بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه اصفهان

دانشکده علوم

گروه آمار

پایان نامه ی کارشناسی ارشد رشته ی آمار گرایش آمار ریاضی

مطالعه ای بر توزیع لیندلی و تعمیم‌های آن

استاد راهنما:

دکتر محمد حسین علامت ساز

پژوهشگر:

وجیهه عبداللهی خوراسگانی

آبان ماه ۱۳۹۱

کلیه حقوق مادی مترتب بر نتـایج مطالعـات، ابتکـارات و نـوآوری هـای ناشـی از تحقیـق موضوع این پایان نامـه متعلـق بـه دانشـگاه اصفهان است.

دانشگاه اصفهان
دانشکده علوم
گروه آمار

پایان‌نامه‌ی کارشناسی ارشد رشته‌ی آمار گرایش آمار ریاضی

خانم وجیهه عبداللهی

تحت عنوان

مطالعه ای بر توزیع لیندلی و تعمیم های آن

در تاریخ ۹۱/۸/۲۹ توسط هیأت داوران زیر با درجه **خوب** به تصویب نهایی رسید.

۱- استاد راهنمای پایان‌نامه دکتر محمد حسین علامت ساز با مرتبه‌ی علمی استاد امضاء

۲- استاد داور داخل گروه دکتر مجید اسدی با مرتبه‌ی علمی استاد امضاء

۳- استاد داور داخل گروه دکتر محمد بهرامی با مرتبه‌ی علمی استادیار امضاء

امضای مدیر گروه

سپاسگذاری

تهیه و تدوین این پایان نامه بدون راهنمایی، یاوری و محبت های استادان گرانمایه، دلسوز و عزیزی که نامشان شایسته آوردن است بی گمان ناممکن بود:

جناب آقای دکتر محمد حسین علامت ساز که راهنمایی هایشان را از من حقیر دریغ نداشتند و جناب آقایان دکتر مجید اسدی و دکتر محمد بهرامی که با نظرات ارزنده خود مرا در هرچه بهتر شدن این اثر یاری کردند

و نیز همه اساتید گروه که محبت ها و بزرگواری های آنان هرگز از لوح ضمیر این بنده ناچیز بیرون نخواهد شد.

پروردگار بزرگ بلندی بخش جایگاه علمی آنان و تندرست دارنده وجودشان باد.

تقدیم به

مادرم

که ذکر نام و یاد ذلالی وجودشان زنگار زمانه از دلم زدوده است.

پدر بزرگوارم

که پیشوانه زندگی و بهترین مشوق من بوده و هست.

خواهر و برادران مهربان که همواره بهترین یاوران من بوده و هستند.

چکیده

توزیع‌های آماری از مهم‌ترین ابزارهای اولیه‌ای هستند که در هر موضوع و مبحث آماری مطرح و مورد نیاز هستند. مبحث قابلیت اعتماد یکی از شاخه‌های آمار است که امروزه به طور وسیعی در شاخه‌های مختلف علوم، پزشکی و مهندسی مورد استفاده قرار می‌گیرد. برای تعیین مدل مناسب برای داده‌های بقا و تجزیه و تحلیل‌های مربوط لازم است ابتدا کلیه توزیع‌هایی که می‌توانند به عنوان توزیع طول عمر داده‌ها قرار گیرند را مورد مطالعه قرار داده و مناسب‌ترین توزیع را انتخاب کرد. توزیع لیندلی از جمله توزیع های تک پارامتری طول عمر است که رقیب مناسبی برای سایر توزیع های طول عمر به حساب می‌آید. در این تحقیق به بررسی خواص این توزیع می‌پردازیم و به منظور استنباط در مورد پارامترهای آن روش‌های مختلفی را به کار می‌گیریم . به ویژه با استفاده از رکوردهای بالایی توزیع نیز پارامتر آن را برآورد می‌کنیم.

همچنین با مطالعه پارامتر فشار- مقاومت توزیع مدل جدیدی در این زمینه ارائه می‌دهیم. علاوه بر این با مقایسه عملکرد مدل مخاطره‌های رقابتی لیندلی و نمایی در مورد کاربرد توزیع در این زمینه بحث می‌کنیم. از آن جایی که توزیع لیندلی به دلیل تک پارامتری بودن انعطاف پذیری کافی برای تحلیل انواع مختلف داده‌های طول عمر را ندارد، به دنبال روش‌هایی برای افزایش قابلیت‌های توزیع برآمده و از این رو با بیان توزیع لیندلی تعمیم یافته و لیندلی گسترش‌یافته مدل‌های جدیدی برای تحلیل داده‌های بقا ارائه می‌دهیم که قابلیت‌های ویژه‌ای نسبت به مدل‌های رایج گاما و وایبل دارند. در ادامه با بررسی ویژگی‌های توزیع‌های گسسته‌ی پواسن- لیندلی، دوجمله‌ای منفی ـ لیندلی و لیندلی گسسته، با چگونگی کاربرد آن‌ها در مدل ریسک تجمعی و مدل بندی تعداد تصادفات خودرو در مقایسه با سایر توزیع‌ها آشنا می‌شویم.

واژه‌های کلیدی : توزیع لیندلی تعمیم یافته، تابع قابلیت اعتماد، نرخ شکست، سانسور فزاینده نوع دوم، تابع W لامبرت، شبیه سازی.

فهرست مطالب

عنوان **صفحه**

فصل اول: مفاهیم و مقدمات اولیه

۱-۱ مقدمه تحقیق ۱
۱-۲ موضوع و پیشینه ۲
۱-۳ اهداف تحقیق..... ۴
۱-۴ ساختار پایان نامه ۵
۱-۵ تعاریف اولیه ۶
۱-۵-۱ خاصیت تک مدی ۶
۱-۵-۲ الگوریتم نیوتن رافسون..... ۷
۱-۵-۳ شبیه سازی مونت کارلو..... ۸
۱-۵-۴ قابلیت اعتماد..... ۸
۱-۵-۵ نظریه تصمیم..... ۱۱
۱-۵-۶ توزیع‌های کاربردی..... ۱۳
۱-۵-۶-۱ توزیع‌های پواسن و دوجمله‌ای منفی..... ۱۳
۱-۵-۶-۲ توزیع‌های گاما و وایبل..... ۱۴

فصل دوم: توزیع لیندلی و خواص آن

۱۶

مقدمه.....
۲-۱ معرفی تابع چگالی و خصوصیات آن ۱۷
۲-۲ ترتیب بندی‌های تصادفی در توزیع لیندلی ۲۴
۲-۳ روش‌های مختلف برآوردیابی پارامتر توزیع ۲۸
۲-۳-۱ روش گشتاوری ۲۹
۲-۳-۲ روش ماکسیمم درستنمایی ۲۹
۲-۳-۳ روش برآوردیابی با استفاده از نمونه‌های سانسور فزاینده نوع **II**..... ۳۰
۲-۳-۳-۱ برآورد ماکسیمم درستنمایی ۳۲
۲-۳-۳-۲ برآورد بیزی ۳۳
۲-۳-۴ برآورد توزیع با استفاده از رکوردها ۳۵
۲-۳-۴-۱ برآورد ماکسیمم درستنمایی ۳۶
۲-۳-۴-۲ برآورد بیزی ۳۶
۲-۴ روش‌های شبیه سازی از توزیع لیندلی ۳۷

۲-۴-۱ تولید داده تصادفی به روش ترکیب ۳۷
۲-۴-۲ تولید داده تصادفی با استفاده از تابع W لامبرت ۳۸
۲-۴-۲-۱ تابع چندک ۳۸
۲-۴-۲-۲ تابع W لامبرت و چندک‌های توزیع لیندلی ۳۹
۲-۵ نتایج شبیه سازی ۴۲
۲-۶ مثال‌های عددی ۴۷

فصل سوم: کاربردهای توزیع لیندلی

مقدمه ۵۰
۳-۱ توزیع لیندلی به عنوان مدل فشار- مقاومت ۵۱
۳-۱-۱ محاسبه پارامتر فشار- مقاومت ۵۲
۳-۱-۲ برآور ماکسیمم درستنمایی پارامتر فشار- مقاومت ۵۲
۳-۱-۳ $UMVUE$ برای پارامتر فشار- مقاومت ۵۳
۳-۱-۴ فاصله اطمینان برای پارامتر فشار- مقاومت ۵۶
۳-۱-۴-۱ فاصله اطمینان مجانبی ۵۶
۳-۱-۴-۲ فاصله اطمینان بوت استرپ ۵۶
۳-۱-۵ استنباط‌های بیزی پارامتر فشار-مقاومت ۶۰
۳-۱-۶ نتایج شبیه سازی ۶۲
۳-۱-۷ مثال عددی ۶۵
۳-۲ توزیع لیندلی به عنوان مدل مخاطره‌های رقابتی ۶۶
۳-۲-۱ معرفی مدل مخاطره رقابتی ۶۶
۳-۲-۲ معرفی مدل لیندلی و برآورد پارامترهای آن ۶۸
۳-۲-۳ نتایج شبیه سازی ۶۹
۳-۲-۴ مقایسه مدل همبستگی علل رقابتی شکست لیندلی و نمایی ۷۲

فصل چهارم: تعمیم‌های توزیع لیندلی

مقدمه ۷۵
۴-۱ توزیع لیندلی تعمیم یافته ۷۶
۴-۱-۱ معرفی تابع چگالی و خصوصیات آن ۷۶
۴-۱-۲ برآورد پارامترهای توزیع ۸۲
۴-۲ توزیع دو متغیره لیندلی تعمیم یافته ۸۳
۴-۳ توزیع لیندلی توسعه یافته ۸۸
۴-۳-۱ معرفی تابع چگالی و خصوصیات آن ۸۸
۴-۳-۲ تابع چندک و گشتاورها ۹۲

۴-۳-۳ تابع نرخ خطر و میانگین باقیمانده عمر ۹۲
۴-۳-۴ برآورد پارامترهای توزیع ۹۶
۴-۴ مثال‌های عددی ۹۸

فصل پنجم: توزیع‌های گسسته مرتبط با توزیع لیندلی

مقدمه ۱۰۰
۵-۱ توزیع های مرکب مرتبط با توزیع لیندلی ۱۰۱
۵-۱-۱ توزیع پواسن- لیندلی ۱۰۱
۵-۱-۱-۱ معرفی تابع جرم احتمال ۱۰۱
۵-۱-۱-۲ برآورد پارامتر توزیع پواسن - لیندلی ۱۰۴
۵-۱-۱-۳ روش شبیه سازی ۱۰۷
۵-۱-۲ توزیع دوجمله‌ای منفی- لیندلی ۱۰۸
۵-۱-۲-۱ معرفی تابع جرم احتمال ۱۰۸
۵-۱-۲-۲ برآورد پارامترهای توزیع ۱۱۱
۵-۲ توزیع لیندلی گسسته و خصوصیات آن ۱۱۴
۵-۲-۱ معرفی تابع چگالی و خصوصیات آن ۱۱۵
۵-۲-۲ برآورد پارامتر توزیع لیندلی گسسته ۱۱۸
۵-۳ نتایج شبیه سازی ۱۱۹
۵-۴ مثال‌های عددی ۱۲۰
۵-۵ مدل ریسک تجمعی با استفاده ازتوزیع پواسن- لیندلی و لیندلی گسسته ۱۲۳
۵-۵-۱ مدل ریسک تجمعی ۱۲۳
۵-۵-۲ توزیع پواسن در مدل ریسک تجمعی ۱۲۵
۵-۵-۳ توزیع لیندلی گسسته در مدل ریسک تجمعی ۱۲۶
۵-۵-۴ توزیع پواسن - لیندلی در مدل ریسک تجمعی ۱۲۸
۵-۶ مدل بندی تعداد تصادفات خودرو با استفاده از توزیع دو جمله‌ای منفی- لیندلی ۱۳۳
پیوست: گزیده برنامه‌های کامپیوتری مثال‌ها در نرم افزار R ۱۳۵
واژه نامه فارسی به انگلیسی ۱۴۰
واژه نامه انگلیسی به فارسی ۱۴۴
منابع و مآخذ ۱۴۸

فهرست شکل‌ها

عنوان **صفحه**

شکل ۲-۱. نمودار تابع چگالی توزیع لیندلی..... ۱۹

شکل ۲-۲. نمودار چولگی، کشیدگی و ضریب تغییرات توزیع لیندلی ۲۱

شکل ۲-۳. الف - نمودار تابع نرخ خطر توزیع لیندلی ، ب- نمودار تابع میانگین باقیمانده توزیع لیندلی..... ۲۴

شکل ۲-۴. الف - نمودار تابع چندک توزیع نمایی ، ب- نمودار تابع چندک توزیع لیندلی..... ۴۹

شکل ۴-۱. نمودار تابع چگالی توزیع لیندلی تعمیم‌یافته..... ۷۸

شکل ۴-۲. نمودار تابع نرخ خطر توزیع لیندلی تعمیم یافته..... ۷۹

شکل ۴-۳ . نمودار تابع چگالی توزیع لیندلی توسعه یافته به ازای $\theta = 5 \ , \beta = 0.5$..... ۸۹

شکل ۴-۴. نمودار تابع چگالی توزیع لیندلی توسعه یافته به ازای $\theta = 0.5 \ , \beta = 5$..... ۹۰

شکل ۴-۵ . نمودار تابع چگالی توزیع لیندلی توسعه یافته به ازای $\theta = 0.01 \ , \beta = 10$..... ۹۰

شکل ۴-۶. نمودار تابع چگالی توزیع لیندلی توسعه یافته به ازای $\theta = 5 \ , \beta = 5$ ۹۱

شکل ۴-۷. نمودار تابع نرخ خطر توزیع لیندلی توسعه یافته به ازای $\theta = 5 \ , \beta = 0.5$ ۹۴

شکل ۴-۸. نمودار تابع نرخ خطر توزیع لیندلی توسعه یافته به ازای $\theta = 5 \ , \beta = 5$..... ۹۴

شکل ۴-۹. نمودار تابع نرخ خطر توزیع لیندلی توسعه یافته به ازای $\theta = 0.01 , \beta = 10$..... ۹۵

شکل ۴-۱۰. نمودار تابع نرخ خطر توزیع لیندلی توسعه یافته به ازای $\theta = 0.5 \ , \beta = 1.2$.... ۹۵

شکل ۵-۱. نمودار تابع جرم احتمال توزیع پواسن-لیندلی..... ۱۰۳

شکل۵-۲.کارایی نسبی برآوردگر ماکسیمم درستنمایی و گشتاوری توزیع پواسن- لیندلی ۱۰۶

شکل ۵-۳. نمودار تابع جرم احتمال توزیع دوجمله‌ای منفی- لیندلی..... ۱۰۹

شکل ۵-۴ . نمودار $(var(X)/mean(X))$ برای توزیع دوجمله‌ای منفی- لیندلی ۱۱۱

شکل۵-۵. نمودار تابع جرم احتمال توزیع لیندلی گسسته..... ۱۱۷

شکل ۵-۶ . نمودار $(var(X)/mean(X))$ برای توزیع لیندلی گسسته..... ۱۱۸

شکل ۵-۷ . مقایسه مدل ریسک تجمعی پواسن - نمایی و لیندلی گسسته – نمایی..... ۱۲۷

شکل ۵-۸ . مقایسه مدل ریسک تجمعی پواسن - نمایی و پواسن- لیندلی- نمایی..... ۱۲۹

فهرست جدول‌ها

عنوان **صفحه**

جدول ۲-۱. مقادیر میانگین اریبی، میانگین MSE و احتمال پوشش فاصله اطمینان برآورد ماکسیمم درستنمایی پارامتر توزیع ۴۳

جدول ۲-۲. مقادیر میانگین اریبی، میانگین MSE و احتمال پوشش فاصله اطمینان برآورد ماکسیمم درستنمایی پارامتر توزیع ، تابع خطر و تابع قابلیت اعتماد با استفاده از سانسور فزاینده نوع دوم..... ۴۵

جدول ۲-۳. مقادیر میانگین اریبی، میانگین MSE و احتمال پوشش فاصله اطمینان برآورد بیزی پارامتر توزیع ، تابع خطر و تابع قابلیت اعتماد با استفاده از سانسور فزاینده نوع دوم ۴۶

جدول ۲-۴. مقادیر میانگین اریبی، میانگین MSE برآورد ماکسیمم درستنمایی و برآورد بیزی با استفاده از مقادیر رکورد بالایی..... ۴۷

جدول ۲-۵. داده‌های زمان انتظار..... ۴۷

جدول ۲-۶. مقادیر AIC، ,BIC و لگاریتم درستنمایی انواع مدل‌ها..... ۴۸

جدول ۲-۷. برآورد ماکسیمم درستنمایی پارامتر θ، میانگین، تابع نرخ خطر و تابع قابلیت اعتماد..... ۴۹

جدول۳-۱. میانگین اریبی (میانگین MSE) برآوردهای ماکسیمم درستنمایی ، $UMVUE$ و $Boots$ پارامتر فشار- مقاومت..... ۶۳

جدول ۳-۲. احتمال پوشش فاصله اطمینان MLE ، p-boot ، t-boot و BC_a -boot..... ۶۳

جدول ۳-۳. میانگین اریبی ، میانگین MES و احتمال پوشش برآورد بیز..... ۶۴

جدول ۳-۴. میانگین اریبی ، میانگین MES و احتمال پوشش برآورد بیز..... ۶۴

جدول ۳-۵. داده های زمان انتظار ۶۰ مشتری بانک..... ۶۶

جدول ۳-۶. آزمون کلموگروف - اسمیرنو برای دو مجموع داده..... ۶۶

جدول ۳-۷. فاصله اطمینان ۹۵٪ و فاصله اعتبار برای R ۶۶

جدول ۳-۸. میانگین اریبی، میانگین MSE و احتمال پوشش برای برآوردهای ماکسیمم درستنمایی برای $\theta_1 = 0.9, \theta_2 = 0.2$ ۷۰

جدول ۳-۹. میانگین اریبی، میانگین MSE و احتمال پوشش برای برآوردهای ماکسیمم درستنمایی برای $\theta_1 = 0.9, \theta_2 = 0.7$ ۷۰

جدول ۳-۱۰. میانگین اریبی، میانگین MSE و احتمال پوشش برای برآوردهای ماکسیمم درستنمایی برای $\theta_1 = 0.5, \theta_2 = 0.2$ ۷۱

جدول ۳-۱۱. میانگین اریبی ، میانگین MSE و احتمال پوشش برای برآوردهای ماکسیمم درستنمایی برای $\theta_1 = 0.9, \theta_2 = 0.5$ ۷۱
جدول ۳-۱۲. داده های مربوط به ۱۹۴ بیمار با سلول سرطانی ۷۳
جدول ۳-۱۳. برآورد ماکسیمم درستنمایی پارامترهای مدل..... ۷۴
جدول ۳-۱۴. مقادیر AIC ، BIC و $\log(L)-$ با مقایسه دو مدل نمایی و لیندلی..... ۷۴
جدول ۴-۱. مقادیر AIC ، BIC و $\log(L)-$ برای مقایسه توزیع ها ۹۹
جدول ۵-۱ امید ریاضی و واریانس توزیع دوجمله‌ای منفی- لیندلی..... ۱۱۰
جدول ۵-۲ . امید ریاضی و واریانس توزیع لیندلی گسسته..... ۱۱۷
جدول ۵-۳. میانگین اریبی ، میانگین MSE و احتمال پوشش برآورد گشتاوری توزیع پواسن-لیندلی..... ۱۱۹
جدول ۵-۴. میانگین اریبی ، میانگین MSE و احتمال پوشش برآورد گشتاوری توزیع پواسن-لیندلی..... ۱۱۹
جدول ۵-۵.میانگین اریبی ، میانگین MSE و احتمال پوشش برآورد گشتاوری توزیع لیندلی گسسته. ۱۲۰
جدول ۵-۶. مقادیر مشاهدات برازش شده، برآورد پارامترها و منفی لگاریتم درستنمایی برای مقایسه مدل‌ها..... ۱۲۱
جدول ۵-۷. مقادیر مشاهدات برازش شده، برآورد پارامترها و منفی لگاریتم درستنمایی برای مقایسه مدل‌ها ۱۲۲
جدول ۵-۸. نتایج حاصل از شبیه سازی داده‌ها برای مقایسه مدل‌های تعداد تصادفات خودرو..... ۱۳۴

فهرست نشانه‌ها و کوتاه نوشت‌ها

$\xrightarrow{P}$ همگرایی در احتمال

$\xrightarrow{d}$ همگرایی در توزیع

AIC معیار اطلاع آکائیک

ARE کارایی نسبی مجانبی

BIC معیار اطلاع بیزی

$E(X)$ امید ریاضی متغیر تصادفی X

EL توزیع لیندلی توسعه یافته

GL توزیع لیندلی تعمیم یافته

$IPLR$ خاصیت نسبت درستنمایی متناسب صعودی

$K-S$ کلموگروف- اسمیرنف

MLE برآورد ماکسیمم درستنمایی

MRL میانگین باقیمانده طول عمر

MSE میانگین خطای استاندارد

NB توزیع دوجمله‌ای منفی

TP_2 جمع پذیری مثبت مرتبه دو

PLR نسبت درستنمایی مثبت

$UIPLR$ نسبت درستنمایی متناسب صعودی بالایی

$corr(X,Y)$ ضریب همبستگی دو متغیر تصادفی X و Y

$cov(X,Y)$ کواریانس دو متغیر تصادفی X و Y

cp احتمال پوشش

cv ضریب تغییرات

exp توزیع نمایی

log لگاریتم

$supp$ تکیه گاه

se انحراف استاندارد

$var(X)$ واریانس متغیر تصادفی X

فصل اول

مفاهیم و مقدمات اولیه

۱-۱ مقدمه تحقیق

مبحث قابلیت اعتماد یکی از شاخه‌های آمار است که امروزه به طور وسیعی در علوم مختلف از جمله پزشکی و مهندسی مورد استفاده قرار می‌گیرد. توزیع‌های آماری از مهم‌ترین ابزارهای اولیه‌ای هستند که در هر موضوع و مبحث آماری مطرح و مورد نیاز هستند. هنگامی که با یک موجود زنده سروکار داریم (که می‌تواند انسان، قطعه الکتریکی و... باشد) علاقمندیم از نقطه نظر احتمالی بررسی کنیم که چنین موجودی با چه احتمالی از زمان معین t بیشتر عمر می‌کند. در واقع هنگامی که وظیفه‌ای معین بر عهده یک موجود زنده می‌گذاریم، علاقمندیم قابلیت انجام چنین وظیفه‌ای را از نقطه نظر احتمالی روی آن اندازه‌گیری کنیم. برای تعیین مدل مناسب و تجزیه و تحلیل‌های مربوط لازم است ابتدا کلیه توزیع‌هایی که می‌توانند به عنوان توزیع طول عمر داده‌ها قرار گیرند را مورد مطالعه قرار داده و مناسب‌ترین توزیع را انتخاب کرد. با شناختن توزیع یک مجموعه داده، مطالعات و بررسی روی داده‌ها راحت‌تر و منظم‌تر می‌گردد و سرعت رسیدن به اهداف مورد نیاز افزایش می‌یابد. تاکنون نویسندگان زیادی در معرفی توزیع‌های طول عمر فعالیت کرده‌اند. به عنوان مثال گوپتا و کندا[۱] (۱۹۹۹) توزیع نمایی تعمیم یافته را معرفی کردند. توزیع لیندلی[۲] از جمله توزیع‌های تک پارامتری طول عمر است که رقیب

---

[۱] Gupta and Kundu

[۲] Lindley

مناسبی برای سایر توزیع‌های طول عمر به حساب می‌آید، اما به دلیل مشهور بودن توزیع نمایی کمتر به آن توجه شده است.

۱-۲ موضوع و پیشینه

توزیع لیندلی اولین بار توسط لیندلی (۱۹۵۸) در ارتباط با توزیع پسین بیزی[۱] و توزیع اتکایی[۲] معرفی شد. مفهوم احتمال اتکایی در سال ۱۹۳۰ توسط فیشر[۳] در مقاله احتمال معکوس معرفی شد. ایده پشت استنباط اتکایی آن است که به شرط مجموعه مشاهدات داده شده در واقع خواهان اختصاص دادن احتمالات به مجموعه مقادیر مجاز پارامتر هستیم. روش کلاسیک نتیجه‌گیری برای استنباط‌های توزیعی به کارگیری قضیه بیز است. از نظر فیشر اشکال این روش آن است که نیازمند توزیع پیشین برای پارامتر است. فیشر در تایید روش خود همچنین استفاده از توزیع یکنواخت را به عنوان توزیع پیشین[۴] رد کرد و استفاده از پیشین‌های ذهنی انتقاد کرد. زیرا عناصر ذهنی توزیع پسین را تحمیل می‌کنند. فیشر تصور می‌کرد که استنباط اتکایی در مقابل نظریه بیز قرار می‌گیرد با این هدف که توزیع پارامتر را بدون استفاده از پیشین مناسب به دست می‌دهد. فیشر به طور خاص مشاهده کرد که اگر آماره پیوسته T وجود داشته باشد به طوری که توزیع نمونه‌ای آن فقط تابعی از پارامتر θ باشد، در این صورت صرف نظر از فرضیاتی روی توزیع پیشین برای پارامتر θ با استفاده از T می‌توان عبارت احتمالی برای θ به دست آورد. با توجه به نظرات فیشر، عوامل مورد نیاز برای استدلال اتکایی عبارتست از آماره بسنده برای پارامتر مورد نظر بر پایه نمونه، به دست آوردن کمیت محوری مناسب که تابعی از آماره بسنده و مقدار درست پارامتر است که توزیع آن به پارامتر مجهول و یا سایر مقادیر نمونه بستگی ندارد و استدلال اتکایی که با توجه به کمیت محوری توزیعی برای پارامتر بر اساس آماره بسنده نمونه به دست می‌آورد. با استفاده از استدلال اتکایی قادر به به دست آوردن توزیع پسین برای پارامتر بدون استفاده از چگالی پیشین شدیم. لیندلی (۱۹۵۸) طی مقاله‌ای در حالت یک بعدی ثابت کرد که توزیع اتکایی همان توزیع پسین بیزی است اگر و تنها اگر مشاهدات و پارامتر تحت بعضی از تبدیلات پایا باشند. مطالعات وی در این زمینه منجر به ارائه مثالی برای برابری توزیع اتکایی و

---

[۲] Bayesian Posterior Distribution

[۳] Fiducial

[۴] Ghitany .et .al

[۵] Prior Distribution

توزیع پسین شد که آن را به عنوان توزیع لیندلی معرفی کردند (برای اطلاعات بیشتر خواننده را به هیک و همکاران[۱] (۲۰۰۰) ، زابل[۲] (۱۹۹۲) و لیندلی (۱۹۵۸) ارجاع می‌دهیم).

سنکاران و همکاران[۳] (۱۹۷۰) از توزیع لیندلی استفاده کرده و توزیع پواسن لیندلی را به عنوان ترکیبی از توزیع پواسن و لیندلی معرفی کرد. به دلیل این که توزیع نمایی در تحلیل داده‌های طول عمر دارای ویژگی‌های منحصر به فردی است، توزیع لیندلی به عنوان توزیع تک پارامتری طول عمر کمتر مورد توجه قرار گرفت و در مطالعات قابلیت اعتماد کمتر مورد استفاده قرار گرفت تا این‌که قیتانی و همکاران (۲۰۰۸) خواص آماری این توزیع را مورد بررسی قرار دادند. این نویسندگان نشان دادند که در تحلیل داده‌های طول عمر این توزیع عملکرد مناسبی از خود نشان می‌دهد و حتی در بعضی حالات رقیب مناسبی برای مدل های معروف تحلیل داده های طول عمر می باشد. از سال ۲۰۰۸ به بعد توزیع لیندلی توجه نویسندگان زیادی را به خود جلب کرده و شاهد کاربرد آن در زمینه‌های مختلف نظریه توزیع‌ها و قابلیت اعتماد شدیم.

از آن‌جایی که سانسور یک پدیده متداول در هر مسأله قابلیت اعتماد است، برآورد پارامترهای توزیع‌های طول عمر با استفاده از انواع سانسورها حائز اهمیت است.کریشنا و کومار[۴] (۲۰۱۱) برآورد پارامتر ، تابع قابلیت اعتماد و تابع نرخ خطر توزیع را با استفاده از سانسور فزاینده نوع دوم[۵] به دست آورده و با استفاده از نمونه تصادفی غیر واقعی عملکرد آن‌ها را بررسی کردند. مازاچلی و اچکار[۶] (۲۰۱۱) توزیع لیندلی را به عنوان مدل مخاطره‌های رقابتی[۷] به کار بردند. از آن جایی داده های مربوط به طول عمر دستگاه‌ها و ... همواره مقادیری پیوسته اتخاذ نمی‌کنند و گاهـــی اوقات شامل حالت‌های گسسته نیز می‌شوند و با توجه به این که توزیع لیندلی در حالت پیوسته رفتارهای مناسبی از خود نشان داده است، گمز دنیز و کالدرن- اجدا[۸] (۲۰۱۱) توزیع لیندلی گسسته[۹] را با استناد به حالت پیوسته پیشنهاد کردند و کاربرد آن را در مدل ریسک تجمعی[۱۰] مورد بررسی قرار دادند.

---

[۱] Heike . et. al
[۲] Zabell
[۳] Sankaran .et. al
[۴] Krishna and Kumar
[۵] progressively type**II** Censored
[۶] Mazucheli and Achcar
[۷] Competing Risks
[۸] Gomez-Deniz and Calderín-Ojeda
[۱] Discrete Lindley
[۲] Collective Risk Model

نویسندگان زیادی در زمینه افزایش قابلیت توزیع‌ها برای برازش به انواع داده‌های طول عمر از طریق اضافه کردن پارامتر به آن یا از طریق آمیخته[۱] کردن توزیع با توزیع‌های گسسته فعالیت کرده‌اند. ذاکرزاده و دولتی[۲] (۲۰۱۰) با استفاده از مدل آمیخته گاما توزیع سه پارامتری جدیدی را معرفی کردند که به عنوان توزیع لیندلی تعمیم یافته[۳] معرفی شد و خواص آماری مناسبی از خود نشان داد. باکوچ و همکاران[۴] (۲۰۱۱) تعمیم دیگری از توزیع لیندلی با استفاده از تابع بقای توزیع پیشنهاد کرده و آن را توزیع لیندلی توسعه یافته[۵] نامیدند. این توزیع جدید دارای تابع نرخ خطر[۶] صعودی، نزولی، تک مدی[۷] و وانی[۸] شکل است و با توزیع‌های معروف گاما و وایبل قابل مقایسه است. قیتانی و همکاران (۲۰۰۸) مطالعات بیشتری روی توزیع پواسن ـ لیندلی انجام دادند و این امر باعث شد نویسندگان به فکر آمیخته کردن توزیع با توزیع‌های گسسته‌ی دیگر باشند. زمانی و اسمایل[۹] (۲۰۱۰) توزیع لیندلی را با توزیع دوجمله‌ای منفی ترکیب کرده و توزیع جدیدی تحت عنوان دوجمله‌ای منفی ـ لیندلی معرفی کردند که دارای فراوانی زیادی در نقطه صفر است و مدل مناسبی برای داده‌های تعداد تصادفات خودرو[۱۰] می‌باشد. لرد و جیدیپالی[۱۱] (۲۰۱۱) مطالعاتی در زمینه کاربرد توزیع دو جمله‌ای منفی ـ لیندلی در مدل بندی تعداد تصادفات خودرو انجام داده اند.

۱-۳ اهداف تحقیق

کاربرد توزیع‌های آماری جهت برازش به داده‌های واقعی از مهم‌ترین اهداف آشنایی با توزیع‌ها است. توزیع لیندلی از جمله توزیع‌های تک پارامتری طول عمر است که در این پایان‌نامه مورد مطالعه قرار می گیرد و ویژگی‌های آن بررسی می شود. به منظور استنباط در مورد پارامترتوزیع روش‌های مختلفی را به کار گرفته می شود.

---

[۳] Mixed

[۴] Zakerzadeh and Dolati

[۵] Generalized Lindley Distribution

[۶] Bakouch .et .al

[۷] Extended Lindley distribution

[۸] Hazard Rate

[۹] Unimodal

[۱۰] Bathtub

[۱۱] Zamani and Ismail

[۱۲] Crash Data

[۱۳] Lord and Geedipally

با استفاده از تابع چگالی رکوردهای بالایی[۱] نیز پارامتر توزیع برآورد می‌شود. همچنین با مطالعه پارامتر فشار- مقاومت[۲] توزیع، مدل جدیدی در این زمینه ارائه می‌شود. به علاوه با مقایسه عملکرد مدل مخاطره‌های رقابتی لیندلی و نمایی کاربرد توزیع در این زمینه را نیز مطرح می‌شود. همچنین با بیان توزیع لیندلی تعمیم یافته و لیندلی توسعه یافته مدل‌های جدیدی برای تحلیل داده‌های بقا ارائه می‌دهیم که قابلیت‌های ویژه‌ای نسبت به مدل‌های رایج گاما و وایبل دارند. از دیگر اهداف این پایان نامه بررسی توزیع‌های گسسته مرتبط با این توزیع (پواسن- لیندلی، دوجمله‌ای منفی ـ لیندلی، لیندلی گسسته) و بیان کاربرد آن‌ها در مدل ریسک تجمعی و مدل بندی تعداد تصادفات خودرو در مقایسه با سایر توزیع‌ها می‌باشد.

۱-۴ ساختار پایان نامه

در این پایان نامه ابتدا به بیان چگونگی پیدایش توزیع لیندلی می‌پردازیم و مفاهیم و تعاریف مورد نیاز را به مختصر شرح می‌دهیم. در فصل دوم تابع چگالی و ویژگی‌های آن را قرار می‌دهیم. سپس برای برآورد پارامتر توزیع از چند روش مختلف استفاده می‌کنیم. علاوه بر روش گشتاوری و روش ماکسیمم درستنمایی، با ارائه نمونه سانسور فزاینده نوع دوم به برآورد پارامتر توزیع می‌پردازیم. در ادامه با معرفی تابع چگالی رکوردهای بالایی توزیع لیندلی برآورد پارامتر توزیع را به این روش به دست می‌آوریم. در پایان با تولید نمونه تصادفی غیر واقعی از توزیع به بررسی عملکرد روش‌های پیشنهادی می‌پردازیم و با استفاده از داده‌های واقعی به مقایسه قابلیت توزیع با سایر توزیع‌های طول عمر می‌پردازیم.

در فصل سوم ابتدا به محاسبه پارامتر فشار- مقاومت توزیع می‌پردازیم. سپس روش‌های مختلفی برای برآورد نقطه‌ای و فاصله‌ای آن ارائه می‌دهیم. همچنین با استفاده از شبیه سازی[۳] مونت کارلو[۴] و روش بوت استرپ [۵] عملکرد برآوردهای بیان شده را بررسی می‌کنیم. در ادامه توزیع لیندلی را به عنوان مدل مناسب برای مخاطره‌های رقابتی مطرح می‌کنیم و با بیان مثال عددی مدل همبستگی برای مخاطره‌های رقابتی نمایی و لیندلی را مقایسه می‌کنیم. از آن‌جایی که افزایش قابلیت توزیع‌ها به منظور تحلیل انواع بیشتری از داه‌ها همواره مورد توجه است،

---

[۱] Upper Record Values

[۲] Stress-Strength

[۳] Simulation

[۴] Monte Carlo

[۵] Bootstrap

در فصل چهارم ابتدا توزیع لیندلی تعمیم یافته را معرفی و خصوصیات آن را مطرح می‌کنیم. سپس به بیان توزیع دومتغیره لیندلی تعمیم یافته می‌پردازیم. در ادامه فصل توزیع لیندلی توسعه یافته را به عنوان تعمیم دیگری از توزیع لیندلی مورد بررسی قرار می‌دهیم. در فصل پنجم با بیان مدل‌های آمیخته پواسن ـ لیندلی و دوجمله‌ای منفی – لیندلی مدل‌های جدیدی را در ریسک‌های تجمعی و تعداد تصادفات خودرو مطرح می‌کنیم و با ارائه توزیع لیندلی گسسته خواص آن را بررسی می‌کنیم.

برنامه‌های به کار رفته در این پایان نامه در نرم افزار R نوشته شده و به عنوان نمونه تعدادی از آن در پیوست آورده شده است. همچنین قسمت‌هایی که با * مشخص شده اند در این تحقیق معرفی گردیده است.

۱-۵ تعاریف اولیه

۱-۵-۱ خاصیت تک مدی

خاصیت تک مدی بودن یکی از خواص مطلوب تابع چگالی است که در بیان خصوصیات توزیع‌ها کاربرد زیادی دارد. در ادامه با بیان مقدمات آن به تعریف این خاصیت می‌پردازیم.

تعریف۱-۱ مجموعه $\mathcal{A} \in \mathrm{R}^{\mathrm{n}}$ محدب[۱] نامیده می شود اگر به ازای $x, y \in \mathcal{A}$ وبه ازای همه مقادیر $\alpha \in [0,1]$ رابطه $\alpha x + \bar{\alpha} y \in \mathcal{A}$ بر قرار باشدکه درآن $(\bar{\alpha} = 1 - \alpha)$.

تعریف ۱-۲ تابع حقیقی φ تعریف شده روی مجموعه محدب $\mathcal{A} \in \mathrm{R}^{\mathrm{n}}$ ، محدب نامیده می‌شود اگر رابطه

$$\varphi(\alpha x + \bar{\alpha} y) \leq \alpha\varphi(x) + \bar{\alpha}\varphi(y) \qquad (۱-۱)$$

به ازای همه مقادیر $x, y \in \mathcal{A}$ و $\alpha \in [0,1]$ برقرار باشد.

اگر نامساوی (۱-۱) بر عکس شود آن گاه φ مقعر[۲] نامیده می‌شود به عبارت دیگر تابع مقعر است اگر و تنها اگر $-\varphi$ محدب باشد .

نکته ۱-۱ برای تعاریف ۱-۱ و ۱-۲ داریم

---

[۱] Convex

[۲] Concave