

الحمد لله
البرحمين
البرحمين



دانشگاه اصفهان

دانشکده علوم

گروه فیزیک

پایان نامه‌ی کارشناسی ارشد رشته‌ی فیزیک گرایش نظری

محاسبه‌ی نیروی استاتیک کازیمیر در حضور مواد مغناطودی‌الکتریک

استادان راهنما:

دکتر جلال سرابادانی

دکتر مرتضی سلطانی

پژوهشگر:

سید پیمان ذاکری

شهریور ماه ۱۳۹۱

کلیه حقوق مادی مرتبط بر نتایج مطالعات، ابتکارات
و نوآوری های ناشی از پژوهش موضوع این پایان نامه
متعلق به دانشگاه اصفهان است.



دانشگاه اصفهان

دانشکده علوم

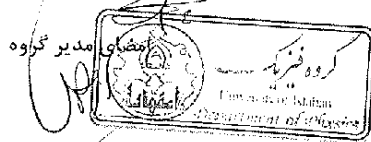
گروه فیزیک

پایان نامه‌ی کارشناسی ارشد رشته‌ی فیزیک گرایش فیزیک بنیادی در
زمینه‌ی گرانش و ریاضی فیزیک آقای سید پیمان ذاکری
تحت عنوان

محاسبه‌ی نیروی استاتیک کازیمیر در حضور مواد مکتوددی الکتریک

در تاریخ ۱۳۹۱/۶/۲۹ توسط هیأت داوران زیر بررسی و با درجه عالی به تصویب نهایی رسید.

- | | | | |
|-----------------------------|---------------------|------------------------|------|
| ۱- استاد راهنمای پایان نامه | دکتر جلال سرایادانی | با مرتبه علمی استادیار | امضا |
| ۲- استاد راهنمای پایان نامه | دکتر مرتضی سلطانی | با مرتبه علمی استادیار | امضا |
| ۳- استاد داور داخل گروه | دکتر غلامرضا راشدی | با مرتبه علمی استادیار | امضا |
| ۴- استاد داور خارج گروه | دکتر علی مهدیفر | با مرتبه علمی استادیار | امضا |



سپاسگزاری:

قبل از هر چیز لازم می‌دانم اینک که به فضل الهی این پایان نامه به انتهای خود رسیده است از اساتید راهنمای بزرگوار و گرانقدرم جناب آقایان دکتر جلال سرابادانی و دکتر مرتضی سلطانی که در طول اجرای این پروژه صبورانه مرا یاری نمودند و از دریای بی‌کران دانش خویش صادقانه و بی دریغ بهره‌مندم ساختند، از صمیم قلب مراتب تشکر عمیق خود را ابراز دارم و همواره آرزوی طول عمر همراه با عزت و سربلندی و سلامتی برای ایشان دارم.

هم‌چنین وظیفه خود می‌دانم از تمامی اساتیدی که در دوران تحصیلم در این دانشگاه مرا مورد لطف و عنایت خویش قرار داده‌اند، به خصوص جناب آقای دکتر شهرام صالحی کمال تشکر را داشته باشم و از خدای متعال توفیق روز افزون آن عزیزان را خواستارم.

تقدیم به پدر و مادر عزیزم:

ای پناهگاه ابدی من، تو را تقدیس می‌کنم و به علامت شکر سر بر سجده‌ی عبودیت می‌گذارم و بر لب، ذکر حمد تو را می‌آورم. ای مهربان، مهتر را تو بر من بتابان! گرمایش همان بود که لطافت عاشقانه وجودش را هر روز بی دریغ بر من ارزانی می‌داشت. چشمانم را برای اولین بار نمی‌سوزاند، نوازش می‌کرد. شعاع گرم عشقش تمام وجودم را در برداشت. آری، من خورشید را نظاره‌گر بودم.

پدرم... خورشید نورانی وجودم، از ژرفای قلبم آرزو دارم این تحفه را از من بپذیری و حال تو ای مادر، ای جاری در رگ‌های وجودم و ای قبله‌ی احساسم، نمی‌دانم، فقط کاش توانسته باشم با تلاشم قطره اشک شادی را بر گونه‌هایت نشانده باشم و مرارت‌های چند ساله‌ی عمرم را از وجودت رانده باشم.

پدر و مادر بزرگوارم... شمایی که وجودم برایتان همه رنج بود و وجودتان برایم همه مهر، مویتان سپیدی گرفت تا رویم سپید بماند. شمایی که فروغ نگاهتان، گرمی کلامتان و روشنی رویتان، سرمایه جاودانی زندگیم است. شمایی که راستی قامت‌م در شکستگی قامتتان تجلی یافت. در برابر وجود گرمتان زانوی ادب بر زمین می‌نهم و با دلی مملو از عشق و محبت بر دستانتان بوسه می‌نهم و ثمره‌ی تلاشم را به شما تقدیم می‌کنم که هرچه دارم از وجود شماست و این شما بودید که به من آموختید درس با عشق زیستن را.

چکیده:

در این پایان نامه به اثر استاتیک کازیمیر بین صفحه‌های رسانا ناشی از حضور مواد مغناطودی‌الکتریک با شرایط مرزی مختلف پرداخته‌ایم. دو صفحه‌ی موازی را که به فاصله H از یکدیگر قرار دارند و یک یا چند محیط را در بر گرفته‌اند در نظر می‌گیریم، در مسأله‌ی اول هدف محاسبه‌ی نیروی عمودی برای دو محیط تک لایه و چند لایه بین صفحه‌های صاف است و در مسأله‌ی دوم به محاسبه‌ی نیروی عرضی بین صفحه‌های ناهمواری می‌پردازیم که بین آن‌ها را خلاء یا محیط مغناطودی‌الکتریک پر کرده است. با استفاده از رهیافت انتگرال مسیر، میدان الکترومغناطیسی در حضور یک یا چند تیغه‌ی مغناطودی‌الکتریک کوانتیده و تابع‌های همبستگی مربوطه مشخص می‌شود. در چارچوب روش‌های انتگرال مسیر، با محاسبه کردن تابع گرین متناظر با هندسه‌ی مورد بررسی، نیروی کازیمیر بین دو رسانای ایده آل، موازی و بینهایت بزرگ بدست می‌آید.

برای یک محیط مفروض با پذیرفتاری‌های الکتریکی و مغناطیسی معلوم، عبارتهای صریحی برای نیروی کازیمیر بدست آمده است و می‌توان گفت که در غیاب یک محیط، نتایج به نیروی اصلی کازیمیر بین دو صفحه‌ی موازی رسانا که در خلاء کوانتومی الکترومغناطیسی قرار گرفته‌اند، میل می‌کند. در مسأله‌ی اول، نیرو به فاصله‌ی بین دو رسانا (H)، ضخامت (d) و تابع دی‌الکتریک (ϵ) محیط بستگی دارد.

در مسأله‌ی دوم وقتی که سطح دو رسانا ناهمواری داشته باشد، به خاطر تقارن برش انتقالی، اثر عرضی کازیمیر اتفاق می‌افتد که این اثر علاوه بر فاصله‌ی بین دو رسانا، ضخامت تیغه و تابع دی‌الکتریک آن، به فاصله‌ی تیغه از رساناها (H_1) و هم چنین طول موج ناهمواری‌های (λ) روی سطوح رسانا بستگی دارد.

کلمات کلیدی: کوانتس میدان، انتگرال مسیر، انرژی کازیمیر، نیروی کازیمیر، میدان کلاین-گوردون، تابع همبستگی، پذیرفتاری، شرط مرزی دیریشله، شرط مرزی نویمان، محیط پاشنده و محیط مغناطودی‌الکتریک

فهرست مطالب

صفحه

عنوان

فصل اول: کوانتش میدان به روش انتگرال مسیر

- ۱-۱ پیشگفتار ۱
- ۲-۲ کوانتش میدان اسکالر در حضور محیط ۱
- ۳-۱ کوانتش میدان الکترومغناطیسی در حضور محیط مغناطودی الکتریک ۸

فصل دوم: محاسبه‌ی نیروی کازیمیر عمودی به روش انتگرال مسیر

- ۱-۲ پیشگفتار ۱۴
- ۲-۲ نیروی کازیمیر عمودی در حضور محیط تک لایه ۱۴
- ۱-۲-۲ حالت کلی ۱۴
- ۲-۲-۲ نیروی عمودی برای شرایط مرزی مختلف ۱۷
- ۳-۲ نیروی کازیمیر عمودی در حضور محیط مغناطودی الکتریک چند لایه ۲۰
- ۱-۳-۲ دو تیغه‌ی مغناطودی الکتریک به هم پیوسته ۲۶
- ۲-۳-۲ سه تیغه‌ی مغناطودی الکتریک به هم پیوسته ۲۳
- ۴-۲ نتایج اصلی ۲۶

فصل سوم: محاسبه‌ی نیروی کازیمیر عرضی به روش انتگرال مسیر

- ۱-۳ پیشگفتار ۲۷
- ۲-۳ فرمول بندی کلی ۲۸
- ۱-۲-۳ به دست آوردن شکل بسته‌ی تابع پارش برای شرط مرزی دیریشله ۲۹
- ۲-۲-۳ به دست آوردن شکل بسته‌ی تابع پارش برای شرط مرزی نویمان ۳۶
- ۳-۳ نیروی عرضی در خلاء کوانتومی ۴۶
- ۴-۳ نیروی عرضی در حضور محیط مغناطودی الکتریک ۴۹
- ۵-۳ نیروی عرضی در خلاء کوانتومی با یک تیغه‌ی دی الکتریک در میان آن ۵۴
- ۶-۳ نتایج اصلی ۶۱

فصل چهارم: خلاصه و نتیجه گیری

- ۱-۴ نتایج ۶۳
- ۲-۴ برون دادها ۶۹

صفحه

عنوان

منابع و مأخذ ۷۰

فهرست شکل‌ها

صفحه	عنوان
۱۷.....	شکل ۱-۲ : دو صفحه‌ی رسانای موازی که یک محیط را در بر گرفته‌اند.....
۲۱.....	شکل ۲-۲ : دو تیغه‌ی مغناطودی‌الکتریک.....
۲۳.....	شکل ۳-۲ : سه تیغه‌ی مغناطودی‌الکتریک.....
۴۶.....	شکل ۱-۳ : هندسه‌ای که از آن برای محاسبه‌ی نیروی عرضی کازیمیر بین دو صفحه‌ی... ..
۴۹.....	شکل ۲-۳ : مقیاسی از دامنه‌ی نیروی عرضی $ F_l $ در خلاء کوانتومی که از رهیافت... ..
۵۰.....	شکل ۳-۳ : هندسه‌ی مربوط به سامانه‌ی شامل یک محیط پاشنده که توسط دو رسانای... ..
۵۲.....	شکل ۴-۳ (آ) : مقیاسی از بزرگی نیروی عرضی کل (TE + TM) [معادله ۵۵]... ..
۵۴.....	شکل ۵-۳ : یک تیغه‌ی دی‌الکتریک با ضخامت d و تابع دی‌الکتریک ϵ در فضای خلاء... ..
۵۸.....	شکل ۶-۳ (آ) : مقیاسی از بزرگی نیروی عرضی کازیمیر، $ F_l / F_l^{PFA} $ ، بین رساناهای... ..
۶۰.....	شکل ۷-۳ (آ) : در این جا شکل (آ) همانند شکل ۶-۳ (آ) ولی برای مقدار ثابت... ..

پیشگفتار

در این پایان نامه به اثر استاتیک کازیمیر^۱ می‌پردازیم. برای روشن شدن مفهوم اثر استاتیک کازیمیر می‌بایست انرژی نقطه‌ی صفر خلاء را معرفی کنیم. مفهوم انرژی نقطه صفر اولین بار توسط پلانک^۲، موقعی که بر روی قوانین جسم سیاه مطالعه می‌کرد، مطرح شد. او اولین بار مفهوم گسستگی انرژی را بیان کرد. در سال ۱۹۰۰ پلانک اولین قانون خود را

$$U = \frac{h\nu}{e^{K\overline{T}} - 1},$$

به دست آورد. در رابطه‌ی بالا U انرژی میانگین یک تابش کننده با بسامد ν است که با منبع گرمایی با دمای T در تماس است. ۱۲ سال بعد پلانک دومین قانون خود را ارایه کرد که در آن جذب انرژی توسط نوسان گر فرایندی کلاسیک بود ولی گسیل تابش به صورت بسته‌های انرژی و به طور گسسته بود. در این نظریه یک نوسانگر موقعی می‌تواند تابش کند که به اندازه‌ی $h\nu$ انرژی جذب کرده باشد. دومین قانون پلانک به صورت

$$U = \frac{h\nu}{e^{K\overline{T}} - 1} + \frac{1}{2} h\nu,$$

بود. این رابطه در حد دماهای بالا درست است و داریم

$$T \rightarrow 0 : \quad U \rightarrow \frac{1}{2} h\nu,$$

در واقع معادله‌ی بالا نقطه‌ی شروع مفهوم انرژی نقطه‌ی صفر بود.

در سال ۱۹۲۶ نظریه‌ی کوانتومی میدان الکترومغناطیسی آزاد برای اولین بار توسط بورن، هایزنبرگ و جوردان^۳ ارایه شد که در آن انرژی نقطه‌ی صفر پیش بینی شده بود. از نظر تجربی کار مولکین^۴ در سال ۱۹۲۴ اولین دلیل قاطع بر لزوم وجود انرژی نقطه‌ی صفر بود. او با بررسی طیف $B^{10}O^{16}$ و $B^{11}O^{16}$ نشان داد که نتایج تجربی قابل توجیه نیستند مگر این که برای تراز m انرژی ارتعاشی نوسان‌گری با بسامد ω داشته باشیم: $E = \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar\omega$. [۱]

همان طور که گفته شد میدان الکترومغناطیسی کوانتومی هم دارای انرژی نقطه‌ی صفر است. این انرژی نقطه‌ی صفر منشاء نیروی کازیمیر است. اولین بار در سال ۱۹۴۸ کازیمیر پیش بینی کرد که دو صفحه‌ی فلزی موازی که در

^۱ Casimir

^۲ Planck

^۳ Born, Heisenberg, Jordan

^۴ Muliken

خلاء قرار دارند همدیگر را جذب می‌کنند [۲]. در آن زمان کازیمیر در آزمایشگاه تحقیقاتی فیلیپس^۱ مشغول به کار بود. او بر روی خواص محلول‌های کلئیدی^۲ مطالعه می‌کرد. نیروی جاذبه‌ی بین اتم‌ها و مولکول‌های خنثی به وسیله‌ی نیروی وندروالس^۳ توصیف می‌شود [۳]. در ضمن نیروی بین ذرات کلئیدی نیروی بلند بُرد وندروالس است. کازیمیر و هم‌کارانش متوجه شدند که نظریه‌ی وندروالس به تنهایی نمی‌تواند نتایج آزمایشگاهی را توجیه کند. بنا براین در سال ۱۹۴۸ کازیمیر و پولدر^۴ نشان دادند برای این که نیروی دو اتم به درستی شرح داده شود باید محدود بودن سرعت نور در نظر گرفته شود [۴]. در همان سال کازیمیر نشان داد نیروی بین دو صفحه با ابعاد جانبی بی‌نهایت را که در خلاء کوانتومی قرار دارند، می‌توان بر حسب افت و خیزهای^۵ میدان الکترومغناطیسی بیان کرد. دو صفحه همدیگر را با نیروی

$$F = -\frac{c\pi^2}{240} \frac{1}{H^4},$$

جذب می‌کنند [۲]. در رابطه‌ی بالا، F نیروی وارد بر سطح، H فاصله‌ی بین دو صفحه، \circ ثابت پلانک تقسیم بر 2π و C سرعت نور هستند.

از آن جا که صفحه‌ها در خلاء کوانتومی الکترومغناطیسی قرار دارند، برای به دست آوردن نیروی کازیمیر، ابتدا لازم است میدان الکترومغناطیسی را کوانتیده کنیم. برای این کار، میدان الکترومغناطیسی را بر حسب توابع موج تخت $(e^{ik.x-i\omega t})$ بسط می‌دهیم. ضرایب بسط، عمل‌گرهای خلق و فنا ی کوانتومی \hat{a}^\dagger و \hat{a} هستند. هر جمله از بسط، معرف یک مُد است. می‌توان نشان داد که انرژی هر مُد برابر با

$$E = \circ\omega \left(\hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} \right),$$

خواهد شد که شبیه انرژی نوسانگر هماهنگ کوانتومی است. در حالت $|n\rangle$ ، تعداد کوانتوم‌های انرژی یا فوتون‌ها، n بوده و $|0\rangle$ ، حالت خلاء است. با وجود این که هیچ فوتونی در حالت خلاء نیست ولی خلاء دارای انرژی $\frac{1}{2}\circ\omega$ است. بنابراین نظریه‌ی میدان کوانتومی الکترومغناطیسی وجود انرژی نقطه‌ی صفر را اثبات می‌کند. منظور از افت و خیزهای میدان الکترومغناطیسی کوانتومی این است که مقدار چشم‌داشتی میدان‌های الکتریکی E و مغناطیسی B در حالت $|n\rangle$ صفر می‌شود ولی مقدار چشم‌داشتی مربع میدان‌ها صفر نمی‌شود. زیرا از آن جا که بسط میدان‌های الکترومغناطیسی بر حسب عمل‌گرهای خلق و فنا خطی است در نتیجه مقدار چشم‌داشتی میدان‌های الکتریکی E و

^۱ Philips Research Laboratories

^۲ Colloidal Solutions

^۳ Van der Waals

^۴ Polder

^۵ Fluctuation

^۶ Quantum

مغناطیسی B در حالت $n > 0$ صفر خواهد شد. اما مقدار چشم‌داشتی مربع میدان‌ها صفر نمی‌شود. به همین دلیل است که گفته می‌شود میدان کوانتومی الکترومغناطیسی دارای افت و خیز است.

برای این که شهود بیشتری راجع به مقدار نیروی کازیمیر داشته باشیم در این جا چند مثال را عنوان می‌کنیم. همان طور که از رابطه‌ی نیروی کازیمیر پیداست به خاطر ماهیت کوانتومی مسأله این نیرو در فاصله‌های بزرگ، بسیار کوچک است. اما در فاصله‌های کمتر از میکرون^۱ مقدار نیرو بزرگ خواهد بود. به عنوان مثال اگر دو صفحه‌ی فلز کامل را در فاصله‌ی $1\mu m$ از یکدیگر قرار دهیم و مساحت آن‌ها را $1cm^2$ بگیریم، $F \sim 10^{-7} N$ می‌شود که نیروی وزن یک قطره‌ی آب به شعاع $0.25 mm$ است. نیروی کازیمیر در فاصله‌های کمتر، بزرگ‌تر می‌شود. مثلاً اگر فاصله را $10 nm$ بگیریم که برابر با صد برابر اندازه‌ی یک اتم نوعی است، مقدار نیرو $10 N$ خواهد بود که فشار $10^5 Pa$ را بر صفحه‌ها وارد می‌کند که معادل یک اتمسفر است که فشار کمی نیست [۵]. بنابراین از نیروی کازیمیر باید در طراحی سامانه‌های میکروالکترومکانیکی^۲ از جمله نوسانگر کازیمیر استفاده کرد.

نیروی کازیمیر گفته شده در جهت عمود بر سطح رساناهاست، در حالی که اگر صفحه‌ها دارای ناهمواری‌های ناشی از برش‌های انتقالی متقارن باشند یک برهم‌کنش عرضی^۳ نیز می‌تواند به وجود آید [۶، ۷]. این برهم‌کنش عرضی کازیمیر بین یک صفحه‌ی ناهموار پوشیده از طلا و کره‌ی عظیم اندازه‌گیری شده است [۸] و می‌توان از آن به عنوان توان در سامانه‌ی شامل دو چرخ‌دنده‌ی غیرتماسی و هم‌چنین به عنوان یک چرخ‌دنده‌ی جناحی در طراحی یک حسگر نانومکانیکی استفاده کرد [۹].

در فصل اول، هدف کوانتیده کردن میدان به روش انتگرال مسیر است. در ابتدا میدان را اسکالر در نظر می‌گیریم و تابع مولد را برای میدان‌های آزاد به صورت

$$\begin{aligned} Z_0[J_\varphi, J_\omega] &= \int \prod_\omega D[Y_\omega] D[\varphi] \exp\left\{-\frac{i}{2} \int d^{n+1}x [\varphi(x)\varphi(x) \right. \\ &+ \int d\omega Y_\omega(x) \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \rho\omega^2\right) Y_\omega(x) + J_\varphi(x)\varphi(x) \\ &\left. + \int d\omega J_\omega(x)Y_\omega(x)\right\}, \end{aligned}$$

می‌نویسیم و سپس تابع مولد را برای میدان‌های برهم‌کنشی بدست می‌آوریم

^۱ Micron
^۲ Microelectromechanical systems (MEMS)
^۳ Lateral

$$\begin{aligned}
Z[J_\varphi, J_P] &= Z^{-1}[0] e^{i \int d^{n+1}z \left[\frac{\delta}{\delta J_\varphi(z)} \frac{\delta}{\delta J_P(z)} \right]} Z_0[J_\varphi, J_\omega] \\
&= Z^{-1}[0] \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left\{ i \int d^{n+1}z \frac{\delta}{\delta J_\varphi(z)} \frac{\partial}{\partial z_0} \frac{\delta}{\delta J_\varphi(z)} \right\}^n Z_0[J_\varphi, J_\omega].
\end{aligned}$$

در ادامه میدان را الکترومغناطیسی در نظر گرفته و کوانتس را در حضور یک محیط مغناطودی الکترونیک انجام می‌دهیم. این محیط دارای قطبش و مغناطشی است که به صورت زیر تعریف می‌شود

$$P = \int_0^\infty d\omega v_1(\mathbf{r}, \omega) \mathbf{X}_{1\omega},$$

$$M = \int_0^\infty d\omega v_2(\mathbf{r}, \omega) \mathbf{X}_{2\omega}.$$

در ادامه با استفاده از لاگرانژی تعریف شده در این قسمت برای تابع گرین داریم

$$G_{\varphi,\varphi}(\mathbf{k}, \omega) = \frac{1}{\mathbf{k}^2[1-\chi_m(\omega)] - \omega^2[1+\chi_e(\omega)]'}$$

و این در واقع تابع گرین میدان الکترومغناطیسی در حضور یک محیط مغناطودی الکترونیک¹ به ترتیب با پذیرفتاری‌های الکترونیک و مغناطیسی

$$\chi_e(\omega) \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega' \frac{v_1^2(\omega')}{\omega - \omega' + i0^+},$$

$$\chi_m(\omega) \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega' \frac{v_2^2(\omega')}{\omega - \omega' + i0^+},$$

است. در نهایت تابع مولد عبارت خواهد بود از

$$\begin{aligned}
Z[J_\varphi, J_P] &= \exp \{ i \int dx \int dx' [J_\varphi(x) G_{\varphi\varphi}(x-x') J_\varphi(x) \\
&\quad + J_\varphi(x) G_{P,\varphi}(x-x') J_P(x) \\
&\quad + J_\varphi(x) G_{P,\varphi}(x-x') J_P(x)] \}.
\end{aligned}$$

در فصل دوم نیروی کازیمیر عمودی را بین صفحات صاف رسانا با استفاده از رهیافت انتگرال مسیر بررسی می‌کنیم. برای این کار میدان الکترومغناطیسی را به دو میدان اسکالر تجزیه می‌کنیم و به جای کار با میدان الکترومغناطیسی، با این دو میدان اسکالر کار می‌کنیم. بعد از اعمال شرایط مرزی به توابع مولد زیر می‌رسیم

¹ Magnetodielectric

$$Z_D = Z_0^{-1} \int D[\varphi] \prod_{\alpha=1}^2 D[\psi_{\alpha}(X_{\alpha})] e^{S_D[\varphi]},$$

$$Z_N = Z_0^{-1} \int D[\varphi] \prod_{\alpha=1}^2 D[\psi_{\alpha}(X_{\alpha})] e^{S_N[\varphi]}.$$

در آن‌ها Z_0 تابع پارش فضای آزاد است و S_D و S_N برابرند با

$$S_D[\varphi] = \int d^{(n+1)}x \{ \mathcal{L}(\varphi(x)) + \varphi(x) \sum_{\alpha=1}^2 \int d^3X \delta(X - X_{\alpha}) \psi_{\alpha}(x) \},$$

$$S_N[\varphi] = \int d^{(n+1)}x \{ \mathcal{L}(\varphi(x)) + \varphi(x) \sum_{\alpha=1}^2 \int d^3X \delta(X - X_{\alpha}) \partial_n \psi_{\alpha}(x) \}.$$

در روابط بالا $\sum_{\alpha=1}^2 \int d^3X \delta(X - X_{\alpha}) \psi_{\alpha}(x)$ و $\sum_{\alpha=1}^2 \int d^3X \delta(X - X_{\alpha}) \partial_n \psi_{\alpha}(x)$ مانند چشمه‌ی $J(x)$ عمل می‌کنند و شکل انتگرال گاوسی به خود می‌گیرند، پس تابع‌های پارش را می‌توان این گونه نوشت

$$Z_D = \frac{1}{\sqrt{\det \Gamma_D(x,y,H)}},$$

$$Z_N = \frac{1}{\sqrt{\det \Gamma_N(x,y,H)}},$$

که در آن

$$\Gamma_D(x,y,H) = \begin{bmatrix} G(x-y,0) & G(x-y,H) \\ G(x-y,H) & G(x-y,0) \end{bmatrix}$$

$$\Gamma_N(x,y,H) = - \begin{bmatrix} \partial_z^2 G(x-y,0) & \partial_z^2 G(x-y,H) \\ \partial_z^2 G(x-y,H) & \partial_z^2 G(x-y,0) \end{bmatrix}.$$

که در آن $G(x-y, z)$ تابع گرین است. ما کنش مؤثر را به این صورت تعریف می‌کنیم

$$S_{eff} = -i \ln Z_D[H],$$

و نیروی کازیمیر را می‌توانیم از فرمول زیر بدست آوریم:

$$F = - \frac{\partial S_{eff}(H)}{\partial H}.$$

در ادامه برای چند هندسه‌ی مختلف تابع گرین مربوطه را بدست می‌آوریم و با استفاده از آن کنش مؤثر و نیروی کازیمیر را بدست می‌آوریم. برای سامانه‌ای شامل دو صفحه‌ی رسانا که دو نوع تیغه‌ی مغناطودی‌الکتریک را در بر گرفته‌اند کنش مؤثر عبارت است از

$$S_{eff}^{TE(TM)} = \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \ln[1 - \Delta_{12}^{TM} e^{-Q_1 z} + \Delta_{12}^{TM} e^{-Q_1 z} - e^{-Q_1 z}].$$

در هندسه‌ی بعدی سه تیغه‌ی مغناطودی‌الکتریک در بین دو صفحه‌ی رسانا جای گرفته‌اند که برای آن‌ها کنش مؤثر و نیروی کازیمیر عبارت خواهند بود از

$$S_{eff}^{TM} = \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \ln\{[1 - \Delta_{12}^{TM} e^{-2Q_1 d_1}][1 - \Delta_{32}^{TM} e^{-2Q_3 d_2}] - [e^{-2Q_1 d_1} - \Delta_{12}^{TM}][e^{-2Q_3 d_2} - \Delta_{32}^{TM}]e^{-4Q_2 d}\},$$

$$F_c = -2 \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \left[\frac{q}{(\Delta_{12}^{TE})^2 e^{2qd} - 1} + \frac{q}{(\Delta_{12}^{TM})^2 e^{2qd} - 1} \right].$$

در فصل سوم صفحات رسانایی را در نظر می‌گیریم که سطح داخلی آن‌ها دارای ناهمواری باشد، در نتیجه نیرویی که در این جا باید به محاسبه‌ی آن پرداخت، نیروی کازیمیر عرضی است. روند کار ما در این فصل مشابه با آنچه که در فصل‌های گذشته گفته شده است. میدان را اسکالر در نظر گرفته سپس بر روی صفحه‌ها شرط‌های مرزی دیریشله و نویمان را اعمال می‌کنیم و با وارد کردن شرط‌های مرزی با استفاده از تابع دلتا در تابع پارش، تابع پارش را بر حسب ناهمواری صفحه‌ها تا مرتبه‌ی دوم می‌نویسیم. می‌بینیم که بسط مرتبه‌ی دوم نیروی عرضی را به ما می‌دهد. در نهایت لگاریتم تابع پارش به صورت

$$\begin{aligned} \ln Z^h &= -\frac{1}{4} \int \{[\nabla h_1(x)]^2 + [\nabla h_2(y)]^2\} \times \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \times 1 \\ &+ \frac{\pi^2}{240H^5} \int d^3x \{[h_1(x)]^2 + [h_2(x)]^2\} \\ &+ \frac{1}{2} \int d^3x d^3y K_D^+(x-y) \left\{ -\frac{1}{2}[h_1(x) - h_1(y)]^2 - \frac{1}{2}[h_2(x) - h_2(y)]^2 \right\} \\ &- \frac{1}{2} \int d^3x d^3y K_D^-(x-y) [h_1(x)h_2(y) + h_2(x)h_1(y)], \end{aligned}$$

خواهد بود. در ادامه برای میدان‌های تغییر شکل $h_1(x)$ و $h_2(x)$ توابعی به صورت زیر در نظر می‌گیریم

$$h_1(x) = a \cos\left(\frac{2\pi x_1}{\lambda}\right),$$

$$h_2(x) = a \cos[2\pi(x_1 + l)/\lambda].$$

اگر ما میدان‌های ناهمواری را در تابع پارش قرار داده و تابع پارش را در فضای فوریه بنویسیم به راحتی می‌توان دید که تنها تابع کرنل $K_D^-(N)$ در برهم‌کنش عرضی سهم دارد. در نتیجه در ادامه‌ی محاسبات تنها به تابع کرنل $K_D^-(N)$ نیاز داریم و از محاسبه‌ی $K_D^+(N)$ صرف نظر می‌کنیم. نیروی عرضی بین دو رسانا بدین صورت تعریف می‌شود

$$F_l = - \frac{\partial E_{c.c.}}{\partial l},$$

که در آن $E_{c.c.}$ آن قسمت از انرژی کازیمیر است که وابسته به l است. محاسبات مربوط به انرژی برهم‌کنش $E_{c.c.}$ برای صفحات با ناهمواری سینوسی، با جداسازی سهم مدهای الکتریکی عرضی (TE) و مغناطیسی عرضی (TM) به رابطه‌ی زیر ختم می‌شود

$$E_{c.c.} = \frac{ca^2}{H^5} \cos\left(\frac{2\pi l}{\lambda}\right) \left[\tilde{E}_{c.c.}^{TM}\left(\frac{H}{\lambda}\right) + \tilde{E}_{c.c.}^{TE}\left(\frac{H}{\lambda}\right) \right],$$

که در آن $\tilde{E}_{c.c.}^{TM(TE)}(H/\lambda) = \tilde{E}_{c.c.}^{TM(TE)}(0, H/\lambda, 0)$ همان تبدیل فوریه‌ی $K_D^-(N)$ است. در ادامه برای چند هندسه‌ی خاص ابتدا تابع گرین را بدست می‌آوریم سپس توابع کرنل و در نهایت به محاسبه‌ی انرژی و نیروی کازیمیر می‌پردازیم.

¹ Transverse Electric
² Transverse Magnetic

فصل اول

کوانتش میدان به روش انتگرال مسیر

۱-۱ پیشگفتار

در این فصل با استفاده از رهیافت انتگرال مسیر به کوانتش میدان در حضور محیط می‌پردازیم. در ابتدا برای سهولت کار، میدان اسکالر بدون جرم کلاین-گوردون^۱ را در حضور محیط کوانتیده می‌کنیم و در حالت دوم این کار را برای یک میدان الکترومغناطیسی در حضور محیط مغناطودی‌الکتریک صورت می‌دهیم [۱۰]. در این جا، محیط را با پیوستاری از نوسانگرهای هماهنگ شبیه‌سازی می‌کنیم. برای محیط مفروض، یک لاگرانژی در نظر می‌گیریم و با استفاده از دوران ویک^۲، $t \rightarrow i\tau$ ، لاگرانژی را به هامیلتونی تبدیل کرده تا بتوان با استفاده از آن، تابع پارش سامانه را بدست آورد. از این تابع پارش برای محاسبه‌ی کنش مؤثر و در نهایت نیروی کازیمیر در فصل بعدی استفاده خواهد شد.

۱-۲ کوانتش میدان اسکالر در حضور محیط

قبل از در نظر گرفتن میدان الکترومغناطیسی در حضور یک محیط، ما ساده‌ترین حالت، یعنی میدان نرده‌ای

^۱ Klein-Gordon
^۲ Wick rotation

بدون جرم را در نظر می‌گیریم. در ادامه نشان می‌دهیم که میدان کلاین-گوردن را می‌توان به هر قطبشی از میدان الکترومغناطیسی نسبت داد. در ابتدا لاگرانژی زیر را برای کل سامانه در نظر می‌گیریم

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{sys} + \mathcal{L}_{mat} + \mathcal{L}_{int}, \quad (1-1)$$

که در آن

$$\mathcal{L}_{sys} = \frac{1}{2} \partial^\mu \varphi \partial_\mu \varphi, \quad (2-1)$$

چگالی لاگرانژی میدان کلاین-گوردن بدون جرم است. محیط را با پیوستاری از نوسانگرهای هماهنگ شبیه-سازی می‌کنیم [۱۱]

$$\mathcal{L}_{mat} = \int_0^\infty d\omega \left(\frac{1}{2} \rho \dot{Y}_{i\omega}^2 - \frac{1}{2} \rho \omega^2 Y_{i\omega}^2 \right). \quad (3-1)$$

Y_ω در آن یک میدان نوسانگر، ρ چگالی ماده، و برهم‌کنش بین سامانه و محیط آن با

$$\mathcal{L}_{int} = \varphi \dot{P}, \quad (4-1)$$

تعریف می‌شود که در آن داریم

$$P = \int_0^\infty d\omega v(\mathbf{r}, \omega) Y_\omega. \quad (5-1)$$

در رابطه‌ی بالا برای تعریف P ، از تابع $v(\mathbf{r}, \omega)$ استفاده کرده‌ایم. در بخش ۱-۳ نشان می‌دهیم که کمیت P در واقع میدان قطبش متناظر با محیط است و برهم‌کنش (۴-۱)، در واقع برهم‌کنش دو قطبی الکتریکی است.

معمولاً یک تابع مولد به این صورت تعریف می‌شود [۱۲]

$$Z[J] = \int D[\psi] \exp\{i \int d^{n+1}x [\mathcal{L}(\psi(x)) + J(x)\psi(x)]\}, \quad (6-1)$$

که در آن ψ میدان نرده‌ای است و $D[\psi]$ به معنای انتگرال‌گیری روی میدان ψ است. می‌توان با مشتق‌گیری تابعی پی‌درپی نسبت به چشمه‌ی میدان $J(x)$ ، این میدان نرده‌ای را پیدا کرد. تابع پارش بالا گاوسی است، زیرا