بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه صنعتی اصفهان
دانشکده‌ی فیزیک

محاسبه‌ی فاز زاک یک مدل توپولوژیک یک بعدی

کارشناسی ارشد فیزیک، گرایش ماده چگال

مهری مزروعی

استاد راهنما
دکتر فرهاد شهبازی

۱۳۹۳

دانشگاه صنعتی اصفهان
دانشکده ی فیزیک

پایان‌نامه کارشناسی ارشد فیزیک ماده‌ی چگال خانم مهری مزروعی
تحت عنوان

محاسبه‌ی فاز زاک یک مدل توپولوژیک یک بعدی

در تاریخ ۱۳۹۳/۹/۱۰ توسط کمیته‌ی تخصصی زیر مورد بررسی و تصویب نهایی قرار گرفت.

۱ - استاد راهنما پایان‌نامه	دکتر فرهاد شهبازی
۲ - استاد مشاور پایان‌نامه	دکتر پیمان صاحب سرایی
۳ - استاد داور	دکتر پیمان صاحب‌سرا
۴ - استاد داور	دکتر فرهاد فضیله
سرپرست تحصیلات دانشکده‌ی فیزیک	دکتر مجتبی اعلایی

تقدیم به خانواده عزیزم

قدردانی

شکر خدا را که بزرگترین امید و یاور در لحظه لحظه ی زندگیست.

با سپاس از پدر و مادر عزیزم که لحظات ناب باور بودن، لذت و غرور دانستن، جسارت خواستن، عظمت رسیدن و تمام تجربه های یکتا و زیبای زندگیم مدیون حضور آن هاست.

با تقدیر و تشکر شایسته از استاد فرهیخته و بزرگوارم، جناب آقای دکتر فرهاد شهبازی که در سایه ی باور ایشان، اندیشه ام بارور شد و همواره راهنما و راه گشا در اتمام و اکمال این پایان نامه بوده اند.

از سرکار خانم الهه قربانی به دلیل یاری ها و راهنمایی های ایشان سپاسگزارم.

چکیده

بسیاری از شاخه‌های فیزیک حالت جامد به این موضوع پرداخته می‌شود که چگونه انواع مختلف نظم از برهم‌کنش بین اجزای تشکیل دهنده‌ی مواد حاصل می‌شود. حالت‌های دارای نظم مانند: بلور، مغناطش، ابرشاره از شکست تقارن شناخته می‌شوند. از سال ۱۹۸۲ شاخه‌های جدیدی از ریاضیات که شامل هندسه‌ی کوانتومی و توپولوژی بودند، به فیزیک حالت جامد راه یافتند و سبب پیدایش بینشی جدید و راه‌های تازه در فیزیک حالت جامد شدند. یکی از آن‌ها کشف عایق‌های توپولوژیک شد. شاخه‌ی جدیدی از مواد، که دانشمندان علم مواد را که سال‌ها این مواد را بدون توجه به این ویژگی مطالعه می‌کردند، حیرت زده کرد. در این شاخه از مواد نظم هندسی حفظ می‌شود. این نظم از تقارن وارونی زمان حاصل می‌شود. در این پایان نامه این دسته از مواد مطالعه شدند. در بیان ریاضی، شکل‌های فاقد گره، شکل‌های دارای توپولوژی بدیهی نام‌گذاری شده‌اند و شکل‌های گره‌دار، شکل‌های با توپولوژی غیربدیهی نام‌گذاری شده‌اند. در مکانیک کوانتومی، هندسه با انرژی پیوند می‌خورد. تغییر شکل به صورت تغییر آدیاباتیک هامیلتونی و پیوستگی با فقدان شکاف انرژی پدیدار می‌شوند. توپولوژی یک حالت کوانتومی تا زمانی که شکاف انرژی پدیدار نشود، ثابت باقی می‌ماند. نقاط فاقد شکاف انرژی نقاطی هستند که تقارن وارونی زمان را حفظ می‌کنند و تبهگنی کرامرز در آن‌ها رخ می‌دهد. تقارن وارونی زمان یکی از مهم‌ترین تقارن‌های موجود در طبیعت است. قسمت داخلی عایق‌های توپولوژیک، عایق است و با شکاف انرژی در باند الکتریکی ظاهر می‌شوند، اما لبه‌ها و یا سطوح این مواد دارای حالت‌های بدون شکاف است که باعث رسانش در مرز سیستم می‌شوند. در این پایان نامه مدل‌هایی را در یک بعد و دو بعد معرفی می‌کنیم که در شاخه‌ی عایق‌های توپولوژیک قرار می‌گیرند و به منظور بررسی این مدل‌ها شناسه‌های توپولوژیکی که عایق‌های معمولی را از عایق‌های توپولوژیک و هم‌چنین عایق‌های توپولوژیک را از یکدیگر متمایز می‌سازد، مورد مطالعه قرار دادیم. یکی از معروف‌ترین این شناسه‌ها عدد چرن است. در سال ۱۹۸۸ هالدین مدلی پیشنهاد کرد که دارای توپولوژی غیر بدیهی بود. در این مدل اثر کوانتومی هال بدون وارد کردن میدان مغناطیسی ایجاد می‌شود و با شکست تقارن وارونی زمان همراه است. اثر کوانتومی هال برای گاز الکترونی دوبعدی در دماهای بسیار پایین و با وارد کردن میدان مغناطیسی بسیار قوی اتفاق می‌افتد. در این اثر برخلاف اثر هال عادی رسانندگی رفتار خطی با میدان مغناطیسی نشان نمی‌دهد. در این حالت رسانندگی رفتار پله‌ای از خود نشان می‌دهد که در این پایان نامه به طور مفصل توضیح داده شده است. مدل پیشنهادی او با نام‌های عایق‌های چرن و یا اثر کوانتومی هال غیر عادی نیز شناخته می‌شود. شناسه‌ی توپولوژیکی در یک بعد فاز زاک نامیده می‌شود. فاز زاک تاکنون به صورت تجربی نیز محاسبه شده است. به این منظور پلیمر دو اتمی از اتم‌های روبیدیم که با هامیلتونی مدل رایس- ملِ مطابقت داشت مورد بررسی قرار گرفته شده است. در این پایان نامه بستگی این ناوردای توپولوژیک به مقدار انتگرال پرش الکترون را بررسی کردیم. همچنین شرط وجود حالت‌های مرزی در یک بعد را تعیین و تابع موج مرزی را به دست آوردیم.

کلمات کلیدی:

عایق‌های توپولوژیک، اثر کوانتومی هال، عدد چرن، فاز زاک، فازبری

فهرست مطالب

فصل ۱

مفاهیم بنیادی در عایق‌های توپولوژیک

۱.۱ مقدمه

عایق‌های توپولوژیک موادی هستند که نمی‌توان آن‌ها را در شاخه‌ی مواد عایق و مواد رسانا طبقه بندی کرد [۱]. اگر چه قسمت داخلی این مواد عایق است و با شکاف انرژی در باند الکتریکی ظاهر می‌شوند، اما لبه‌ها و یا سطوح این مواد دارای حالت‌های بدون شکاف است که تقارن وارونی زمان را حفظ می‌کنند و باعث رسانش در مرز سیستم می‌شوند.

واژه‌ی توپولوژیک برای این دسته از عایق‌ها به این دلیل به کار برده می‌شود که ساختار نواری این دسته از مواد شکل متفاوتی با عایق‌های معمولی دارند. توپولوژی شاخه‌ای از ریاضیات است که ویژگی‌هایی از ماده را توصیف می‌کند که تحت تغییر پیوسته‌ی شکل ثابت باقی می‌مانند. این ویژگی‌ها به طور معمول با اعداد صحیح بیان می‌شوند و ناورداهای توپولوژیک نام دارند.

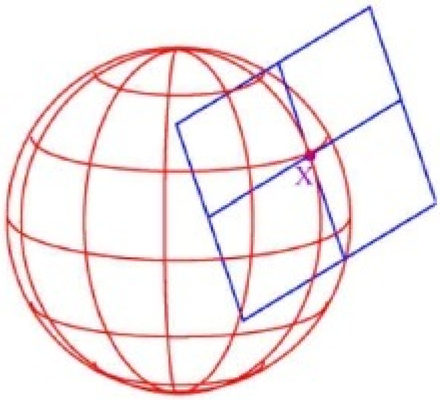
این مواد به صورت نظری پیش‌بینی و به صورت تجربی در سیستم‌های متفاوتی دیده شدند، مانند: چاه کوانتومی $HgTe$ ، آلیاژ $BiSb$ و کریستال‌های Bi_2Se_3 و Bi_2Te_3. اثر کوانتومی هال اولین مثال از حالت‌های کوانتومی است که با تمام حالت‌های شناخته‌شده‌ی قبلی از مواد متفاوت بود. یکی از مهم‌ترین مراحل در سال ۱۹۸۸ توسط هالدین انجام گرفت. او توانست مدلی نظری برای ساخت اثر کوانتومی هال بر روی شبکه‌ی دو بعدی شش‌گوشی ارائه داد. در این پایان نامه به معرفی مفاهیم پایه‌ی عایق‌های توپولوژیک پرداختیم تا خوانندگان این پایان‌نامه زیبایی‌ها و چالش‌های موجود در این شاخه راتجربه کنند. ابتدا به توضیح ورود توپولوژی به فیزیک نظری می‌پردازیم. وجود جریان‌های یک‌طرفه در عایق‌های توپولوژیک به دلیل شکسته شدن تقارن وارونی زمان است که در فصل ۲ بررسی می‌شود، سپس اولین مثال از مدل‌های توپولوژیکی یعنی اثر کوانتومی هال را بررسی می‌کنیم و ویژگی‌هایی از

توپولوژی یعنی ناورداهای توپولوژیکی مانند عدد چرن و فاز زاک را توضیح می‌دهیم. در فصل ۴ به توضیح مدل‌های توپولوژیکی در یک بعد و دو بعد و ویژگی‌های آن‌ها می‌پردازیم. [۳، ۲].

۲.۱ ورود توپولوژی به فیزیک حالت جامد

۱.۲.۱ قضیه‌ی گاؤس- بونه

برای شروع با مثالی بسیار ساده شروع می‌کنیم. یک کره و یک صفحه که در یک نقطه بر کره مماس شده را مطابق شکل ۱.۱ در نظر بگیرید. معادله‌ی کره در مختصات کارتزی به صورت



شکل ۱.۱: کره با شعاع R و صفحه‌ی مماس شده بر آن در یک نقطه خم گاؤسی در این حالت $\frac{۱}{R^۲}$ به دست می‌آید [۴].

$$z = R - \sqrt{R^۲ - x^۲ - y^۲} \simeq \frac{x^۲ + y^۲}{۲R} \qquad (۱.۱)$$

است و ماتریس هسیان [۱] به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$H = \begin{pmatrix} \frac{\partial^۲ z}{\partial x^۲} & \frac{\partial^۲ z}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^۲ z}{\partial y \partial z} & \frac{\partial^۲ z}{\partial y^۲} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{۱}{R} & ۰ \\ ۰ & \frac{۱}{R} \end{pmatrix} \qquad (۲.۱)$$

خم گاؤسی با دترمینان ماتریس هسیان محاسبه می‌شود . همان‌طور که پیداست این مقدار ثابت و برابر $\frac{۱}{R^۲}$ می‌باشد. مقدار انتگرال هسیان برای تمام سطوح بسته ۴π می‌باشد. سطح بسته‌ای با شکل دلخواه

[۱] Hessian

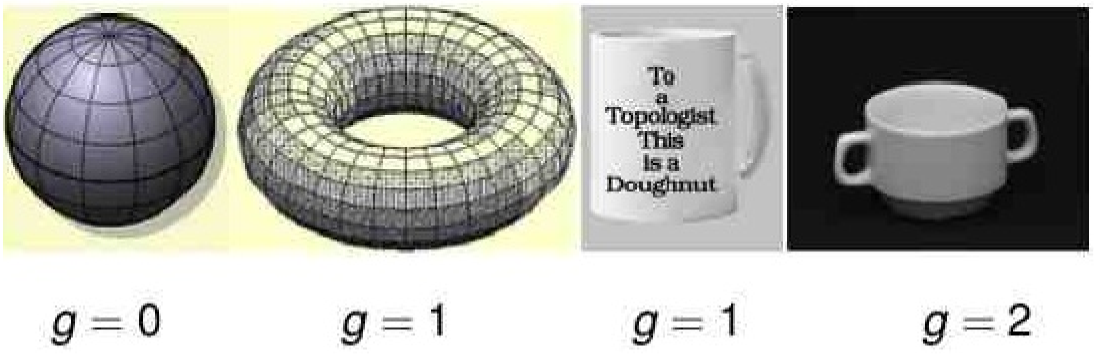
در نظر می‌گیریم. خم گاؤسی به صورت دترمینان ماتریس هسیان برای صفحه‌ای که در یک نقطه بر سطح مماس شده مشابه با کره تعریف می‌شود.

$$\Omega = det \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \end{pmatrix} \quad (۳.۱)$$

در حالت کلی Ω می‌تواند مثبت، منفی و یا صفر باشد. قضیه‌ی گاؤس-بونه مقدار انتگرال Ω را برای هر سطح بسته‌ی هموار بیان می‌کند.

$$\frac{1}{2\pi} \int_s d\sigma \Omega = 2(1 - g) \quad (۴.۱)$$

از آن جا که g یک عدد صحیح نامنفی است، عدد جنس [۲] یک سطح نامیده می‌شود. سطوحی که قابلیت تبدیل شدن به یکدیگر را به صورت پیوسته دارند (همئومورفیک) [۳] دارای عدد جنس یکسانی هستند. در شکل ۲.۱ عدد جنس برای سطوح متفاوت کره، دو فنجان قهوه‌ی متفاوت و یک نان شیرینی نشان داده شده است. در ریاضیات عدد جنس برابر تعداد حفره‌های موجود در یک سطح است. همان طور که از شکل پیداست فنجان قهوه و نان شیرینی دارای عدد جنس یکسانی هستند و قابلیت تبدیل شدن به یکدیگر را دارند [۴، ۵].



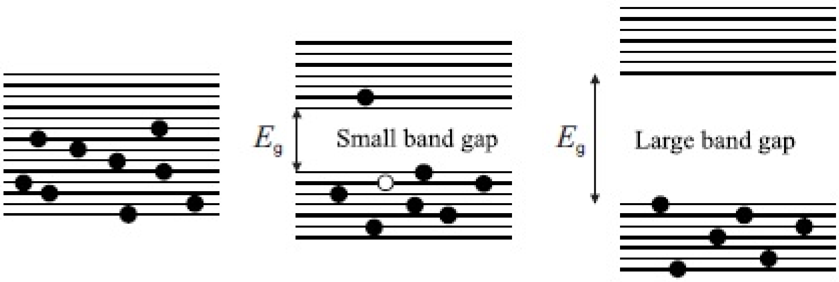
شکل ۲.۱: چند سطح متفاوت و عدد جنس آن‌ها

مواد بر اساس رسانایی الکتریکی آن‌ها به سه دسته تقسیم بندی می‌شوند: فلز، نیم‌رسانا و عایق. تمایز این سه دسته از مواد در ساختار نواری الکتریکی آن‌هاست. همان طور که در شکل ۳.۱ نشان داده شده است، هیچ شکاف انرژی‌ای در ساختار نواری مواد رسانا وجود ندارد و مقدار بسیار کمی از

[۲] genus

[۳] homeomorphic

انرژی نیاز است تا الکترون از یک حالت به حالت برانگیخته‌ی بعدی برود. مواد عایق موادی هستند



شکل ۱.۳: ساختار نواری فلز، نیم‌رسانا و عایق به ترتیب از چپ به راست [۴]

که شکاف انرژی بسیار بزرگی در ساختار نواری آن‌ها وجود دارد و برای انتقال الکترون به یک حالت برانگیخته نیاز به مقدار قابل توجهی از انرژی داریم. مواد نیم‌رسانا نیز مانند مواد عایق دارای شکاف انرژی هستند اما اندازه‌ی این شکاف در آن‌ها کوچکتر است. مواد از لحاظ توپولوژی ساختار نوار به دو گروه دارای شکاف انرژی و فاقد شکاف انرژی تقسیم می‌شوند.

حال سؤالی که به وجود می‌آید اینجاست آیا مواد عایق و نیم‌رسانا که هر دو دارای شکاف انرژی هستند از لحاظ توپولوژیکی یکسانند؟ اگر پاسخ مثبت باشد پس می‌توانیم با ایجاد تغییراتی در پارامترهای مواد و بدون بسته شدن شکاف انرژی ساختار نواری آن‌ها را تغییر داده و در گروه دیگر قرار داد.

مطالعه‌ی توپولوژی ساختار نواری مواد در سال‌های اخیر سبب اکتشاف شاخه‌ی جدیدی از مواد شد. در این دسته از مواد تغییر در پارامترهای مواد سبب تغییر در ساختار نواری آن‌ها نمی‌شود. این مواد که دارای عدد جنس متفاوتی با عایق‌های معمولی هستند عایق‌های توپولوژیک نام دارند. وجود این دسته از مواد به صورت تئوری در سال ۲۰۰۵ پیش بینی شد و به مدت کمی پس از آن به صورت تجربی کشف شد. این شاخه‌ی جدید از مواد توجه بسیاری از فیزیکدانان ماده چگال را به خود جلب کرده است [۳].

فصل ۲

تقارن وارونی زمان

یکی از تقارن‌های مهم طبیعت تقارن وارونی زمان است. تفاوت عایق‌های توپولوژیک با عایق‌های معمولی یعنی وجود جریان‌های یک‌طرفه از شکسته شدن این تقارن حاصل می‌شود. در این فصل به توضیح قضیه‌ی تبهگنی کرامرز و ارتباط آن با عایق‌های توپولوژیک پرداخته‌ایم.

۱.۲ وارونی زمان در مکانیک کلاسیک

اگر حرکت کلاسیک یک ذره‌ی منفرد را در نظر بگیریم، $x(t)$ حل معادله‌ی حرکت $F = ma$ می‌باشد. وارونی زمان در حرکت کلاسیک را با $x(-t)$ نشان می‌دهیم. مثل فیلمی که در جهت معکوس نشان داده شود. ولی آیا $x(-t)$ نیز می‌تواند پاسخ مناسبی برای معادله‌ی حرکت باشد؟ پاسخ این است که به نیرو و وابستگی آن به زمان بستگی دارد. برای مثال برای حرکت یک ذره‌ی منفرد در میدان الکتریکی معادله‌ی حرکت به صورت زیر می‌باشد.

$$m\frac{d^۲x}{dt^۲} = qE(x) \qquad (۱.۲)$$

$x(-t)$ نیز می‌تواند در معادله‌ی حرکت صدق کند زیرا که طرف چپ معادله شامل جمله‌ی مشتق دوم نسبت به زمان است و در نتیجه حرکت در میدان الکتریکی برای یک ذره‌ی منفرد دارای تقارن وارونی زمان است. در حضور نیروی مغناطیسی معادله‌ی حرکت به صورت زیر می‌باشد.

$$m\frac{d^۲x}{dt^۲} = \frac{q}{c}\frac{dx}{dt} \times B(x) \qquad (۲.۲)$$

$x(-t)$ نمی‌تواند پاسخ مناسبی برای این معادله باشد. زیرا که طرف چپ معادله شامل جمله‌ی مشق دوم نسبت به زمان است، در حالی که طرف راست معادله شامل جمله‌ی مشتق اول نسبت به زمان است و در نتیجه حرکت در میدان مغناطیسی برای یک ذره‌ی منفرد دارای تقارن وارونی زمان نیست.

گفتنی است داشتن تقارن وارونی زمان به تعریف ما از سیستم بستگی دارد. برای مثال اگر سیستمی شامل تعدادی از ذرات که میدان الکتریکی و مغناطیسی تولید می‌کنند در نظر بگیریم تقارن وارونی زمانی حتی در حضور میدان مغناطیسی حفظ می‌شود. زیرا هنگامی که $t \to -t$ سرعت تمام ذرات تغییر علامت می‌دهد. بنابراین علامت جریان نیز عوض می‌شود در حالی که چگالی بار ناوردا باقی می‌ماند.

$$J \to -J$$

$$\rho \to \rho$$

طبق معادلات ماکسول $\nabla.E = \frac{\rho}{\varepsilon_\circ}$ و $\nabla \times B = \mu_\circ j$ برای میدان الکترومغناطیسی خواهیم داشت.

$$E \to E \qquad\qquad B \to -B$$

بنابراین در این حالت معادلات (۲.۱) و (۲.۲) تحت وارونی زمان ناوردا باقی می‌ماند.

۲.۲ وارونی زمان در مکانیک کوانتومی

معادله‌ی حرکت یک ذره را در حالت کوانتومی در نظر می‌گیریم.

$$i\hbar\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t} = [-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + v(x)]\psi(x,t) \tag{۳.۲}$$

$\psi(x,t)$ جواب این معادله می‌باشد. ولی $\psi(x,-t)$ جواب معادله‌ی شرودینگر نیست. اگر معادله‌ی شرودینگر را مزدوج مختلط کنیم خواهیم دید که $\psi^*(x,-t)$ یک جواب این معادله می‌باشد. تبدیل وارونی زمان را در حرکت کوانتومی این گونه تعریف می کنیم [۶].

$$T\psi(x,t) = \psi^*(x,-t) \tag{۴.۲}$$

که T عملگر وارونی زمان است.

۱.۲.۲ عملگر وارونی زمان یک عملگر یکانی نیست

اثر تبدیل وارونی زمان برای هر یک از عملگرهای مکان و تکانه

$$TxT^{-1} = x \quad (۵.۲)$$

$$TpT^{-1} = -p \quad (۶.۲)$$

بدین صورت است. جا به جا گر دو عملگر مکان و تکانه برابر است با:

$$[x_i, p_j] = i\hbar\delta_{ij} \quad (۷.۲)$$

با اثر دادن عملگر وارونی زمان داریم:

$$T[x_i, p_j]T^\dagger = -[x_i, p_j] = -i\hbar\delta_{ij} = T(i\hbar\delta_{ij})T^\dagger \quad (۸.۲)$$

کمیت $i\hbar\delta_{ij}$ یک عدد است. اگر T یک عملگر یکانی باشد، با تأثیر آن بر یک عدد تغییری ایجاد نمی‌شود و به تناقض می‌رسیم. پس عملگر وارونی زمان یک عملگر پاد یکانی است که i را به $-i$ تبدیل می‌کند. اگر تحت تبدیل وارونی زمان داشته باشیم:

$$|\alpha\rangle \rightarrow |\tilde{\alpha}\rangle = T|\alpha\rangle$$

$$|\beta\rangle \rightarrow |\tilde{\beta}\rangle = T|\beta\rangle$$

عملگر T پاد یکانی است اگر دو شرط زیر برقرار باشد.

$$\langle\tilde{\beta}|\tilde{\alpha}\rangle = \langle\beta|\alpha\rangle^* \quad (۹.۲)$$

$$T(c_1|\alpha\rangle + c_2|\beta\rangle) = c_1^*T|\alpha\rangle + c_2^*T|\beta\rangle \quad (۱۰.۲)$$

عملگر پاد یکانی را می‌توان به صورت ضرب دو عملگر خطی و پاد خطی تجزیه کرد. برای عملگر پادیکانی وارونی زمان می‌توان نوشت:

$$T = u\theta \tag{۱۱.۲}$$

عملگر پاد خطی θ به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\theta(\alpha_۱|\psi_۱\rangle + \alpha_۲|\psi_۲\rangle) = \alpha_۱{}^*(\theta|\psi_۱\rangle) + \alpha_۲{}^*(\theta|\psi_۲\rangle) \tag{۱۲.۲}$$

u یک ماتریس یکانی است و θ عملگری برای مزدوج مختلط کردن است. می‌توان ثابت کرد:

$$\theta^{-۱} = \theta \tag{۱۳.۲}$$

عملگر وارونی زمان علامت اسپین را تغییر می‌دهد. زیرا تکانه زاویه‌ای(اسپین) نوعی از تکانه است و تکانه تحت تبدیل وارونی زمان تغییر علامت می‌دهد [۷].

۲.۲.۲ تبدیل وارونی زمان برای سیستم اسپین$\frac{۱}{۲}$

اسپین $\frac{۱}{۲}$ با ماتریس های پائولی توصیف می‌شوند. تحت تبدیل وارونی زمان داریم:

$$T\sigma_x T^{-۱} = -\sigma_x$$
$$T\sigma_y T^{-۱} = -\sigma_y$$
$$T\sigma_z T^{-۱} = -\sigma_z$$
$$u\theta\sigma_x\theta u^{-۱} = -\sigma_x$$
$$u\theta\sigma_y\theta u^{-۱} = -\sigma_y$$
$$u\theta\sigma_z\theta u^{-۱} = -\sigma_z$$

می دانیم θ یک عملگر پاد خطی است پس داریم:

$$\theta\sigma_x\theta^{-1} = \theta \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \theta = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \theta^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \sigma_x$$

$$\theta\sigma_z\theta^{-1} = \theta \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \theta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \theta^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \sigma_z$$

$$\theta\sigma_y\theta^{-1} = \theta \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \theta = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} \theta^2 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} = -\sigma_y$$

u یک عملگر خطی است و می‌توان نوشت:

$$u\sigma_x u^{-1} = -\sigma_x$$
$$u\sigma_y u^{-1} = \sigma_y$$
$$u\sigma_z u^{-1} = -\sigma_z$$

برای این که سه شرط بالا برقرار باشد تنها عملگر یکانی که می‌توانیم بنویسیم برابر است با:

$$u = e^{i\varphi}\sigma_y$$

که φ در آن یک فاز اختیاری است. که به انتخاب پایه‌ها بستگی دارد [۷]. انتخاب فاز φ هیچ معنای فیزیکی ندارد و مقدار هیچ مشاهده پذیر فیزیکی را تغییر نمی‌دهد. به همین خاطر مقدار φ را طوری انتخاب می‌کنیم که ماتریس u یک ماتریس حقیقی شود. یعنی $\varphi = \frac{\pi}{2}$ یا $\varphi = \frac{3\pi}{2}$

$$u = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

درمکانیک کلاسیک در اثر دو بار تأثیر عملگر وارونی زمانی همه چیز به سر جای اولش برمی‌گردد ($T^2 = 1$). ولی آیا این موضوع در سیستم کوانتومی نیز صحیح است؟ با استفاده از ماتریس u به

دست آمده $T^{۲}$ را برای اسپین نیمه صحیح $\frac{۱}{۲}$ حساب می‌کنیم.

$$T^{۲} = u\theta u\theta = \begin{pmatrix} ۰ & ۱ \\ -۱ & ۰ \end{pmatrix} \theta \begin{pmatrix} ۰ & ۱ \\ -۱ & ۰ \end{pmatrix} \theta =$$
$$\begin{pmatrix} ۰ & ۱ \\ -۱ & ۰ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ۰ & ۱ \\ -۱ & ۰ \end{pmatrix} \theta^{۲} = \begin{pmatrix} -۱ & ۰ \\ ۰ & -۱ \end{pmatrix} = -I$$

یعنی با دو بار اثردهی عملگر وارونی زمانی علامت تابع موج عوض می‌شود.

$$T|\psi\rangle = |\psi'\rangle$$
$$T^{۲}|\psi\rangle = T|\psi'\rangle = -|\psi\rangle$$

به ازای هر مقدار دلخواه φ نیز مقدار $T^{۲}$ را به دست می‌آوریم:

$$T^{۲} = u\theta u\theta = e^{i\varphi}\sigma_y\theta e^{i\varphi}\sigma_y\theta = e^{i\varphi}\sigma_y e^{-i\varphi}(-\sigma_y) = -\sigma_y\sigma_y = -I$$

۳.۲ قضیه‌ی تبهگنی کرامرز

نتیجه ای که از رابطه‌ی $T^{۲} = -۱$ می گیریم از اهمیت خاصی برخوردار است. در یک سیستم که دارای تقارن وارونی زمانی است $[H, T] = ۰$. اگر $T^{۲} = -۱$ باشد تمام سطوح انرژی باید تبهگنی دوگانه داشته باشند. به بیان دیگر اگر $|A\rangle$ یک ویژه حالت هامیلتونی با ویژه مقدار انرژی E باشد، حتما ویژه حالتی مانند $|B\rangle$ با همان ویژه مقدار انرژی وجود دارد که به آن تبهگنی کرامرز می‌گویند. برای یک سیستم با تقارن وارونی زمانی $|\psi\rangle$ و $T|\psi\rangle$ دارای یک ویژه مقدار انرژی‌اند. اگر اثبات کنیم که این دو ویژه حالت از هم مستقلند قضیه‌ی تبهگنی کرامرز اثبات می‌شود. از برهان خلف استفاده کرده فرض می‌کنیم که این دو ویژه حالت از یکدیگر مستقل نیستند. یعنی

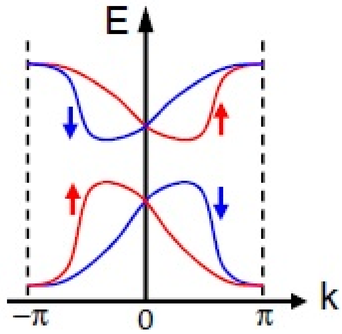
$$T|\psi\rangle = e^{i\varphi}|\psi\rangle \Rightarrow T^{۲}|\psi\rangle = Te^{i\varphi}|\psi\rangle = e^{-i\varphi}T|\psi\rangle = e^{-i\varphi}e^{i\varphi}|\psi\rangle = |\psi\rangle$$
$$\to T^{۲} = ۱$$

که با فرض اولیه در تناقض است. بنابراین برای هر فاز اختیاری ϕ

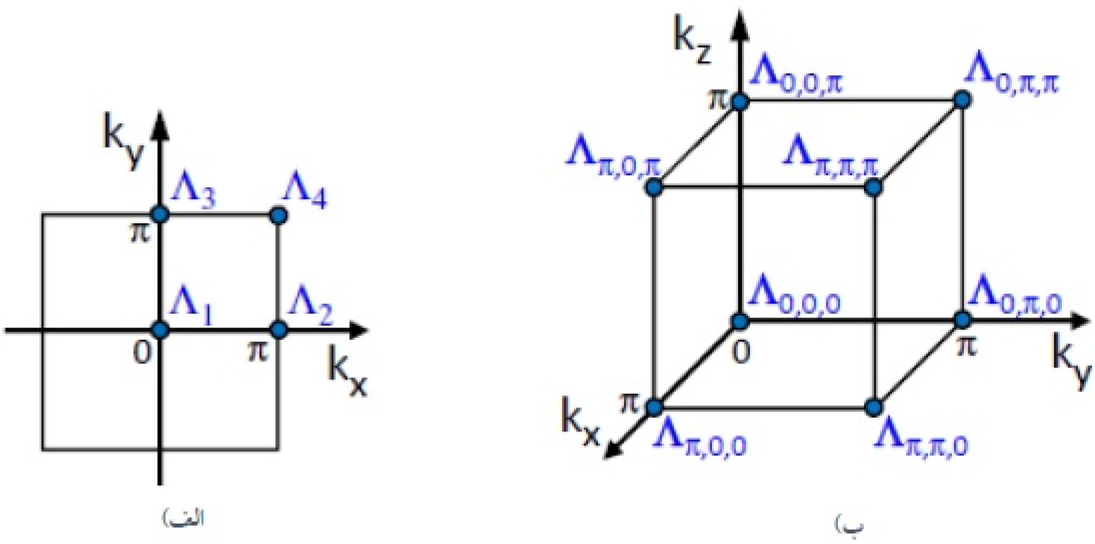
$$T|\psi\rangle \neq |e^{i\varphi}|\psi\rangle$$

۱.۳.۲ تبهگنی کرامرز و عایق های توپولوژیک

اگر تبهگنی کرامرز را برای تابع موج بلاخ در یک عایق در نظر بگیریم. نتیجه می‌گیریم که برای هر تابع موج بلاخ $\psi_{n,k,\sigma}$ یک تابع موج بلاخ $T\psi_{k,n,\sigma}$ وجود دارد که دارای همان ویژه مقدار انرژی است. در حالت کلی تبهگنی کرامرز برای هر نقطه‌ی k در $-k$ اتفاق می‌افتد به جز نقاطی که $k \neq -k$ مانند



شکل ۱.۲: تبهگنی کرامرز



شکل ۲.۲: چهار نقطه در شبکه‌ی دو بعدی و هشت نقطه در شبکه‌ی سه بعدی دارای تبهگنی هستند [۸].

$k = 0$ و $k = \pi$ شکل ۱.۲ نوار انرژی را در ناحیه ی اول بلاخ نشان می‌دهد و شکل ۲.۲ نقاطی که دارای تبهگنی هستند را به ترتیب در دو بعد و سه بعد نمایش می دهد [۸].