بسم الله الرحمن الرحيم

۱۴۱۵۸۹

دانشگاه گیلان

دانشکدهٔ علوم پایه
گروه ریاضی
(گرایش محض)

خواص بازگشتی نگاشت‌های حافظ اندازه

از

ملیحه دباغیان امیری

استاد راهنما

دکتر داود احمدی دستجردی

دفتر تحصیلات تکمیلی
دانشگاه گیلان

شهریور ۱۳۸۸

۱۳۸۹/۷/ ۳

۱۴۱۵۸۹

تقدیم به

پدر دلسوز و مادر مهربانم

به پاس از حمایت‌ها و زحمات بی‌شائبه‌شان.

تقدیر

پروردگارا ستایش از آن توست در اول وآخر و ظاهر و باطن. بارالها، هرچه دارم و هرچه هستم همه لطف و عنایت توست و من در حمد و ثنای تو عاجز. این تقصیر از من بپذیر و بر فضل و کرامت خود بیفزای.

لازم است ازجناب آقای دکتر درستکار که بعنوان نماینده تحصیلات تکمیلی در جلسه دفاع حضور به‌عمل رساندند و از جناب آقای دکتر ورسه‌ای و جناب آقای دکتر اسماعیل انصاری که قبول زحمت نمودند و داوری این پایان‌نامه را پذیرفتند، تشکر نمایم.

از استاد راهنمای بزرگوارم جناب آقای دکتر احمدی دستجردی قدردانی می‌کنم که در طول این مدت با صبر و شکیبایی و راهنمایی‌های به‌جای خود مرا در پیشبرد کار یاری رساندند و با حمایت‌های ایشان سختی کار برایم لذت‌بخش بود. برایشان از خدای منان آرزوی سلامتی و توفیق روزافزون می‌کنم.

از پدرو مادر مهربانم که برای به سرانجام رسیدنم از جوانیشان گذشتند، سپاسگذارم. گرمای وجودم از عشق و محبت ایشان است و آرزو می‌کنم همیشه وجودشان همچون چتری سایه‌بان زندگیم باشد. از برادران عزیزم که همیشه مرا مورد حمایتشان قرار دادند سپاسگذارم.

از خواهر خوبم سرکار خانم مریم حسینی که دلسوزانه در لحظه به لحظه کارهای پایان‌نامه مرا همراهی نمودند، سپاسگذارم. از تمام زحماتی که برایم متحمل شدند و از حمایت‌هایشان در طول این مدت قدردانی می‌کنم و برایشان آرزوی موفقیت دارم و برای تمام دوستان خوبم در دوران تحصیل که لحظات خوب و شادی را برایم آفریدند.

فهرست مطالب

فهرست جدول‌ها

چکیده:

خواص بازگشتی نگاشت‌های حافظ اندازه

ملیحه دباغیان امیری

برخی از مفاهیم بزرگی را برای زیرمجموعه‌های $\mathbb{Z}$ درنظر می‌گیریم و رابطه آنها را با خواص بازگشتی سیستم‌های دینامیکی توپولوژیکی بررسی می‌کنیم. این مفاهیم دسته بندی جدیدی از سیستم‌های دینامیکی ارائه می‌دهند و ما را به سمت تعریف خانواده جدیدی در نظریه ارگودیک رهنمون می‌سازند.

کلید واژه :

آمیختگی ضعیف، آمیختگی ملایم، مقاطع فربه، IP—مجموعه‌ها، ابرفیلتر خودتوان، مجموعه‌های مرکزی، چگالی بالایی باناخ.

Abstract:

Recurrence properties of measure preserving maps

Malihe Dabbaghian Amiri

We consider some notions of largeness for subset of $\mathbb{Z}$. We investigate their relations with recurrence in topological dynamics. Utilizing these concepts, a classification on the category of topological dynamical systems is given. This leads us on a new family of topological dynamical system which may not known befor.

Keywords:

Weak mixing, mild mixing, fat intersection, IP-sets, idempotents, central sets, upper Banach density.

پیشگفتار

در این پایان نامه که بر مبنای [۲] شکل گرفته شده است، به مطالعه بزرگی مجموعه زمان‌های بازگشت با کمک نظریه ارگودیک و سیستم‌های دینامیکی توپولوژیکی می‌پردازیم. در اینجا منظورمان از سیستم دینامیکی توپولوژیکی، فضای فشرده هاسدورف و متری X همراه با همیومورفیزم $T : X \longrightarrow X$ است.

زنجیری از مفاهیم بزرگی را بر روی زیرمجموعه‌های $\mathbb{Z}$ در فصل (۳) معرفی می‌کنیم و در مورد رابطه بین خانواده دوگان و دوگان گسترش یافته آن بحث می‌کنیم (جدول (۱) را ببینید).

در فصل (۴) نشان می‌دهیم خانواده‌های IP—مجموعه، C—مجموعه و D—مجموعه که در فصل (۳) به عنوان اجتماعی از ابرفیلترهای خودتوان معرفی شده‌اند، تعبیری معادل بصورت خانواده‌ای از مجموعه‌های $\{n \in \mathbb{Z} : \ (T^n x, T^n y) \in U\}$ دارند که y نقطه‌ای بازگشتی، جفت (x, y) پروکسیمال (proximal) و در فضای حاصلضربی $X \times X$، U همسایگی (y, y) است.

در سیستم‌های دینامیکی اندازه‌ای مجموعه مقطع فربه (fat intersection) را بصورت $R^{\epsilon}_{A,B} = \{n \in \mathbb{Z} : \ \mu(A \cap T^n B) > \mu(A)\mu(B) - \epsilon\}$ معرفی می‌کنیم. در قضیه اصلی‌مان که در فصل (۵) بیان شده، نشان می‌دهیم که با کمک این مجموعه می‌توان دسته بندی جدیدی از سیستم‌های دینامیکی توپولوژیکی ارائه داد. همچنین در فصل (۵) مشاهده می‌نمایید که خانواده مقاطع فربه $\mathcal{R}(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ کلاس جدیدی از آمیختگی بین آمیختگی ملایم و آمیختگی ضعیف تعریف می‌کند.

فصل ۱

مقدمات

در این فصل از بیان تعاریف و قضایای بسیار مقدماتی توپولوژی و آنالیز حقیقی که دانشجویان دوره کارشناسی ارشد با آن آشنا هستند، صرفنظر می‌کنیم و بیشتر به بیان تعاریف و قضایایی می‌پردازیم که در فصل‌های بعد مورد استفاده قرار می‌گیرد.

۱—۱ اندازه هار

تعریف ۱—۱—۱ : اندازه m را **منظم** (regular) گوییم، اگر برای هر $\epsilon > 0$ و هر E متعلق به سیگما—جبر بورل یک مجموعه فشرده M و یک مجموعه باز U چنان موجود باشد بطوریکه $M \subset E \subset U$ و $m(U \setminus M) < \epsilon$.

گزاره ۱—۱—۲ : اگر X متر پذیر باشد هر اندازه احتمال روی $(X, \mathcal{B})$ منظم است.

قضیه ۱—۱—۳ : فرض کنید G یک گروه توپولوژیکی فشرده باشد. اندازه احتمال m روی سیگما—جبر $\mathcal{B}$ از زیرمجموعه‌های بورل G چنان موجود است بطوریکه

$$\forall \;\; x \in G \;\;\; \forall \;\;\; E \in \mathcal{B} \quad \Rightarrow \qquad m(xE) = m(E)$$

که m اندازه احتمال است. تنها یک اندازه احتمال منظم که تحت دوران پایا بماند روی $(G, \mathcal{B})$ وجود دارد، این اندازه منحصر بفرد را **اندازه هار** (Haar measure) می‌نامیم.

اثبات: قضیه (۱۳.۰) از [۱۷] را ببینید. □

اندازه هار روی دایره $K = \{z \in \mathbb{C} : \;\; |z| = 1\}$، اندازه لبیگ نرمال شده روی دایره است و روی چنبره n—بعدی K^n ضرب مستقیم k اندازه هار روی دایره است.

۱—۲ نظریه کاراکتر

بسیاری از مثال‌هایمان، دوران، همیومورفیزم یا تبدیل آفین روی گروه توپولوژیکی فشرده خواهد بود و در بعضی اثبات‌ها از نظریه کاراکتر روی گروه‌های آبلی فشرده استفاده خواهیم کرد که در

این بخش بطور خلاصه به آن می‌پردازیم.

تعریف ۱—۲—۱ : فرض کنیم G یک گروه آبلی موضعاً فشرده باشد. گردایه همه هومورفیزم‌های پیوسته از G بروی دایره واحد $K=\{z\in\mathbb{C}:\ \ |z|=1\}$ را با $\hat{G}$ نشان می‌دهیم و اعضای آن را کاراکتر (character) G می‌نامیم.

اگر $G=K$ باشد عناصر $\hat{K}$ بصورت $z\mapsto z^n$ که $n\in\mathbb{Z}$ و در نتیجه $\hat{K}\simeq\mathbb{Z}$. گروه کاراکترهای روی چنبره n—بعدی $\hat{K}$ نیز با $\mathbb{Z}^n$ یکریخت می‌باشد و هر $\gamma\in\hat{K}^n$ بصورت زیر است

$$\gamma(z_1,\ldots,z_n)=z_1^{p_1}\cdot z_2^{p_2}\cdot\ldots\cdot z_n^{p_n}.$$

لم ۱—۲—۲ : نتایج زیر برای نظریه کاراکتر برقرار است.

۱) G دارای پایه توپولوژیکی شمارا است اگر و تنها اگر $\hat{G}$ دارای پایه توپولوژیکی شمارا باشد.

۲) G فشرده است اگر وتنها اگر $\hat{G}$ گسسته باشد.

باترکیب (۱) و (۲) می‌توان نتیجه گرفت G متر پذیر است اگر و تنها اگر $\hat{G}$ گروه گسسته شمارا باشد و این به ما اجازه می‌دهد که یک مسئله روی گروه‌های آبلی متر پذیر فشرده را به مسئله‌ای روی گروه‌های آبلی گسسته شمارا تبدیل کنیم.

۳) اگر G_1، G_2 گروه‌های آبلی موضعاً فشرده باشند دراینصورت $\widehat{G_1\times G_2}=\hat{G}_1\times\hat{G}_2$ (در اینجا $\times$ ضرب مستقیم را نشان می‌دهد). بنابراین، کاراکترهای $G_1\times G_2$ بصورت $(x,y)\mapsto\gamma(x)\delta(y)$ می‌باشند که $\gamma\in\hat{G}_1,\delta\in\hat{G}_2$.

۴) اگر G فشرده باشد اعضای $\hat{G}$ تشکیل یک پایه متعامد برای $L^2(m)$ می‌دهند که m اندازه هار است.

بنابراین هر $f\in L^2(m)$ را می‌توان بصورت $f=\sum_{\gamma\in\hat{G}}a_\gamma\gamma$ نوشت که a_γ اعداد مختلطی هستند که بطور منحصر بفرد تعیین می‌شوند و اگر $G=K$؛ این نمایش f همان سری فوریه f نامیده می‌شود.

۱—۳ مقدماتی از آنالیز تابعی

تعریف ۱—۳—۱ : فضای برداری مختلط H را یک فضای ضرب داخلی یا فضای یکانی (inner product space or unitary space) نامیم اگر به هر جفت از بردارهای x و y از H عدد مختلط $< x, y >$ را نظیر کنیم که آن را ضرب داخلی x و y می‌نامیم بطوریکه برای هر $\alpha \in \mathbb{C}$

۱) $< x, y >= \overline{< y, x >}$،

۲) $< x + y, z >=< x, z > + < y, z >$،

۳) $< \alpha x, y >= \alpha < x, y >$،

۴) $< x, x >\geq ۰$،

۵) $< x, x >= ۰$ تنها اگر $x = ۰$.

تعریف ۱—۳—۲ : فرض کنیم X فضای ضرب داخلی باشد. دراینصورت، نگاشت $\|.\| : X \longrightarrow \mathbb{R}$ با ضابطه $\|x\| =< x, x >^{\frac{۱}{۲}}$ یک نرم در X و نگاشت $\rho(x, y) = \|x - y\|$ متری روی X است.
اگر فضای ضرب داخلی نسبت به این نرم تام باشد آنگاه X یک **فضای هیلبرت** (Hilbert space) نامیده می‌شود.

تعریف ۱—۳—۳ : بردارهای x و y را متعامد نامیم اگر $< x, y >= ۰$ و آن را با $x \perp y$ نمایش می‌دهیم. برای $F \subset H$، E نمایش $E \perp F$ بدین معنی است که برای هر $x \in E$ و $y \in F$ داریم $x \perp y$. همچنین $E^{\perp}$ که **متمم قائم** E (orthogonal complement) نامیده می‌شود، مجموعه همه $y \in H$ است که با هر $x \in E$ متعامد باشد.

قضیه ۱—۳—۴ : اگر H فضای هیلبرت و M زیرفضای بسته‌ای از آن باشد آنگاه $E^{\perp}$ زیرفضای بسته H است، $M \cap M^{\perp} = \varnothing$ و $H = M \bigoplus M$.

تعریف ۱—۳—۵ : ایزومورفیزم از فضای هیلبرت H به خودش را **عملگر یکانی** (unitary operator) می‌نامیم.

قضیه ۱—۳—٦ : اگر H یک فضای هیلبرت و عملگرهای $U : H \longrightarrow H$ و $V : H \longrightarrow H$ یکانی باشند. دراینصورت،

۱) عملگر U ایزومتری است. بنابراین، $\|Ux\| = \|x\|$،

۲) $\|U\| = ۱$،

۳) عملگر $U^{-۱}$ نیز یکانی است،

۴) عملگر UV یکانی است.

اثبات: قضیه (۳.۱۰—٦) از [۱۲] را ببینید. □

تعریف ۱—۳—۷ : فرض کنید X یک فضای برداری توپولوژیکی (با توپولوژی τ) باشد. کوچکترین توپولوژی را که در آن همه تابعک‌های خطی روی X پیوسته شوند **توپولوژی ضعیف** X (weak topology) می‌نامیم.

توپولوژی اصلی X را معمولاً **توپولوژی قوی** (strong topology) می‌نامیم.

قضیه ۱—۳—۸ : (قضیه باناخ آلاقلو) اگر V یک همسایگی صفر در فضای برداری توپولوژیکی X باشد و

$$K = \{\Lambda \in X^* : \quad \forall\, x \in V \quad |\Lambda x| \leq ۱\}$$

دراینصورت K در توپولوژی ضعیف* فشرده است.

اثبات: قضیه (۱۵.۳) [۱۶] را ببینید. □

تعریف ۱—۳—۹ : در فضای نرمدار X دنباله $\{x_n\}_n$ بطور قوی همگراست اگر نقطه‌ای چون x موجود باشد بطوریکه

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\| = 0.$$

این همگرایی را همگرایی در نرم نیز می‌نامیم.

تعریف ۱—۳—۱۰ : در فضای نرمدار X دنباله $\{x_n\}_n$ همگرای ضعیف نامیده می‌شود، اگر $x \in X$ موجود باشد بطوریکه برای هر تابعک پیوسته Λ داشته باشیم

$$\lim_{n\to\infty} \Lambda(x_n) = \Lambda(x).$$

۱—۴ فضای توپولوژیک $\beta\mathbb{Z}$

در حالتی که فضا گسسته است فشرده سازی استون چخ به عنوان مجموعه‌ای از ابرفیلترها نشان داده می‌شود. مطالب این بخش از مراجع [۱۰] و [۳] برگرفته شده است.

تعریف ۱—۴—۱ : یک **ابرفیلتر** (ultrafilter) روی $\mathbb{Z}$ گردایه ناتهی p از زیرمجموعه‌های $\mathbb{Z}$ است که در شرایط زیر صدق کند.

۱) $\emptyset \notin p$،

۲) اگر $A \in p$ و $B \in p$ آنگاه $A \cap B \in p$.

۳) اگر $A \in p$ و $A \subset B$ آنگاه $B \in p$.

۴) (شرط ماکسیمال) برای $r \in \mathbb{N}$، اگر $\mathbb{Z} = A_1 \cup A_2 \cup \dots A_r$ دراینصورت $1 \leq i \leq r$ چنان موجود است بطوریکه $A_i \in p$.

گردایه p با سه شرط اول یک **فیلتر** (filter) است.

فضای متشکل از ابرفیلترها را با $\beta\mathbb{Z}$ نمایش می‌دهیم که $\beta\mathbb{Z}$ فشرده سازی استون چخ $\mathbb{Z}$ است.

تعریف ۱—۴—۲ : برای $a \in \mathbb{Z}$ خانواده $\{A \in \beta\mathbb{Z}: \quad a \in A\}$ یک ابرفیلتر است که آن را **ابرفیلتر اصلی** (principal ultrafilter) تولید شده توسط a می‌نامیم.

تعریف ۱—۴—۳ : برای $q \in \beta\mathbb{Z}$، p **تلفیق** (convolution) $p+q$ را تعریف می‌کنیم

$$p+q=\{A \subseteq \mathbb{Z}: \quad \{n: \quad (A-n) \in p\} \in q\}.$$

لم ۱—۴—۴ : برای $q \in \beta\mathbb{Z}$، p داریم $p+q \in \beta\mathbb{Z}$.

اثبات: لم (۲—۲—۴) از [۱] را ببینید. □

طبق لم فوق $(\beta\mathbb{Z},+)$ تشکیل یک نیم‌گروه می دهد. اکنون توپولوژی روی آن معرفی می‌کنیم که $\beta\mathbb{Z}$ فشرده می‌شود.

تعریف ۱—۴—۵ : برای $A \subseteq \mathbb{Z}$ تعریف می‌کنیم $\overline{A}=\{p \in \beta\mathbb{Z}: \quad A \in p\}$.

نتیجه ۱—۴—٦ : برای $B \subseteq \mathbb{Z}$، A داریم

$$\overline{A} \cap \overline{B}=\overline{A \cap B} \quad , \quad \overline{A} \cup \overline{B}=\overline{A \cup B}.$$

نتیجه می‌گیریم $\overline{\mathbb{Z}}=\beta\mathbb{Z}$. زیرا $\bigcup_{A \in \mathcal{A}} \overline{A}=\beta\mathbb{Z}$ که $\mathcal{A}=\{\overline{A}: \quad A \subset \mathbb{Z}\}$ درنتیجه $\mathcal{A}$ تشکیل یک پایه برای مجموعه‌های باز روی $\beta\mathbb{Z}$ می‌دهد.

لم ۱—۴—۷ : با توپولوژی فوق $\beta\mathbb{Z}$ یک فضای فشرده هاسدورف و تابع $\lambda_p(q)=p+q$ برای $p \in \beta\mathbb{Z}$ ثابت تحت عمل + یک نگاشت از چپ پیوسته است.

اثبات: لم‌های (۲—۲—۶) و (۲—۲—۷) از[۱] را ببینید. □

تعریف ۱—۴—۸ : ابرفیلتر $p \in \beta\mathbb{Z}$ را **خودتوان** (idempotent) نامیم اگر $p + p = p$.

لم ۱—۴—۹ : ابرفیلترهای اصلی خود توان نیستند.

اثبات: فرض کنید q ابرفیلتر اصلی تولید شده توسط a باشد. دراینصورت، $\{\circ\} \in q + q$ و طبق تعریف ابرفیلتر خودتوان $q + q = q$ نتیجه می گیریم $q \in \{\circ\}$ اما $a \notin \{\circ\}$ واین تناقض است. □

قضیه ۱—۴—۱۰ : (الیس) هر نیم‌گروه فشرده با عمل از چپ پیوسته دارای حداقل یک عنصر خودتوان می‌باشد.

اثبات: [۷] را ببینید. □

تعریف ۱—۴—۱۱ : ابرفیلتر خودتوان $p \in \beta\mathbb{Z}$ را **مینیمال** (minimal) گوییم اگر متعلق به ایده آل مینیمال $(\beta Z, +)$ باشد.

فصل ۲

سیستم‌های دینامیکی

سیستم‌های دینامیکی عمل یک گروه مانند $\mathbb{Z}$، $\mathbb{R}$، ... و یا نیم‌گروهی مانند $\mathbb{N}$ روی فضای X است که این فضا می‌تواند فضای اندازه، فضای توپولوژیکی و یا منیفلدهای هموار ... باشد و عمل هر عنصر گروه (یا نیم‌گروه) مانند یک تبدیل روی این فضا است که ساختار آن را حفظ می‌کند. در این پایان نامه تبدیل $T : X \longrightarrow X$ و ترکیب‌های آن T^n، $(n \in \mathbb{Z})$ را مورد مطالعه قرار می‌دهیم یعنی همان عمل گروه $\mathbb{Z}$.

در این فصل دو نوع از سیستم‌های دینامیکی را معرفی می‌کنیم. سیستم‌های دینامیکی توپولوژیکی که در بخش اول با آن آشنا می‌شویم و سیستم‌های دینامیکی اندازه‌ای که در بخش دوم به مطالعه برخی خواص آن می‌پردازیم.

۲—۱ سیستم‌های دینامیکی توپولوژیکی

در این بخش به معرفی برخی از ویژگی‌های اساسی نگاشت همیومورفیزم $T : X \longrightarrow X$ روی فضای متری فشرده X می‌پردازیم. مفاهیم این بخش از مراجع [۱۵] و [۱۷] برگرفته شده‌اند.

تعریف ۲—۱—۱ : زوج (X,T) را **سیستم دینامیکی توپولوژیکی** (topological dynamical system) نامیم که X یک فضای توپولوژیکی فشرده و هاسدورف و $T : X \longrightarrow X$ همیومورفیزم است.

تعریف ۲—۱—۲ : برای $x \in X$ به مجموعه

$$\{T^n x : \quad n \in \mathbb{Z}\} = \{\dots, T^{-۲}x, T^{-۱}x, x, Tx, T^{۲}x, \dots\}$$

مدار (orbit) x تحت T نامیده و با $O(x)$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۲—۱—۳ : سیستم (X,T) را **ترایا** (transitive) نامیم، اگر نقطه‌ای مانند $x \in X$ چنان موجود باشد که مدار آن در X چگال باشد $(\bar{O}(x) = X)$. نقطه x رانقطه ترایا یا تراگذر می‌نامیم.