمان چندجمله‌ای H قابل تبدیل به L باشد.

اگر در یک مسئله بهینه‌سازی، برای راحتی حل مسئله یا کاهش زمان حل مسئله، یک یا چند قید از مسئله را در نظر نگیریم یا قیدی را طوری تغییر دهیم که مجموعه جواب شدنی مسئله بزرگ‌تر شود، مسئله جدید را **مسئله رهاسازی شده** می‌نامیم و به این عمل **رهاسازی** می‌گوییم.

فرض کنیم $A, B \in M_{m,n}$ در این صورت **حاصل‌ضرب داخلی** دو ماتریس A, B را به صورت

$$\langle A, B\rangle = tr(B^T A) = \sum_{i=۱}^{m}\sum_{j=۱}^{n} a_{ij}b_{ij},$$

تعریف می‌کنیم که در آن $tr(.)$ مجموع اعضای قطر اصلی ماتریس مربعی را نشان می‌دهد. و $M_{m,n}$ مجموعه ماتریس‌های حقیقی $m \times n$ را نشان می‌دهد. توجه داشته باشیم که اثر ماتریس $A \in M_n$ همان مجموع مقادیر ویژه ماتریس A می‌باشد. نرم متناظر با ضرب داخلی ماتریس‌ها، نرم **فربینیوس** می‌باشد که به صورت

$$\| A \|_F = \sqrt{\langle A, A \rangle}$$

تعریف می‌شود.

فرض کنیم $A \in S_n$، گوئیم ماتریس A **معین مثبت** است هرگاه به ازای هر x که $x \in \mathbb{R}^n - \{۰\}$، داشته باشیم $x^T Ax > ۰$. ماتریس معین مثبت را به صورت $A \in {S_n}^{++}$ یا $A \succ ۰$ نشان می‌دهیم.

فرض کنیم $A \in S_n$، گوئیم ماتریس A نیمه‌معین مثبت است هرگاه به ازای هر $x \in \mathbb{R}^n$، داشته باشیم $x^T Ax \geq ۰$. ماتریس نیمه‌معین مثبت را به صورت $A \in {S_n}^{+}$ یا $A \succeq ۰$ نشان می‌دهیم. در این‌جا چند نتیجه فوری از تعریف ماتریس‌های معین مثبت و نیمه‌معین مثبت ارائه می‌دهیم.

۱) هر زیرماتریس اصلی یک ماتریس نیمه‌معین (معین مثبت) خود یک ماتریس نیمه‌معین مثبت (معین مثبت) می‌باشد، به ویژه اعضای قطری یک ماتریس نیمه‌معین مثبت (معین مثبت)، نامنفی (مثبت) است [۱۰].

۲) فرض کنیم $A_i \in S_{n_i} \quad , \quad i \in \{۱, ..., n\}$، ماتریس قطری بلوکی متقارن

$$\begin{pmatrix} A_۱ & ۰ & ... & ۰ \\ ۰ & A_۲ & ... & ۰ \\ \vdots & ... & \ddots & \vdots \\ ۰ & ... & ۰ & A_n \end{pmatrix}$$

نیمه‌معین مثبت (معین مثبت) است اگر و فقط اگر A_i به ازای هر $i \in \{۱, ..., n\}$ نیمه‌معین مثبت (معین مثبت) باشد[۱۰].

۳) اگر $A \in {S_n}^{+}$ و $a_{ii} = ۰$ برای i ای برقرار باشد، آن‌گاه داریم:[۱۰] $a_{ij} = ۰ \;,\; \forall j \in \{۱, ..., n\}$

قضیه ۱.۱ **(تجزیه ماتریس‌های نیمه‌معین مثبت**[۱۰]) برای $A \in S_n$ گزاره‌های زیر معادل هستند:

۱) ماتریس A نیمه‌معین است.

۲) $i \in \{1, ..., n\}$, $\lambda_i(A) \geq 0$ که در آن $\lambda_i(A)$ها مقادیر ویژه ماتریس A هستند.

۳) $\exists C \in M_{m,n}$ به‌طوری‌که $A = C^T C$، برای چنین Cای داریم:

$$\text{rank (C)} = \text{ rank (A)}$$

قضیه ۲.۱ **(مکمل شور**[۱۰]) فرض کنیم $A \in {S_m}^{++}$ و $C \in S_n$ و $B \in M_{m \times n}$، آن‌گاه داریم:

$$\begin{pmatrix} A & B \\ B^T & C \end{pmatrix} \succ 0 \Longleftrightarrow C - B^T A^{-1} B \succ 0,$$

$$\begin{pmatrix} A & B \\ B^T & C \end{pmatrix} \succeq 0 \Longleftrightarrow C - B^T A^{-1} B \succeq 0.$$

توجه داشته باشیم که $A \succ 0$ اگر و فقط اگر $A^{-1} \succ 0$. زیرا اگر λ_iها مقادیر ویژه ماتریس A باشند $\frac{1}{\lambda_i}$ها مقادیر ویژه ماتریس A^{-1} خواهند بود.

برای ماتریس نیمه‌معین مثبت A، دترمینان هر زیر ماتریس اصلی باید نامنفی باشد، اما عکس این موضوع ممکن است برقرار نباشد، به عبارت دیگر ما برای ماتریس نیمه‌معین مثبت A، قضیه مکمل شور را می‌توانیم به‌صورت

$$\begin{pmatrix} a_n & {b_n}^T \\ b_n & C_n \end{pmatrix} \succeq 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} either & a_n > 0, C_n - \frac{1}{\mathrm{a_n}} b_n {b_n}^T \succeq 0 \\ or & a_n = 0, b_n = 0, C_n \succeq 0 \end{cases}$$

استفاده کنیم.

قضیه ۳.۱ **(تجزیه چولسکی** [۱۰]**)** برای ماتریس $A \succ 0$، ماتریس پایین‌مثلثی یکتای L وجود دارد به‌طوری‌که $A = LL^T$.

توجه داشته باشیم که چنین تجزیه‌ای برای ماتریس‌های نیمه‌معین نیز وجود دارد اما ماتریس L ممکن است یکتا نباشد.

با توجه به قضیه تجزیه ماتریس‌های نیمه‌معین مثبت، ما ماتریس نیمه‌معین مثبت A را می‌توانیم به شکل C^TC بنویسیم و این حقیقت که چنین تجزیه‌ای وجود دارد بسیار حائز اهمیت است و در بسیاری از اثبات‌ها و الگوریتم‌ها استفاده می‌شود. یک تعبیر این تجزیه این است که می‌توانیم ستون iام ماتریس C را به صورت بردار v_i در نظر بگیریم. در واقع مؤلفه a_{ij} ماتریس A، حاصل‌ضرب داخلی بردارهای v_j , v_i می‌باشد یعنی $a_{ij} = \langle v_i, v_j \rangle$.

چنین تجزیه‌ای یکتا نیست و روش‌ها و الگوریتم‌های گوناگونی مثل تجزیه چولسکی و تجزیه مقدار ویژه، این تجزیه را به ما می‌دهند.

تعریف ۴.۱ (Lowner Partial order) فرض کنیم $A, B \in S_n$ آن‌گاه داریم:

$A \succeq B$ اگر $(A - B) \in {S_n}^+$

$A \succ B$ اگر $(A - B) \in {S_n}^{++}$

۲.۱ برنامه‌ریزی خطی

بهینه‌سازی خطی، شاخه‌ای ازبهینه‌سازی ریاضی است که با موثرترین روش‌های اختصاص دادن منابع محدود، برای فعالیت‌های شناخته شده‌ای، برای برآوردن هدف خاص سر و کار دارد. یک ویژگی بهینه‌سازی خطی این است که قیدهای آن همگی خطی هستند.

شکل استاندارد اولیه مسئله بهینه‌سازی خطی به صورت

$$\begin{aligned} \min \quad & c^T x \\ s.t. \quad & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned} \tag{۱}$$

و دوگان آن به صورت

$$\begin{aligned} \max \quad & b^T y \\ s.t. \quad & A^T y + z = c \\ & z \geq 0 \end{aligned} \tag{۲}$$

است که در آن‌ها $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ و $x, z, c \in \mathbb{R}^n$ و $b, y \in \mathbb{R}^m$.

هر بردار $x \geq 0$، که در قید $Ax = b$ صدق کند یک **جواب شدنی اولیه** و هر بردار (y, z) با $z \geq 0$ که در قید $A^T y + z = c$ صدق کند را یک **جواب شدنی دوگان** می‌نامیم. اگر در یک مسئله بهینه‌سازی خطی محدودیت‌ها ناسازگار باشند، طوری که مسئله بهینه‌سازی خطی جواب شدنی نداشته باشد (یا ناحیه شدنی تهی باشد)، مسئله را **نشدنی** می‌گویند. همچنین در حالتی که تابع هدف یک مسئله بهینه‌سازی خطی روی ناحیه شدنی متناظر خود (در حالتی که ناحیه شدنی تهی نیست) بی‌کران باشد مسئله **بی‌کران** و در غیر این صورت **کران‌دار** نامیده می‌شود.
قضیه بعدی که به **قضیه ضعیف دوگانی** مشهور است اولین خاصیت دوگانی را بیان می‌کند.

قضیه ۵.۱ [۲۲] اگر بردار x یک جواب شدنی برای مسئله (۱) و بردار (y, z) یک جواب شدنی برای (۲) باشد، آن گاه:

$$b^T y \leq c^T x.$$

به عدد حقیقی مثبت $c^T x - b^T y$ به ازای هر جواب شدنی اوّلیّه x و هر جواب شدنی دوگان (y, z)، شکاف دوگانی گفته می‌شود.
در ادامه خاصیّت دوّم دوگانی را با عنوان **قضیّه قویّ دوگانی** مطرح می کنیم.

قضیه ۶.۱ [۲۲] اگر مسئله(۱) جواب بهینه داشته باشد، آن‌گاه مسئله (۲) هم جواب بهینه دارد و مقدارهای بهینه هر دو مسئله با هم برابرند.

۳.۱ بهینه‌سازی عدد صحیح

بهینه‌سازی عدد صحیح[۱]، بهینه‌سازی است که در آن یک یا تمامی متغیرهای تصمیم عدد صحیح هستند. بهینه‌سازی عدد صحیح را محض گویند اگر تمامی متغیّرهای تصمیم عدد صحیح باشند و آن را مختلط گویند اگر برخی از متغیّرهای تصمیم صحیح باشند.
اگر چه چند الگوریتم متناهی جهت حلّ مسئله بهینه‌سازی عدد صحیح ابداع شده است ولی برخلاف بهینه‌سازی خطّی که با اندازه‌های بسیار بزرگ در مدت زمان نسبتاً کوتاه با روش‌های نقطه درونی [۱۸] قابل حل در کامپیوترهای رقمی است حلّ برنامه‌ریزی عدد صحیح با الگوریتم‌های موجود از کارایی یکنواخت خوبی برخوردار نیست.
صورت ریاضی مسئله بهینه‌سازی عدد صحیح خطّی به صورت

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{j=1}^{m} c_j x_j \\ s.t. \quad & Ax = b \text{ یا } Ax \le b \end{aligned}$$

است که در آن $x_j,\ j \in J = \{1, ..., n\}$ عدد صحیح است.

- روش‌های حل مسئله بهینه‌سازی عدد صحیح را می‌توان به دو دسته تقسیم کرد:

  ۱) روش‌های برش

  ۲) روش‌های جست وجو

در روش‌های برش، ابتدا جواب بهینه مسئله‌خطی پیوسته[۱] محاسبه می‌شود، سپس با افزودن قیدهایی ناحیه شدنی به‌تدریج تعدیل می‌گردد تا این‌که جواب بهینه مسئله پیوسته جواب بهینه مورد نظر را

[۱] مسئله خطی پیوسته مسئله‌ای است که در آن قید صحیح بودن از متغیرها برداشته شده است.

به‌وجود آورد. وجه تسمیه برش صفحه از آن‌جا ناشی می‌شود که افزودن هر قید، به طور مؤثر قسمتی از ناحیه شدنی مسئله پیوسته را حذف می‌کند به‌طوری‌که قسمت بریده شده شامل جواب صحیح شدنی نیست [۱].

روش جست وجو از ایده ساده بررسی کلیه ناحیه شدنی مسئله پیوسته استفاده می‌کند. ایده اساسی عبارت است از ابداع یک آزمون زیرکانه به طوری که برای به دست آوردن جواب بهینه، قسمتی از جواب‌های صحیح ناحیه شدنی آزمایش می‌شود. معروف‌ترین روش جست وجو روش شاخه وکران است [۱].

فصل ۲

روش گرادیان تصویرشده

روش گرادیان تصویرشده، از روش معمولی تندترین شیب فروشو نشأت گرفته است که برای حل مسائل نامقید بکار می‌رود. در این روش، برای اینکه جهت حرکت تعیین شود، قرینه بردار گرادیان به سطح فعال تصویر می‌شود. این روش برای مسائل مقید با قیدهای خطی و همچنین غیرخطی استفاده می شود. ابتدا حالت خطی را بررسی می‌کنیم.

۱.۲ روش گرادیان تصویرشده با قیدهای خطی

مسئله بهینه‌سازی

$$\begin{array}{lll} \min & f(x) & \\ s.t. & a_i^T x \le b_i \quad , & i \in I_1 \\ & a_i^T x = b_i \quad , & i \in I_2 \end{array} \qquad (1)$$

را در نظر می‌گیریم که قیدهای آن شامل تساوی‌ها و نامساوی‌های خطی است. اگر حداقل یک جواب شدنی داشته باشیم، آن را می‌توانیم از بهینه‌سازی خطی کمکی پیدا کنیم. به عبارت دیگر می‌توانیم با حل مسئله بهینه‌سازی

$$\begin{array}{lll} \min & \circ & \\ s.t. & a_i^T x \leq b_i &, \quad i \in I_1 \\ & a_i^T x = b_i &, \quad i \in I_2 \end{array}$$

یک نقطه شدنی برای مسئله اصلی پیدا کنیم. بنابراین همیشه فرض می‌کنیم که روند کاهشی که انجام می‌دهیم از یک نقطه‌ای شدنی شروع می‌شود. قبل از مطرح کردن روش گرادیان تصویر شده ابتدا چند تعریف و مفاهیم لازم را بیان می‌کنیم.

مسئله بهینه‌سازی محدب به مسئله‌ای گفته می‌شود که در آن هم تابع هدف و هم فضای شدنی مسئله محدب باشد و به طور معادل اگر مسئله بهینه‌سازی

$$\begin{array}{lll} \min & f(x) & \\ s.t. & g_i(x) \leq \circ &, \quad i \in \{1, 2, ..., n\} \end{array} \tag{۲}$$

را در نظر بگیریم، گوئیم این مسئله محدب است هر گاه، هم تابع $f(x)$ و هم توابع $g_i(x)$ها محدب باشند. فرض کنیم $\mathcal{F}$، مجموعه جواب شدنی مسئله باشد، گوئیم قید $g_i(x) \leq \circ$ در نقطه $\bar{x} \in \mathcal{F}$ فعال است اگر داشته باشیم $g_i(x) = \circ$.

فرض کنیم $I_{\bar{x}}$، مجموعه اندیس‌هایی را نشان دهد که $\bar{x}$ در قیدهای متناظر آن‌ها فعال باشد، با فرض محدب بودن مسئله (۲)، شرط کافی را برای این که $\bar{x}$ جواب بهینه مسئله (۲) باشد، در این قضیه مطرح می‌کنیم.

قضیه ۱.۲ نقطه $\bar{x} \in \mathcal{F}$ یک نقطه بهینه مسئله (۲) است، اگر تساوی

$$\nabla f(\bar{x}) = -\sum_{i \in I_{\bar{x}}} \bar{y}_i \nabla g_i(\bar{x}), \tag{۳}$$

برای $\bar{y}$ مثبتی برقرار باشد.

شرط (۳)، شرط بهینگی کروش– کان– تاکر(KKT) نامیده می‌شود. این شرط یک شرط کافی برای بهینگی مسئله محدب است اما یک شرط لازم نیست.