بسم الله الرحمن الرحیم

وزارت علوم،تحقیقات و فناوری

دانشگاه بین المللی امام خمینی(ره)

دانشکده علوم پایه

پایان نامه کارشناسی ارشد ریاضی کاربردی

عنوان:

انتگرالگیری به کمک لتیس ها

استاد راهنما :

آقای دکتر داوود رستمی

استاد مشاور :

اقای دکتر سعید عباسبندی

تدوین :

مرضیه خاکسا رفرد

بهمن ماه۱۳۸۷

دانشگاه بین‌المللی امام خمینی
IMAM KHOMEINI INTERNATIONAL UNIVERSITY

بسمه تعالی

دانشگاه بین المللی امام خمینی(ره)

معاونت آموزشی دانشگاه- مدیریت تحصیلات تکمیلی

(فرم شماره ۲۶)

تعهد نامه اصالت پایان نامه

اینجانب ...مرضیه خاکسار... دانشجوی رشته ...ریاضی کاربردی... مقطع تحصیلی ...کارشناسی ارشد... بدین وسیله اصالت کلیه مطالب موجود در مباحث مطروحه در پایان نامه / تز تحصیلی خود، با عنوان ...[illegible]... را تأیید کرده، اعلام می نمایم که تمامی محتوی آن حاصل مطالعه ، پژوهش و تدوین خودم بوده و به هیچ وجه رونویسی از پایان نامه و یا هیچ اثر یا منبع دیگری، اعم از داخلی، خارجی و یا بین المللی ، نبوده و تعهد می نمایم در صورت اثبات عدم اصالت آن و یا احراز عدم صحت مفاد و یا لوازم این تعهد نامه در هر مرحله از مراحل منتهی به فارغ التحصیلی و یا پس از آن و یا تحصیل در مقاطع دیگر و یا اشتغال و ... دانشگاه حق دارد ضمن رد پایان نامه نسبت به لغو و ابطال مدرک تحصیلی مربوطه اقدام نماید. مضافاً اینکه کلیه مسئولیت ها و پیامدهای قانونی و یا خسارت وارده از هر حیث متوجه اینجانب می باشد.

نام و نام خانوادگی دانشجو مرضیه خاکسار

امضاء و تاریخ ۸۸/۱/۲۲

بسمه تعالی

دانشگاه بین المللی امام خمینی (ره)

جلسه دفاع از پایان نامه خانم مرضیه خاکسار دانشجوی مقطع کارشناسی ارشد رشته ریاضی کاربردی در مورخ ۸۷/۱۱/۸ تحت عنوان « انتگرال گیری به کمك ایده لئیس » در دانشگاه تشکیل گردید و مورد تایید نهایی هیات داوران قرار گرفت .

هیات داوران :

۱- استاد راهنما: آقای دکتر داوود رستمی

امضاء

۲- استاد مشاور: آقای دکتر سعید عباس بندی

امضاء

۳- عضو هیات علمی به عنوان داور خارجی: آقای دکتر پزشك

امضاء

۴- عضو هیات علمی به عنوان داور داخلی: آقای دکتر عبدالرحمن رازانی

امضاء

۵- نماینده تحصیلات تکمیلی: آقای دکتر آبکار

امضاء

اداره تحصیلات تکمیلی
حوزه آموزشی
دانشگاه بین المللی امام خمینی

تقدیم به

یگانه بی همتاکه دستم را گرفت و نگذاشت قلبم در پیاده روهای شلوغ دروغ و گناه گم شود

و

به پدر و مادرم دو گوهر گرانبهای زندگیم که الفبای زندگی که همان پاک زیستن است را به من آموختند و به همسر مهربانم که شریک همه زندگیم در لحظه های شادی و غم بود.

دستهای پر صداقتتان را می بوسم و تا پایان عمر منت پذیر الطاف بیکرانتان، هستم.

قدردانی

سپاس فراوان آفریننده بی همتا را که هر چه دارم مدیون او می دانم و به یاری او تحمل مشکلات و سختیها در تمام مراحل بر من آسان شد.

از استاد بزرگوارم جناب آقای دکتر رستمی به پاس زحمات فراوان و راهنماییهای ارزنده در انجام این پروژه تشکر و قدردانی می نمایم.

از اساتید گرامی دکتر عباس بندی، دکتر رازانی و دکتر پزشک بابت مطالعه این پایان نامه، شرکت در جلسه دفاعیه و ارایه نظرات ارزشمند سپاسگزارم.

در پایان جا دارد از زحمات ارزشمند پدر و مادر عزیز و بزرگوارم و همسر مهربانم که همواره مشوق من بودند و بدون محبت، فداکاری و حمایتهای همه جانبه آنها انجام این کار بر من میسر نبود، به خاطر کمکهای ارزنده اشان نهایت سپاس و تشکر را داشته باشم.

چکیده

امروزه در بسیاری از مسائل ریاضیات مالی محاسبهٔ انتگرال‌های چندگانه از اهمیت بسیار زیادی برخوردار است به‌طوری که در برخی از انتگرال‌ها به‌علت افزایش بعُد انتگرال‌گیری به بیش از هزار معمولاً انجام آن توسط روش انتگرال‌گیری عددی معمول غیرممکن می‌باشد و لازم است توسط روش‌های متغیرهای تصادفی و یا ایده‌های جدید به حل این‌گونه مسائل پرداخت.

در این پایان‌نامه سعی بر آن است که به ایده لتیس برای حل عددی انتگرال‌گیری بپردازیم.

اگرچه روش‌های مونت کارلو به‌عنوان ابزار قوی در ابتدای تولید این مسائل مطرح شده‌اند و دامنه مطالعات به روش‌های شبه مونت کارلو رسیده است ولی خطای این روش‌ها نیز وابستگی شدیدی به بعُد مساله دارند و با افزایش بعُد مشکلات محاسباتی بر مساله حکم می‌گردد.

لذا با معرفی ایده لتیس ملاحظه می‌گردد تا حدود بسیار زیادی مشکلات محاسباتی کاهش می‌یابد. امروزه اهمیت لتیس، به‌خصوص برای حل انتگرال‌گیری چند بعُدی و نامحدود بودن کران‌های انتگرال‌گیری است.

در این پایان‌نامه مفاهیم اولیه لتیس و لتیس انتگرال‌گیری مورد بررسی قرار گرفته و سپس شکل عمومی روش‌های لتیس معرفی می‌گردد و در ادامه چند نمونه از روش‌های لتیس از قبیل روش مستطیلی، حاصل‌ضربی، لتیس خوب، فیبوناتچی، روش بدنه متمرکز شده فضایی (BCC)[1]، خانواده روش‌های $\{w_{nr}\}$، روش‌های لتیس انتقالی و روش‌های لتیس محاطی مورد استناد قرار می‌گیرد، در ادامه، جهت بررسی خطای این دسته از روش‌ها، مفهوم لتیس ثانویه بیان و سپس مقدار خطا با کمک سری فوریه مورد تحلیل قرار می‌گیرد.

سپس به مجموع‌های چندگانه که رایج‌ترین شکل نمایش روش‌های لتیس می‌باشد در ادامه پرداخته می‌شود؛ با ساختار روش‌های لتیس در نمایش کانونی آنها روی مجموعه‌های چندگانه آشنا می‌شویم که

1) Body-Centred Cubic

این بحث، شامل مفاهیم مرتبه و یکسانی خواهد بود. نظریه مقدماتی گروه‌ها در به‌دست آوردن این شکل کانونی مورد استفاده قرار خواهد گرفت که به تفضیل در جای خود بیان خواهد شد.

روش‌های مرتبه یک و چندین ضابط جهت تعیین روش‌های مرتبه یک خوب بیان شده و هم‌چنین روش‌های لتیس محاطی که یک دسته از روش‌های لتیس می‌باشند همراه با ویژگی‌های آن برشمرده خواهد شد و در آخر چندین برنامه کامپیوتری جهت محاسبه عددی انتگرال‌های چندگانه با کمک روش‌های مونت کارلو[1]، روش لتیس فیبوناتچی و روش لتیس محاطی ارائه می‌شود.

از مراجع مهمی که در ارائه این پایان‌نامه، مورد مطالعه قرارگرفته است به ترتیب عبارتند از:

[23] I. H. Sloan and S. Joe, Lattice Methods for Multiple Integration, Clarendon Press. Oxford, 1994.

[4] R. Cools, Y. Kuo and D. Nuyens, Constructing embedded Lattice rules for multivariate integration, SIAM J. Sci. Comput; 28 (2006), PP 2162-2188.

[22] T. H. Sloam and J. Kachoyau, Lattice methods for multiple integration: theory, error analysis and examples, SIAM J. Number. Anal; 24(1987).

1) Monte Carlo

فهرست مطالب

فهرست شکل‌ها

فهرست جدول‌ها

فهرست برنامه‌های کامپیوتر

مقدمه

آن چه در ابتدای سخن به آن اشاره‌ای خواهیم داشت تاریخچهٔ مختصری از روشهای انتگرالگیری عددی از قبیل روشهای مونت کارلو و شبه مونت کارلو و لتیس‌ها می‌باشد، عمده این مطالب از [۲۳] اتخاذ شده است.

انتگرال‌گیری عددی در یک بعُد که از جمله آنها روش‌های نیوتن کاتس (باز و بسته) و گاوس می‌باشد در طی قرن‌ها مورد مطالعه و استفاده بوده است، مقالات موثری از Davis و Rabinowitz در سال ۱۹۸۴ و Engles در سال ۱۹۸۰ مؤید این مطلب می‌باشد، که در آنها به انتگرال‌گیری در یک بعد پرداخته شده است و اما انتگرال‌گیری در ابعاد بالا، نیازمند سیستم رایانه‌ای جهت محاسبات معتبر می‌بود.

اولین تاریخچهٔ قابل تحسین از انتگرال‌گیری چندگانه عددی توسط Stroud در سال ۱۹۷۱ رقم خورد، وی تلاش‌های زیادی جهت حل مسائل در ابعاد کم انجام داد چرا که این مسائل، کاربردهای زیادی در فیزیک اتمی، شیمی کوانتوم و آمار دارد. بنابراین مسائل زیادی جهت روش‌های انتگرال‌گیری در ابعاد ۶ یا ۱۰ یا ۲۰ (و حتی ۱۰۰) وجود دارد.

امروزه حتی با وجود رایانه‌های قدرتمند، انتگرال‌گیری در ابعاد بالا براحتی میسر نمی‌باشد. مسائل در ابعاد بالا بدلایل خصایصی که تابع زیر انتگرال دارد دارای مشکلات و پیچیدگی‌های می‌باشد، از جمله آنها، این است که تابع زیر انتگرال ممکن است شامل نقاط منفرد یا ناپیوستگی باشد و دیگر این‌که هندسه ناحیه انتگرال‌گیری ممکن است پیچیده و در عین حال کران‌دار یا بی‌کران باشد.

دو دسته مهم از مجموعه نقاط برای انتگرال‌گیری چندگانه مناسب می‌باشد: دنباله‌ها و روش‌های لتیس؛ انتگرال‌گیری چندگانه عددی در دو روش مونت کارلو و شبه مونت کارلو بر پایه استفاده از دنباله‌ها می‌باشد. از روش مونت کارلو به‌عنوان یک روش شبیه‌سازی آماری نیز یاد می‌شود. نام مونت کارلو از Nicholas Constantine Metroplis (1915-1999) گرفته شده است. الهام بخش او در این جهت Stanslaw Ulam (1909-1986) بوده است. تاریخچه موثق و رسمی روش مونت کارلو به سال ۱۹۴۹

با انتشار مقاله‌ای از Ulam و Metropolic بر می‌گردد تا اینکه در سال ۱۹۵۰ برای اولین بار روش شبه مونت کارلو پیشنهاد شد و اولین مقاله‌ای که در آن از این روش به‌عنوان یک تکنیک و روش حل یاد شد در سال ۱۹۵۱ توسط Richtmyer ارائه شد. در سال ۱۹۹۲، Niederreiter، کتابی با این عنوان نوشت، بعد از او Keller به سال ۱۹۹۵ پیشنهادی جهت کاربرد این روش در مسائل رادیویی داد.

با فرض آن که N تعداد نقاط و s، بعد ناحیهٔ انتگرالگیری مسأله باشد خطای روش شبه مونت کارلو از مرتبه $O(\frac{(\log N)^{s-1}}{N})$ می‌باشد که بهتر از خطای روش مونت کارلو $O(\frac{1}{\sqrt{N}})$ می‌باشد که توسط Sobol (1991) و Shrider (1965) محاسبه شد علاوه بر این طی محاسبات و آزمایشات نشان داده شد روش شبه مونت کارلو بهتر از روش مونت کارلو برای توابع ناپیوسته می‌باشد و این توسط Keller (1996) بیان شد.

روش‌های لتیس یکی از غنی و پرارزش‌ترین روش‌ها در محاسبات عددی انتگرال‌های چندگانه می‌باشد این روش‌ها در عین سادگی می‌تواند در ابعاد بالا مورد استفاده قرار گیرد.

روش‌های لتیس طی سال‌های ۱۹۵۰ تا ۱۹۶۰ با نظریات شاخص افرادی چون L. K. Hua، S. K. Zaremba، N. M. Korobov و E. Hlawkaوارد عرصه ریاضیات شد. اولین مفهوم از روش لتیس معمولی در سال ۱۹۷۷ توسط Frolov بیان و در سال ۱۹۸۷، Niederriter به تشریح این روش پرداخت بعدها این نظریات توسط Kachoyan (1984,1987) و Sloan و مورد کنکاش و گسترش قرار گرفت و در دهه‌های اخیر نگرش تازه و دوباره‌ای به این روش‌ها، جهت دستیابی به یک مفهوم خیلی عمومی‌تر شده است. این روش‌ها تنها در آنالیز عددی و ریاضیات کاربردی مورد استفاده قرار نمی‌گیرد بلکه هم‌چنین در علوم عملی و علومی که نیازمند محاسبات انتگرال‌های چندگانه هستند بسیار کارایی دارد.

این پایان‌نامه به یکی از انواع روشهای حل عددی انتگرالهای چندگانه، به نام روشهای لتیس می‌پردازد. این روش، نسبت به روشهایی که تا پیش از آن مورد استفاده بوده، از قبیل روش مونت کارلو

و شبه مونت کارلو دارای موفقیت بیشتری می‌باشد و این به جهت برخورداری از خطای کمتر می‌باشد. مفاهیم کلی این روش، مبحث ابتدایی این رساله را شامل می‌شود. روشهای لتیس به طور مشخصی به شکل مجموعه‌های چندگانه قابل بیان می‌باشد. نظریهٔ مقدماتی گروهها در این مبحث، نقش مهمی خواهد داشت. فرم کانونی روشهای لتیس با کمک مفاهیم «مرتبه» و «یکسانی»، ساختاری از این دسته از روشها را تشریح خواهد کرد. یک روش لتیس از مرتبه r، به r مجموع و r بردار صحیح $\mathbf{z}_1, \ldots, \mathbf{z}_r$ نیاز دارد. در حالت کلی این بردارهای صحیح یکتا نیستند ولی برای یک دسته خاص از روشهای لتیس به نام روشهای تصویر منظم این بردارها به طور یکتا انتخاب می‌شوند.

روشهای مرتبه یک لتیس و چندین معیار جهت ارزیابی این دسته از روشها که معرف کران خطای آنها می‌باشد مورد بررسی و تحلیل قرار گرفته می‌شود و روشهای مرتبه یک خوب که یکی از اقسام روشهای مرتبه یک می‌باشد مورد استناد قرار می‌گیرد. روشهای محاطی که یکی از اقسام روشهای لتیس می‌باشد، به همراه ویژگی‌های آن برشمرده می‌شود. از جمله مزیت‌های روش‌های محاطی آن است که با افزایش نقاط، محاسبات تابع در نقاط قبلی به هدر نمی‌رود و در واقع مجموعه نقاط جدید شامل نقاط قبلی نیز می‌باشد و همین ویژگی، ارزش و اهمیت این دسته از روشها را نشان خواهد داد.

در پایان چندین برنامه کامپیوتری، نتایج عددی حاصل از روشهای مونت کارلو، فیبوناتچی و محاطی را مورد مقایسه قرار خواهد داد.

شایان ذکر است، هم اکنون این موضوع، توسط افرادی چون Ian Sloan و Frances Kuo از دانشگاه New South Wales, Grzegorz Wasil Kowski از دانشگاه Kentucky، Ronald Cools از دانشگاه Leuven، Joe Steven از دانشگاه Texas State و Bengomin James Wather House از دانشگاه Liverpool John Moores مورد تحقیق، مطالعه و کنکاش قرار گرفته است.

فصل اول

مفاهیم اولیه در مورد لتیس

۱.۱ انتگرال‌گیری چندگانه عددی

روش‌های متفاوتی جهت محاسبه عددی انتگرال‌های چندگانه وجود دارد که در زیر به برخی از آنها اشاره خواهد شد. در این مسائل، انتگرال روی مکعب s بعدی واحد $C^s = [0,1]^s$، $s \in \mathbb{N}$ در نظر گرفته می‌شود، به‌عبارت دیگر داریم،

$$If = \int_{C^s} f(\mathrm{x})d\mathrm{x} = \int_0^1 \dots \int_0^1 f(x_1, \dots, x_s)dx_1 \dots dx_s. \qquad (۱.۱)$$

۱.۱.۱ روش مونت کارلو

در این روش، نقاط $\mathrm{x}_0, \dots, \mathrm{x}_{N-1}$ به‌طور تصادفی در $[0,1]^s$ انتخاب می‌شود و با قرار دادن در فرمول

$$Qf = \frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1} f(\mathrm{x}_j) \qquad (۲.۱)$$

انتگرال (۱۰۱) محاسبه می‌شود. خطای محاسبه If یا به‌عبارتی $|Qf - If|$ از فرمول

$$\frac{\sigma(f)}{\sqrt{N}}, \tag{۳۰۱}$$

محاسبه می‌شود [۱۶] که واریانس از رابطه زیر بدست می‌آید،

$$\sigma^{۲}(f) = Qf^{۲} - (Qf)^{۲},$$

در این روش برای داشتن خطای کم (۳۰۱)، N باید به قدر کافی بزرگ شود.

در برنامه‌های کامپیوتری ۱، ۲ و ۳ که در ضمیمه آورده شده است به روش انتگرال‌گیری مونت کارلو در یک، دو و سه بعد پرداخته شده است.

۲۰۱۰۱ روش‌های شبه مونت کارلو

در این دسته از روش‌ها نیز از همان فرمول (۲۰۱) استفاده می‌شود ولی نقاط $\mathrm{x}_{۰}, \ldots, \mathrm{x}_{N-۱}$ بهتر از حالت تصادفی انتخاب می‌شوند.

در روش‌های شبه مونت کارلو، همانند روش قبل، نقاط انتگرال‌گیری از یک دنباله نامتناهی و $\{\mathrm{x}_i\}_{i=۰}^{\infty}$ که مستقل از N است انتخاب می‌شود بنابراین با افزایش N، تنها نیاز به محاسبه مقادیر تابع در نقاط اضافه شده می‌باشد ولی بر خلاف روش مونت کارلو این دنباله طی الگوریتم مشخصی تولید می‌شود بر همین اساس مفهوم اختلاف نقاط انتگرال‌گیری مطرح می‌شود. اختلاف، کمیتی است که نقش مهمی در کران خطای این روش دارد [۱۶].

تعریف ۱.۱. اختلاف مجموعه نقاط P شامل $\mathrm{x}_{۰}, \ldots, \mathrm{x}_N \in C^s$ که با $D_N(J;P)$ نمایش داده می‌شود، به‌صورت زیر تعریف می‌شود،

$$D_N(J;P) = \sup_J \left|\frac{A(J)}{N} - |J|\right|,$$