وزارت علوم، تحقیقات و فناوری
دانشگاه دامغان
دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر

پایان‌نامه کارشناسی ارشد
ریاضی کاربردی (گرایش آنالیز عددی)

حل مسائل هدایت گرمایی معکوس با استفاده از یک روش بهینه سازی

توسط:
جعفر سعیدی

استاد راهنما:
دکتر رضا پورقلی

استاد مشاور:
دکتر علی عباسی ملایی

تیرماه ۱۳۹۲

بسم الله الرحمن الرحیم

به نام خدا

حل مسائل هدایت گرمایی معکوس با استفاده از یک روش بهینه سازی

توسط:

جعفر سعیدی

پایان‌نامه

ارائه شده به تحصیلات تکمیلی دانشگاه به عنوان بخشی از فعالیت‌های تحصیلی لازم برای اخذ درجه کارشناسی ارشد

در رشته

ریاضی کاربردی (گرایش آنالیز عددی)

از دانشگاه دامغان

ارزیابی و تأیید شده توسط کمیته پایان‌نامه با درجه: **بسیار خوب**

دکتر رضا پورقلی استادیار ریاضی کاربردی گرایش آنالیز عددی دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر دانشگاه دامغان (استاد راهنما)

دکتر علی عباسی ملایی استادیار ریاضی کاربردی گرایش تحقیق در عملیات دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر دانشگاه دامغان(استاد مشاور)

دکتر سید هاشم طبسی استادیار علوم کامپیوتر گرایش علوم کامپیوتر دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر دانشگاه دامغان(داور اول)

دکتر سید امین اصفهانی استادیار ریاضی محض گرایش سیستم‌های دینامیکی و نظریه‌ی معادلات دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر دانشگاه دامغان(داور دوم)

دکتر محمد ابری استادیار ریاضی محض گرایش توپولوژی دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر دانشگاه دامغان (نماینده تحصیلات تکمیلی)

تقدیم به

پدر عزیزم، به خاطر تمام بزرگواری‌هایش؛

مادر مهربانم، به خاطر تمام محبت‌هایش؛

سپاسگزاری

خدایا، تو خود می‌دانی که با تمام وجودم سعی در احساس تو در لحظه لحظه‌های زندگی‌ام دارم. از تو می‌خواهم در تمام مراحل زندگی پشت و پناهم باشی، همان گونه که تاکنون بوده‌ای، و به من فهمی بده که قدرت درک مقدراتت را داشته باشم.

از تو بهترین‌ها را می‌خواهم، و تو را شایسته بزرگ‌ترین سپاس گزاری‌ها می‌دانم.

بعد از سپاس از باری تعالی، بر خود فرض می‌دانم که از خانواده‌ام نهایت قدردانی را داشته باشم. از استاد راهنمای بزرگوارم که در لحظه لحظه‌های این راه، همراه و یار من بوده است، کمال تشکر را دارم و بهترین‌ها را برای ایشان آرزو می‌کنم. از اساتید محترم، جناب آقای دکتر علی عباسی ملایی که زحمت مشاوره اینجانب را بر عهده داشته‌اند و جناب آقای دکتر سید هاشم طبسی و جناب آقای دکتر سید امین اصفهانی که زحمت داوری این پایان نامه را بر عهده داشته‌اند، کمال تشکر و سپاس را دارم.

از جناب آقای دکتر محمد ابری، نماینده محترم تحصیلات تکمیلی که در جلسه دفاع بنده حضور داشتند سپاسگزارم.

جعفر سعیدی

تیر ۹۲

چکیده

حل مسائل هدایت گرمایی معکوس با استفاده از یک روش بهینه سازی

به وسیله‌ی:
جعفر سعیدی

در این پایان‌نامه، یک روش عددی برای حل یک مسئله‌ی هدایت گرمایی معکوس با داده‌های بدون اختلال و با داده‌های دارای اختلال مطرح می‌شود. یک جواب عددی پایدار برای این مسئله تعیین خواهد شد. به این منظور، یک مسئله هدایت گرمایی را در یک مسئله بهینه‌سازی خلاصه می‌کنیم، و آن را با روش موسوم به روش تابع فیلد حل می‌کنیم. نتایج عددی بدست آمده، بازدهی روی‌کرد موردنظر را در تخمین مجهولات مسئله‌ی معکوس نشان می‌دهد.

واژه‌های کلیدی: مسائل معکوس سهموی، روش تابع فیلد، الگوریتم BFGS ، روش منظم‌سازی تیخونف.

فهرست مطالب

فهرست جدول‌ها

فهرست شکل‌ها

پیشگفتار

مسائل معکوس دسته‌ای از مسائل‌اند که از لحاظ ریاضی، یافتن پاسخ نهایی آنها به وسیله‌ی روش‌های کلاسیک ممکن نیست. در بسیاری از کاربردها، مدلی از سیستم موجود بوده که ورودی سیستم را به خروجی آن مربوط می‌سازد:

$$Input \rightarrow System \rightarrow Output$$

یک نوع مساله، تعیین خروجی به ازای داشتن مدل ریاضی سیستم و ورودی می‌باشد؛ که اغلب این را به عنوان مساله مستقیم در نظر می‌گیریم. حالت معکوس آن، یعنی تعیین ورودی سیستم به ازای داشتن اندازه‌گیری‌های خارجی (خروجی) و مدلی ریاضی که ارتباط دهنده درون سیستم با اندازه‌گیری‌ها است، مساله معکوس نامیده می‌شود. اطلاعات به ناچار در روند مسائل مستقیم، حذف خواهند شد. جهت استخراج پاسخی پایدار برای چنین سیستم‌هایی باید آن بخشی از اطلاعات که حذف گردیده است را توسط روشی تخمین زد. این اطلاعات، دانش قبلی [۱] از سیستم نامیده می‌شوند. انتخاب نوع اطلاعاتی که باید به سیستم اضافه گردد، در یافتن پاسخ صحیح سیستم بسیار حایز اهمیت می‌باشد. الگوریتم‌هایی که در ارتباط با بدست آوردن پاسخ صحیح چنین سیستم‌هایی هستند، الگوریتم‌های منظم‌سازی نامیده می‌شوند. اولین چیزی که این دانش قبلی از سیستم باید تامین نماید، اطمینان از حذف اثر نویز می‌باشد. غالباً حذف نویز براحتی با بیان دوباره سیستم بصورت یک مساله جدید، پیاده‌سازی می‌گردد.

مسائل معکوس در زمینه‌های مختلف از جمله تصویربرداری پزشکی، پردازش تصویر، ریاضیات مالی، ستاره‌شناسی، تست غیرمخرب مواد، اکتشاف زیرسطح و ... ظاهر می‌شوند. دسته‌ای از مسائل که در آن مسائل معکوس مطرح می‌شود، مسائل هدایت گرمایی است. مسائل هدایت گرمایی به دو

[۱] A Priori Knowledge

دسته، مسائل هدایت گرمایی مستقیم و مسائل هدایت گرمایی معکوس تقسیم می‌شوند. مسائل هدایت گرمایی معکوس در بسیاری از شاخه‌های علوم و مهندسی از جمله: فیزیك، ریاضی، برق، مکانیك و ... مطرح می‌شود. مسائل هدایت گرمایی معکوس یک نمونه بارز از مسائلی هستند که چندین تابع و پارامتر مجهول در این‌گونه مسائل هم‌زمان قابل تخمین زدن هستند. معمولاً یکی از شرایط فیزیکی مسئله مانند شرایط کرانه‌ای،ظرفیت گرمایی،ضریب رسانش گرمایی و... مجهول می‌باشد که هدف از حل چنین مسائلی پیدا کردن شرایط مجهول با اندازه‌گیری برخی خواص معلوم مسئله می‌باشد. از آنجایی که مسائل معکوس جزو مسائل بد-وضع می‌باشند، حل تحلیلی و جواب دقیق ندارند. بنابراین معمولاً از روش‌های عددی برای حل چنین مسائلی استفاده می‌شود.از آنجایی که مسائل هدایت گرمایی معکوس در صنعت کاربرد زیادی دارد و بسیاری از این مسائل را باید به روش‌های عددی حل کرد، ما به دنبال روشی هستیم که دارای دقت قابل قبول و سرعت بالایی باشد.

این پایان‌نامه شامل چهار فصل است. در فصل اول مفاهیم موردنیاز برای فصل‌های بعدی، نوع مسائل هدایت گرمایی معکوس و مثال‌هایی از این نوع مسائل مطرح می‌شود. در فصل دوم روش منظم‌سازی تیخونوف را معرفی می‌کنیم.

در فصل سوم، روشی برای حل برخی مسائل هدایت گرمایی معکوس شرح می‌دهیم. در این روش مسئله هدایت گرمایی معکوس را به یک مسئله بهینه‌سازی نامقید تبدیل می‌کنیم و آن را با روش تابع فیلد حل می‌کنیم.

در فصل چهارم نیز مثال‌های عددی آورده شده است. خواهیم دید که این روش بسیار کارا و سریع است.

فصل ۱

معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی

۱-۱ مقدمه

اگر هدف از حل مسئله در مسائل هدایت گرمایی، یافتن درجه حرارت با فرض معلوم بودن شرایط مرزی و آغازین مسئله در دامنه‌ی مسئله باشد، آن‌گاه چنین مسئله‌ای یک مسئله‌ی مستقیم است اما، اگر در حل مسئله، یافتن شرط یا شرایطی به جز درجه حرارت مسئله مدنظر باشد، آن‌گاه این مسئله به طور مستقیم قابل حل نبوده و برای حل آن نیازمند اندازه‌گیری دما در یک یا چند نقطه‌ی داخلی هستیم. در این صورت مسئله تبدیل به یک مسئله‌ی معکوس می‌شود. اگرچه تعریف رسمی و دقیقی از یک مسئله‌ی معکوس وجود ندارد ولی مفهوم آن در ریاضیات کاربردی مدرن به صورت وسیعی مورد استفاده قرار گرفته است. معمولاً در یک مسئله معکوس، کمیت‌هایی مانند چگالی، ضریب هدایت گرمایی، بار سطح، شکل رسانا با تغییرات فیزیکی رسانا یا هر محیط دیگر مشخص می‌شوند که می‌تواند تابعی از زمان، تابعی از شکل، ثابت و ... باشد [۳].

مسائل معکوس، زیرمجموعه‌ای از مسائل اندازه‌گیری غیرمستقیم هستند. در واقع اندازه‌گیری‌های غیرمستقیم، ماهیت یک مسئله را توصیف می‌کند. این مسائل در زمینه‌های کاربردی پیش می‌آیند. در چنین مسائلی معمولاً اثرات غیرمستقیم پدیده موردنظر اندازه‌گیری می‌شود. مسائل معکوس جزء مسائل دشوار می‌باشند زیرا حساسیت زیادی نسبت به خطای مقادیر اندازه‌گیری شده دارند. برای یک مسئله‌ی معکوس می‌توان یک مدل ریاضی ارائه داد. اما فرآیند حل یک مسئله معکوس بسیار دشوار بوده و معمولاً جواب دقیقی به دست نمی‌آید. بنابراین برای حل چنین مسائلی از روش‌های تقریبی مانند: روش‌های تکراری، تکنیک‌های منظم‌سازی، روش‌های تصادفی و شناسایی سیستم، روش‌هایی که جواب تقریبی را در زیرمجموعه‌ی جواب‌ها جستجو می‌کنند، تکنیک‌های تلفیقی و یا روش‌های

عددی مستقیم استفاده می‌کنند.

۱-۲ مسائل بد-وضع و خوش-وضع

فرض کنید یک مسئله به صورت زیر تعریف شده است

$$Au = g \quad (۱.۱)$$

در اینجا $u \in U$، $g \in G$ و U و G فضاهای متریک و A یک عملگر است به طوری که $AU \in G$ می‌باشد. در حالت کلی u می‌تواند برداری باشد که حالتی از یک پدیده را توصیف می‌کند و g خواص پدیده را نشان می‌دهد [۱۰].

یک مسئله‌ی خوش-وضع دارای شرایط زیر است
* جواب معادله (۱.۱) باید به ازاء هر $g \in G$ موجود باشد.
* جواب معادله (۱.۱) باید یکتا باشد.
* جواب معادله (۱.۱) باید نسبت به اختلال سمت راست پایدار باشد، یعنی عملگر A^{-1} باید در سراسر فضای G تعریف شده و پیوسته باشد.

اگر یکی از شرایط بیان شده در مسئله قبل برقرار نباشد آنگاه مسئله بد-وضع می‌باشد. برای مسائل بد-وضع، عملگر A^{-1} در دامنه‌اش، $AU \subset G$، پیوسته نمی‌باشد، به این معنی که جواب معادله (۱ . ۱) به طور پیوسته به ورودی $g \in G$ بستگی ندارد [۱۵]. به طور کلی می‌توان گفت که جواب یک مسئله بد-وضع لزوماً به طور پیوسته به داده‌های ورودی بستگی ندارد و ساختار جواب دارای ارتباط ضعیف با داده‌های ورودی است. به علاوه، خطاهای اندازه گیری شده‌ی کوچک می‌تواند سبب اختلالات بزرگ در جواب شود. بهترین مثال برای توضیحات بالا، اختلاف عددی جواب مسئله‌ی معکوس با داده ورودی دارای اختلال می‌باشد. بعضی از نکات جالب پیرامون مسائل بد-وضع را می‌توان در [۲، ۲۵] یافت.

۱-۳ دسته‌بندی مسائل معکوس

مسائل حاکم در مهندسی که به فرموله‌ی معادلات با مشتقات جزئی یا معادلات انتگرالی می‌رسد، با شکل و اندازه‌ی دامنه‌ی مسئله، شرایط مرزی و آغازین، ویژگی‌های فیزیکی سیال موردنظر مسئله، منبع‌های داخلی، شرایط خروجی و ورودی تعریف می‌شوند. همان‌طور که در بالا اشاره شد، اگر

همه‌ی این اطلاعات معلوم باشد مسئله ازنوع مستقیم می‌باشد و به طور عمومی می‌توان آنرا قابل حل و خوش-وضع در نظر گرفت. فرم کلی یک مسئله‌ی هدایت گرمایی به صورت زیر است

$$\rho c\frac{\partial T}{\partial t} = \nabla.(K\nabla T) + Q_\nu, \qquad (x,y,z)\in\Omega\subset R^۳, \qquad t\in(۰,t_f], \tag{۲.۱}$$

$$T(x,y,z,t) = T_b(x,y,z,t) \qquad for \qquad (x,y,z,t)\in S_D, \qquad t\in(۰,t_f], \tag{۳.۱}$$

$$-k\frac{\partial T(x,y,z,t)}{\partial n} = q_b(x,y,z,t) \quad for \quad (x,y,z,t)\in S_N, \qquad t\in(۰,t_f], \tag{۴.۱}$$

$$-k\frac{\partial(x,y,z,t)}{\partial n} = h_c(T(x,y,z,t) - T_e(x,y,z,t), \tag{۵.۱}$$

$$for \qquad (x,y,z,t)\in S_R, \qquad t\in(۰,t_f],$$

$$T(x,y,z,t) = T_۰(x,y,z,t) \qquad for \qquad (x,y,z)\in\Omega, \tag{۶.۱}$$

که $\nabla = (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z})$ عملگر مشتق گرادیان در فضای سه بعدی می‌باشد. ρ نشان‌دهنده‌ی غلظت جرم $[kg/m^۳]$؛ c گرمای ویژه در حجم ثابت $[J/kgK]$؛ T دما $[K]$؛ k نشان‌دهنده‌ی ضریب هدایت گرمایی $[W/mK]$؛ Q_ν نرخ تولید گرما در هر واحد حجم $[W/m^۳]$؛ اغلب به عنوان تابع منبع نامیده شده است؛ $\dfrac{\partial}{\partial n}$ به معنای مشتق نسبت به طول h_c نشان‌دهنده‌ی ضریب انتقال گرمایی $[W/m^۳]$؛ T_b، q_b و $T_۰$ توابع داده شده، T_e دمای محیطی و t_f زمان انتها می‌باشد. کران $\partial\Omega$ از دامنه‌ی Ω که به سه بخش مجزا توسط D برای شرایط مرزی دیریکله و N برای شرایط مرزی نیومن و R برای شرایط مرزی روبین نشان داده می‌شوند، تقسیم شده است؛ $S_D\cup S_N\cup S_R = \partial\Omega$.

به علاوه، معرفی شرایط کرانه‌ای تابشی نیز امکان‌پذیر می‌باشد. اما در اینجا شرط بیان شده به کار برده نشده است.

معادله‌ی (۲.۱) با شرایط (۳.۱) تا (۶.۱) مسئله با مقادیر آغازین برای هدایت گرمایی ناپایدار را توصیف می‌کند. در حالتی که مسئله ایستا باشد معادله‌ی (۲.۱) معادله پواسون و هنگامی که تابع منبع Q_ν برابر صفر باشد معادله‌ی لاپلاس می‌باشد. مسائل سهموی معکوس به انواع زیر تقسیم‌بندی می‌شوند

مسائل هدایت معکوس، انتقال گرمایی معکوس، تابش معکوس و تغییر فاز معکوس (انجماد یا ذوب) [۱۶].

در این جا مسائل سهموی معکوس را بر پایه‌ی عوامل به وجودآورنده‌ی این مسائل به صورت زیر دسته‌بندی می‌کنیم

۱- تعیین مقادیر مرزی مسائل معکوس،

۲- تعیین مقادیر آغازین مسائل معکوس،
۳- تعیین خصوصیات فیزیکی مسائل معکوس،
۴- تعیین منبع در مسائل معکوس،
۵- تعیین فرم مسائل معکوس،

۱-۳-۱ تعیین مقادیر مرزی مسائل معکوس

در این نوع از مسئله‌ی معکوس، بخشی از مرز در شرایط مسئله مجهول است. در عوض در تعدادی از نقاط داخلی دامنه‌ی مسئله، دماهای اندازه‌گیری شده یا مقادیر پیش‌بینی‌شده‌ی دما و یا شار گرمایی معلوم می‌باشد. مقادیر اندازه‌گیری شده یا پیش‌بینی شده جواب‌های داخلی نامیده می‌شوند. آنها می‌توانند در خط و یا سطح داخلی محدوده‌ی مسئله به صورت مجموعه‌ای گسسته از نقاط معلوم باشند. اگر جواب‌های داخلی به عنوان مقادیر شار گرمایی معلوم باشند در این صورت دما در قسمتی از مرز معلوم می‌باشد. یعنی باید یکی از شرایط روبین یا دیریکله معلوم باشد. در مسائل ایستا، معکوس مسئله برای معادله پواسون یا لاپلاس حل می‌شود. اگر دما به زمان بستگی داشته باشد در این صورت معادله (۲.۱) نقطه آغازین خواهد بود و می‌توان شرایط اضافی را به صورت زیر فرمول‌بندی کرد

$$T(x,y,z,t) = T_a(x,y,z,t)\ for\ (x,y,z,t) \in L \in \Omega, \qquad t \in (0, t_f] \tag{۷.۱}$$

یا

$$T(x_i,y_i,z_i,t_i) = T_{ik} \qquad for \qquad (x_i,y_i,z_i) \in \Omega, \qquad t_k \in (0, t_f] \tag{۸.۱}$$

در این جا $i = 1,2,3,\cdots,I$، $k = 1,2,3,\cdots,K$، T_a یک تابع معین و T_{ik} از مقادیر اندازه‌گیری شده به دست می‌آید. برای مشاهده‌ی مثال‌هایی از این نوع مسائل می‌توان به [۲۰] رجوع کرد.

۱-۳-۲ تعیین مقادیر آغازین مسائل معکوس

در این نوع مسائل معکوس سهموی، شرط آغازین مسئله مجهول است یعنی در شرط (۶.۱) تابع T_0 مجهول است. برای یافتن توزیع دمای آغازین، باید یک میدان گرمایی در دامنه‌ی موردنظر برای $t > 0$، معلوم باشد. یعنی به جای شرط (۶.۱) شرطی به فرم زیر داریم

$$T(x,y,z,t_{in}) = T(x,y,z) \qquad for \qquad (x,y,z) \in \Omega, \qquad t_{in} \in (0, t_f]$$

در برخی از مقالات به جای شرط (۴.۱) دماهای اندازه‌گیری شده روی بخشی از مرز استفاده می‌شود [۲۰].

۱-۳-۳ تعیین خصوصیات فیزیکی مسائل معکوس

تعیین خصوصیات فیزیکی، دسته‌ای دیگر از مسائل هدایت گرمایی معکوس را به وجود می‌آورد. ضرایب می‌توانند به مکان یا به دما وابسته باشند. در بعضی موارد فقط وابستگی به زمان، مدنظر است. هم‌چنین در مواردی که خصوصیات فیزیکی مسئله تعیین می‌شود، برخی از اطلاعات اضافی شامل دما و یا شارش گرما در دامنه‌ی مسئله معلوم است. معمولاً دماهای اندازه‌گیری شده در نقاط داخلی دامنه در دست است [۲۹].

۱-۳-۴ تعیین منبع در مسائل معکوس

در دسته‌ای دیگر از مسائل معکوس سهموی، منبع Q_v ، مجهول می‌باشد. در بسیاری موارد مقادیر دما در نقاط اختیاری دامنه، به عنوان شرط اضافی در نظر گرفته می‌شود. معمولاً این مقادیر با اندازه‌گیری به دست می‌آیند، شرط (۸.۱) را ببینید. هم‌چنین مقادیر اندازه‌گیری شده و یا پیش‌بینی شده دما و شارش گرمایی در قسمتی از مرز می‌تواند به عنوان شرط اضافی مسئله در نظر گرفته شود. دسته‌ی دیگری از مسائل، مربوط به منبع متحرک با توان نامعلوم می‌باشند. چنین مسائلی را می‌توان در [۹] مشاهده کرد.

۱-۳-۵ تعیین فرم مسائل معکوس

در چنین مسائلی شرط یا شرایط کرانه‌ای مجهول مسئله، متحرک است. در میان مسائل معکوس، حل عددی چنین مسائلی بسیار دشوار می‌باشد زیرا گسسته‌سازی آن‌ها منجر به یک دستگاه معادلات غیرخطی می‌شوند، برای دیدن چند مثال از چنین مسائلی به [۶] رجوع کنید.

۱-۴ برخی از کاربردهای صنعتی مسائل هدایت گرمایی معکوس

تحقیقات بر روی مسائل هدایت گرمایی معکوس و استفاده از آن‌ها در کاربردهای صنعتی به دهه‌ی ۱۹۵۰ تا ۱۹۶۰ میلادی برمی‌گردد. از جمله‌ی این کاربردها می‌توان به عملیات و مکانیزم گرمایی آیرودینامیک اشاره کرد. گرمای آیرودینامیکی هواپیما (فضای درون توربین) آن‌قدر بالاست که اندازه‌گیری مستقیم حرارت سطحی آن توسط حسگرها امکان‌پذیر نیست، بنابراین در چنین وضعیتی، حسگرها

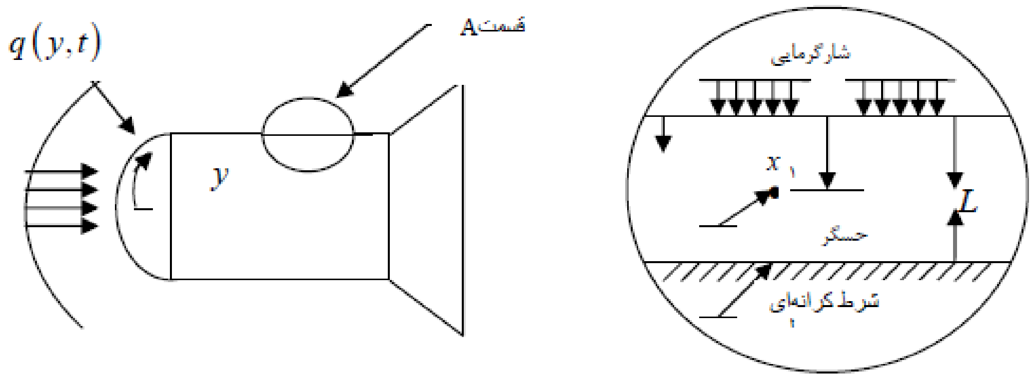
را زیر سپر تشعشع قرار می‌دهند و درجه حرارت سطح داغ را توسط تحلیل مسائل هدایت گرمایی معکوس تخمین می‌زنند [۲۲، ۲۴، ۲۹].

برخی از کاربردهای مسائل هدایت گرمایی معکوس عبارتند از: تخمین منبع حرارتی پرقدرت [۱] در یک ورقه پهن یا یک میله، تخمین شرایط سطحی نامعلوم، تخمین خواص فیزیکی مواد از جمله ضریب هدایت گرمایی k و ظرفیت ویژه گرمایی ρc_ρ و تخمین درجه حرارت در موتورهای درون‌سوز. در زیر به معرفی و شرح چند کاربرد صنعتی مسائل هدایت گرمایی معکوس می‌پردازیم.

۱-۴-۱ تخمین شار گرمایی سطحی در یک شاتل فضایی

یک موشک فضاپیما یا یک شاتل فضایی که در حال گردش است را در نظر بگیرید. هدف تخمین شار گرمایی سطح شاتل، با استفاده از اندازه‌گیری دمای به دست آمده توسط یک حسگر است که در موقعیت $x = x_۱$ نصب شده است، شکل (۱ − ۱).

اندازه‌گیری‌ها در لحظه‌های مجزا و گسسته‌ی t_i به دست می‌آید، دماهای اندازه‌گیری شده با y_i نمایش داده می‌شوند، مقدار دقیق شار گرمایی سطح را با q_i و شار سطح تخمین زده شده را با $\widehat{q_i}$ که متناظر با لحظه‌ی t_i می‌باشد، نشان می‌دهیم.



شکل ۱-۱: مثالی از یک وسیله‌ی فضایی موشک در حال گردش، جهت تخمین شار حرارتی سطح.

برای تخمین شار گرمایی در این شاتل، لازم است که یک مدل ریاضی از روند انتقال گرما در دسترس باشد. برای این منظور قسمتی از پوسته را در نظر می‌گیریم و مدل ریاضی مسئله را روی این قسمت پیاده‌سازی می‌کنیم. فرض کنید این قسمت از یک ماده ساخته شده باشد و علاوه بر آن همگن و ایزوتروپیک باشد، به طوری که بتوان آن را به عنوان یک قطعه فلزی مسطح در نظر گرفت. در این

[۱] Strength of a time-varing heat source

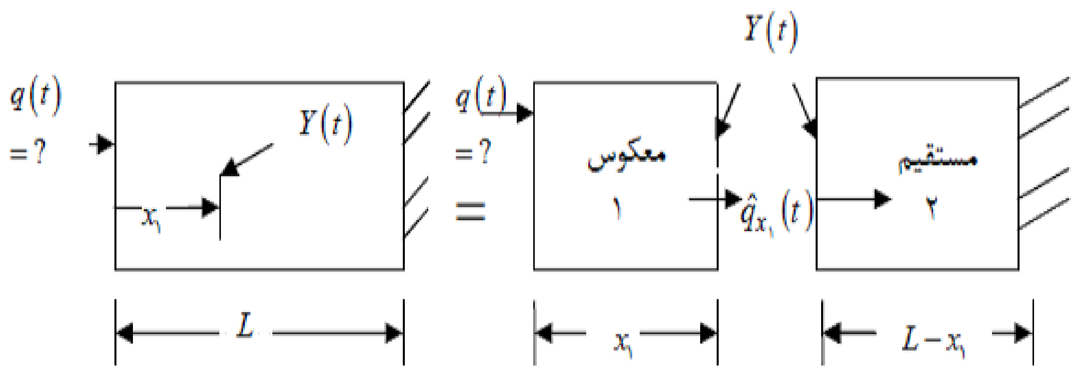
صورت مدل ریاضی برای تابع u به صورت زیر می‌باشد (توضیح بیشتر در [۴]).

$$\begin{cases} ku_{xx} = (\rho c)u_t, & \circ < x < l, t > \circ, \\ -ku_x = q(t), & x = \circ, t \geq \circ, \\ u_x = \circ, & x = l, t \geq \circ, \\ u(x,\circ) = u_\circ(x), & \circ \leq x \leq l, t = \circ, \end{cases}$$

در این مسئله به دلیل تقسیم بدنه گرم شده به دو قسمت مجزا، می‌توان مسئله را به دو مسئله متفاوت تقسیم کرد. یک مسئله مربوط به قسمتی از بدنه است که در فاصله $x = x_۱$ تا $x = l$ می‌باشد، که می‌تواند به عنوان مسئله‌ی مستقیم تحلیل شود زیرا شرایط مرزی در هر دو کران معلوم هستند. یعنی در مکان $x_۱$ شرط $u(x_۱, t) = y(t)$ و در $x = l$ شرط $u_x = \circ$ تعریف شده است.

با استفاده از مسئله مستقیم شار گرمایی در $x = x_۱$ می‌تواند از جواب توزیع دما در $x_۱ \leq x \leq l$ و با استفاده از شرط $\widehat{q}_{x_۱} = -ku_x|_{x=x_۱}$ محاسبه شود.

چنین شار گرمایی باید بدنه قسمت (۱) را ترک کند، در نتیجه در کران $x = x_۱$ در بدنه قسمت (۱) دو شرط مشخص شده است و در کرانه $x = \circ$ هیچ شرط معلوم و مشخصی تعریف نشده است، در مسئله معکوس (بدنه قسمت ۱) توزیع دمای $y(t)$ موردنظر نیست، بلکه با توجه به دانستن دمای تخمین زده شده به وسیله حسگر، هدف یافتن شار گرمایی $q(t)$ است. شکل‌های (۱-۱) و (۱-۲) چگونگی تقسیم بدنه یک جسم جامد به دو قسمت مجزا را نشان می‌دهند.



شکل ۱-۲: تقسیم مسئله هدایت گرمایی معکوس با یک سنسور منفرد به دو مسئله.

مسئله اخیر را برای حالتی که بدنه موشک از چند ماده متفاوت ساخته شده است و در نتیجه نیاز به جایگذاری چند حسگر دارد می‌توان به کار گرفت.

۱-۴-۲ تخمین خواص گرمایی پلیمرها

برای تعیین خواص گرمایی پلیمرها مطالعات و تحقیقات فراوانی در رشته‌ی مهندسی پزشکی انجام می‌شود، که مهمترین آنها خواص ضریب هدایت گرمایی، ضریب نفوذ گرمایی و گرمای ویژه می‌باشند. در این زمینه در سال ۱۹۹۳، شای [۲] ضریب هدایت گرمایی جامدات و ترویسان [۳] ضریب هدایت گرمایی نوعی ماده‌ی خاص موسوم به $Satarated\ porous\ media$ را اندازه‌گیری کردند. در سال ۱۹۹۶ کاروالهو [۴]، ضریب هدایت گرمایی پلیمرها را اندازه‌گیری کرد (توضیحات بیشتر در ارتباط با این کاربرد در مراجع [۵، ۱۷] آمده است).

۱-۴-۳ برخی کاربردهای دیگر

شار گرمایی در سطح جامد موشک [۵] در نزدیکی دهانه‌ی آن، به آسانی می‌تواند از مقدار $\frac{20MW}{M^2}$ تجاوز کند که این از لحاظ مقدار، بسیار زیاد است و در نتیجه اندازه‌گیری مستقیم شرایط، از جمله شار گرمایی و دمای سطح بسیار مشکل می‌باشد، شرکت‌های هوافضا در دهه‌ی هشتاد میلادی برای نخستین بار از تکنیک‌های معکوس، جهت تخمین شار گرمایی و دمای نامعلوم سطح استفاده کردند.

یک کاربرد دیگر از مسائل هدایت گرمایی معکوس در تماس سطوح فلزی در حال چرخش به کار گرفته می‌شود و می‌توان آن را به این صورت بیان کرد که در بسیاری از دستگاه‌ها و ماشین‌آلات مکانیکی نظیر موتورهای خودرو و ماشین‌های چاپ، برخی از قطعات با برخی دیگر از قطعات در تماس مستقیم می‌باشند. نوعی از تماس وقتی رخ می‌دهد که یک قطعه ثابت باشد و قطعه‌ی دیگر ضمن گردش حول محور خود با قطعه اول در تماس باشد. در محل اتصال و تماس این دو قطعه فلزی بر اثر اصطحکاک زیاد، گرمای زیادی تولید می‌شود که در بسیاری از اوقات، اندازه‌گیری آن بسیار مشکل است. برای برآورد این دما از مسائل هدایت گرمایی معکوس استفاده می‌شود، این کاربردها را می‌توان به طور مفصل در مراجع [۲۱، ۲۶] پیدا کرد.

---

[۲] Shai

[۳] Trevisan

[۴] Carvalho

[۵] Rocket