دانشگاه صنعتی اصفهان

دانشکده علوم ریاضی

قابلیت اعتماد بیزی در محیط فازی

پایان‌نامه کارشناسی ارشد آمار ریاضی

رضا زارعی

استاد راهنما

دکتر سید محمود طاهری

۱۳۸۶

دانشگاه صنعتی اصفهان

دانشکده علوم ریاضی

پایان نامه کارشناسی ارشد آمار ریاضی آقای رضا زارعی

تحت عنوان

قابلیت اعتماد بیزی در محیط فازی

در تاریخ ۱۳۸۶/۱۲/۲۲ توسط کمیته تخصصی زیر مورد بررسی و تصویب نهائی قرار گرفت.

۱– استاد راهنمای پایان‌نامه	دکتر سید محمود طاهری
۲– استاد مشاور پایان‌نامه	دکتر علی زینل همدانی
۳– استاد داور ۱	دکتر ناصر رضا ارقامی (گروه آمار دانشگاه فردوسی مشهد)
۴– استاد داور ۲	دکتر سعید پولادساز

سرپرست تحصیلات تکمیلی دانشکده   دکتر رسول نصر اصفهانی

به نام خدا

جلسه دفاع از پایان‌نامه کارشناسی ارشد

قابلیت اعتماد بیزی در محیط فازی

سخنران: رضا زارعی

زمان: چهارشنبه ۱۳۸٦/۱۲/۲۲ ساعت ۱۸:۳۰

مکان: سالن کنفرانس دانشکده علوم ریاضی

هیئت داوران

۱ – دکتر سید محمود طاهری

۲ – دکتر علی زینل همدانی

۳ – دکتر ناصر رضا ارقامی (گروه آمار دانشگاه فردوسی مشهد)

۴ – دکتر سعید پولادساز

چکیده:

در تحلیل قابلیت اعتماد کلاسیک، معمولاً داده‌های جمع آوری شده، پارامترهای مدل، احتمال‌های مربوطه و ... کمیت‌هایی دقیق در نظر گرفته می‌شوند. اما، در عمل با وضعیت‌هایی مواجه می‌شویم که در آن‌ها به‌دلیل شرایط حاکم بر آزمایش مفروضات فوق برقرار نیستند. در چنین شرایطی نیازمند توسیع روش‌های کلاسیک در جهت صورت‌بندی مفاهیم نادقیق هستیم. نظریه مجموعه‌های فازی که در این رساله نقش مهمی را داراست، یکی از ابزارهای مناسب برای غلبه بر این مشکل می‌باشد.

در این‌پایان‌نامه، قابلیت اعتماد بیزی سیستم‌ها در محیط فازی (حالتی که داده‌ها فازی هستند و حالتی که پارامترهای توزیع پیشین فازی هستند) مورد مطالعه و بررسی قرار می‌گیرد. به‌منظور به‌کارگیری رهیافت بیزی، پارامترهای فازی به عنوان متغیرهای تصادفی فازی با توزیع‌های پیشین فازی در نظر گرفته می‌شوند. در این زمینه برآوردگرهای بیز فازی قابلیت اعتماد سیستم و نیز برآوردگرهای بیز فازی نرخ خرابی و $MTTF$ (میانگین مدت زمان لازم تا خرابی) داده‌های طول عمر مورد مطالعه و بررسی قرار می‌گیرند.

همچنین، قابلیت اعتماد بیزی سیستم‌ها در محیط‌های مبهم (حالتی که داده‌ها مبهم هستند و حالتی که پارامترهای توزیع پیشین مبهم هستند) پیشنهاد می‌گردد. در جهت به‌کارگیری رهیافت بیزی، پارامترهای مدل را متغیرهای تصادفی فازی با توزیع پیشین مبهم در نظر می‌گیریم. این رهیافت برای ساختن برآورد بیز مبهم قابلیت اعتماد سیستم، با معرفی و به‌کارگیری قضیه‌ای موسوم به اتحاد تجزیه برای مجموعه‌های مبهم، مورد استفاده قرار می‌گیرد.

کلیه حقــوق مادی مترتب بـــر نتایج مطالعات، ابتکارات و نوآوری‌های ناشی از تحقیق موضوع ایــن پایان‌نامـــه متعلق بـــه دانشــگاه صنعتی اصفهان است.

فهرست مطالب

چکیده

در تحلیل قابلیت اعتماد کلاسیک، معمولاً داده‌های جمع آوری شده، پارامترهای مدل، احتمال‌های مربوطه و ... کمیت‌هایی دقیق در نظر گرفته می‌شوند. اما، در عمل با وضعیت‌هایی مواجه می‌شویم که در آن‌ها به‌دلیل شرایط حاکم بر آزمایش مفروضات فوق برقرار نیستند. در چنین شرایطی نیازمند توسیع روش‌های کلاسیک در جهت صورت‌بندی مفاهیم نادقیق هستیم. نظریه مجموعه‌های فازی که در این رساله نقش مهمی را داراست، یکی از ابزارهای مناسب برای غلبه بر این مشکل می‌باشد.

در این‌پایان‌نامه، قابلیت اعتماد بیزی سیستم‌ها در محیط فازی (حالتی که داده‌ها فازی هستند و حالتی که پارامترهای توزیع پیشین فازی هستند) مورد مطالعه و بررسی قرار می‌گیرد. به‌منظور به‌کارگیری رهیافت بیزی، پارامترهای فازی به عنوان متغیرهای تصادفی فازی با توزیع‌های پیشین فازی در نظر گرفته می‌شوند. در این زمینه برآوردگرهای بیز فازی قابلیت اعتماد سیستم و نیز برآوردگرهای بیز فازی نرخ خرابی و $MTTF$ (میانگین مدت زمان لازم تا خرابی) داده‌های طول عمر مورد مطالعه و بررسی قرار می‌گیرند.

همچنین، قابلیت اعتماد بیزی سیستم‌ها در محیط‌های مبهم (حالتی که داده‌ها مبهم هستند و حالتی که پارامترهای توزیع پیشین مبهم هستند) پیشنهاد می‌گردد. در جهت به‌کارگیری رهیافت بیزی، پارامترهای مدل را متغیرهای تصادفی فازی با توزیع پیشین مبهم در نظر می‌گیریم. این رهیافت برای ساختن برآورد بیز مبهم قابلیت اعتماد سیستم، با معرفی و به‌کارگیری قضیه‌ای موسوم به اتحاد تجزیه برای مجموعه‌های مبهم، مورد استفاده قرار می‌گیرد.

فصل ۱

مفاهیم و تعاریف مورد نیاز

در این فصل، تعاریف و قضایای نظریه مجموعه‌های فازی، نظریه قابلیت اعتماد و نظریه بیز تا جایی که در فصول بعدی به آن‌ها نیاز داریم، بر پایه‌ی مراجع [۳]، [۷]، [۱۱]، [۲۷]، [۳۶] و [۸۲]، مرور می‌شوند.

۱—۱ نظریه‌ی مجموعه‌های فازی

نظریه مجموعه‌های فازی در سال ۱۹۶۵ توسط پروفسور لطفی عسگرزاده[۱] دانشمند ایرانی تبار و استاد دانشگاه برکلی آمریکا ارائه شد[۸۲]. این نظریه از زمان ارائه آن تاکنون، گسترش و تعمیق زیادی یافته و کاربردهای گوناگونی در زمینه‌های مختلف پیدا کرده است.

در نظریه مجموعه‌های معمولی، مجموعه‌ها به صورت گردآیه‌ای معین از اشیاء تعریف می‌شوند. به عبارت دیگر هر مجموعه با یک ویژگی خوش‌تعریف مشخص می‌شود که با توجه به آن ویژگی، با قاطعیت می‌توان گفت که یک شی مفروض متعلق به مجموعه مورد نظر هست یا نه. مثلاً اگر مجموعه مرجع X، مجموعه اعداد حقیقی و P ویژگی «بزرگتر از ده بودن» فرض شود، آن‌گاه P یک ویژگی خوش‌تعریف است که یک مجموعه مثلاً A با آن متناظر می‌شود، زیرا برای هر عدد از مجموعه اعداد حقیقی می‌توان با قاطعیت گفت که آیا آن عدد بزرگتر از ده است یا خیر و بنابراین عضو A هست یا نه. حال فرض کنید بخواهیم درباره‌ی مجموعه‌ای از اعداد حقیقی صحبت کنیم که «بزرگ» باشند. در این‌جا با یک

[۱] L.A. Zadeh

ویژگی ناخوش‌تعریف و مبهم یعنی بزرگ سروکار داریم. این که چه اعدادی بزرگ هستند و چه اعدادی بزرگ نیستند بنا بر نظر افراد مختلف فرق می کند. مثلاً آیا ۱۰۰ عدد بزرگی است و عضو گردآیه اعداد حقیقی بزرگ است یا خیر؟ ۱۰۰۰چطور؟ ۱۰۰۰۰۰۰چطور؟ بنابراین ویژگی «بزرگ بودن» برای اعداد حقیقی یک ویژگی دقیق و معین و ترد[۲] نیست. در نتیجه جامه‌ی نظریه مجموعه‌های معمولی بر تن این گونه مفاهیم راست نمی‌آید و این نظریه از صورت بندی این مفاهیم و ویژگی ها ناتوان است. در محاورات روزمره کلمات مبهم بسیاری به کار گرفته می‌شوند. مثلاً «درخت سرو زیباست» و یا «قیمت نفت نسبتاً بالاست». مجموعه‌های فازی برای به کارگیری این نوع کلمات و گزاره‌های نادقیق ارائه شده است. نظریه مجموعه‌های فازی یک قالب جدید ریاضی برای صورت‌بندی و تجزیه و تحلیل این مفاهیم و ویژگی‌هاست. این نظریه یک تعمیم و گسترش طبیعی نظریه مجموعه‌های معمولی است که موافق با زبان و فهم طبیعی انسانها نیز می‌باشد. قبل از معرفی ساختار ریاضی نظریه مجموعه‌های فازی، اساس کار پروفسور زاده را با پیگیری مثال فوق درباره اعداد حقیقی «بزرگ» شرح می‌دهیم. بنابه پیشنهاد زاده، مناسب است که به هر عدد از مجموعه اعداد حقیقی، عددی از بازه $[۰,۱]$ به عنوان درجه بزرگی آن عدد نسبت دهیم هر چه عدد بزرگتر بود عدد متناظر برای عضویت آن در مجموعه «اعداد بزرگ» به یک نزدیک‌تر باشد و بالعکس هر چه عدد مورد نظر کوچکتر بود، عدد مربوط به عضویت آن در مجموعه «اعداد بزرگ» به صفر نزدیک‌ترباشد. به‌این ترتیب به جای آن‌که بگوییم عدد ۱۰۰۰ بزرگ است یا بزرگ نیست و یا اینکه در این باره ساکت باشیم می‌گوییم درجه بزرگی آن مثلاً ۰/۷ است. به عبارت دیگر به جای آن که بگوییم عدد ۱۰۰۰ عضو «اعداد بزرگ» هست یانه، می‌گوئیم عدد ۱۰۰۰ با درجه ۰/۷ عضو مجموعه «اعداد بزرگ» است. اساس کار تشریح شده در بالا چیزی جز گسترش مفهوم تابع نشانگر یک مجموعه که یک تابع با برد $\{۰,۱\}$ است، به یک تابع با برد $[۰,۱]$. به این ترتیب می‌توان بسیاری از مفاهیم بیگانه با ریاضیات فعلی را وارد دنیای ریاضیات کرد و تفکرات و زبان و منطق بشری را در یک ساختار ریاضی نظم و ترتیب داد.

فرض کنید X یک مجموعه مرجع دلخواه باشد. تابع نشانگر[۳] هر زیر مجموعه معمولی A از X، یک تابع از X به $\{۰,۱\}$ است که به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$I_A(x) = \begin{cases} ۱ & x \in A \\ ۰ & x \notin A \end{cases}$$

حال اگر برد تابع نشانگر را از مجموعه دو عضوی $\{۰,۱\}$ به بازه $[۰,۱]$ توسعه دهیم، یک تابع خواهیم داشت که به هر x از X، عددی از بازه $[۰,۱]$ نسبت می‌دهد، این تابع را تابع عضویت[۴] مجموعه فازی $\tilde{A}$

[۲] Crisp

[۳] Indicator Function

[۴] Membership Function

می‌نامیم. اکنون $\tilde{A}$ یک مجموعه معمولی نیست بلکه چیزی است که آن را یک مجموعه فازی یا به بیان دقیق‌تر، یک زیرمجموعه فازی از X می‌نامیم. بنابراین یک مجموعه‌ی فازی $\tilde{A}$، مجموعه‌ای است که درجات عضویت اعضای آن می تواند به طور پیوسته از $I = [۰, ۱]$ اختیار شود. این مجموعه به طور کامل و یکتا توسط یک تابع عضویت که آن را با $\mu_{\tilde{A}}(x)$ نمایش می‌دهیم مشخص می‌شود؛ تابعی که به هر عنصر از X، یک عدد از بازه $[۰, ۱]$ به عنوان درجه عضویت آن عنصر در مجموعه فازی $\tilde{A}$ نسبت می‌دهد. نزدیکی مقدار $\mu_{\tilde{A}}(x)$ به عدد یک نشان دهنده تعلق بیشتر x به مجموعه فازی $\tilde{A}$ است و نزدیکی آن به صفر نشان دهنده‌ی تعلق کمتر x به A است. به لحاظ شهودی $\mu_{\tilde{A}}$ را می توان درجه‌ی پذیرش ما در قبول x به عنوان عضوی از A در نظر گرفت . درحالت حدی اگر x کاملاً در $\tilde{A}$ عضو باشد آنگاه $\mu_{\tilde{A}}(x) = ۱$ و اگر x در $\tilde{A}$ عضو نباشد در این صورت $\mu_{\tilde{A}}(x) = ۰$. پس مجموعه‌های معمولی و توابع نشانگر آن‌ها، حالت خاصی از مجموعه‌های فازی و توابع عضویت آن‌ها هستند.

مثال **۱.۱** فرض کنید $X = \{۱, ۲, ۳, ۴, ۵\}$. یک زیرمجموعه معمولی از X شامل اعداد کوچکتر از چهار به صورت $A = \{۱, ۲, ۳\}$ است و تابع نشانگر آن به‌صورت زیر بیان می‌شود

$$I_A(x) = \begin{cases} ۱ & x = ۱, ۲, ۳ \\ ۰ & x = ۴, ۵ \end{cases}$$

در اینجا مثلاً $I_A(۲) = ۱$، یعنی عدد دو عضو مجموعه A است و $I_A(۴) = ۰$، یعنی عدد چهار عضومجموعه A نیست. به عبارت دیگر عدد دو ویژگی کوچکتر از چهار را دارد و عدد چهار ندارد. اکنون زیر مجموعه فازی $\tilde{B}$ از X که ویژگی «کوچک بودن» را نشان دهد می‌تواند توسط تابع عضویت زیر تعریف شود

$$\mu_{\tilde{B}}(x) = \begin{cases} ۱ & x = ۱ \\ ۰/٦ & x = ۲ \\ ۰/۳ & x = ۳ \\ ۰/۱ & x = ۴ \\ ۰ & x = ۵ \end{cases}$$

در این مثال برای نمونه $\mu_{\tilde{B}}(۲) = ۰/٦$ یعنی عدد دو با درجه ۰/٦ عضو مجموعه فازی $\tilde{B}$ است، $\mu_{\tilde{B}}(۵) = ۰$ یعنی عدد پنج اصلاً عضو مجموعه فازی $\tilde{B}$ نیست و $\mu_{\tilde{B}}(۱) = ۱$ یعنی عدد ۱ کاملاً عضو مجموعه فازی $\tilde{B}$ است. به عبارت یگر عدد دو ویژگی «کوچک بودن» (به بیان بالا) را با درجه‌ی ۰/٦ داراست و عدد پنج اصلاً دارا نیست و عدد یک کاملاً داراست.

تذکر **۲.۱** قبل از ادامه‌ی بحث همین‌جا متذکر می‌شویم که افراد مختلف ممکن است نظرات متفاوتی درباره‌ی ویژگی‌هایی مانند «کوچک بودن» یا «نزدیک به هزار بودن» و مانند این‌ها داشته باشند و در

نتیجه توابع عضویت مختلفی برای زیرمجموعه‌های فازی که بیانگر این ویژگی‌ها باشد، در نظر بگیرند. بنابراین در تعیین تابع عضویت یک زیرمجموعه فازی، جنبه‌های ذهنی و شخصی بسیار موثر هستند.

تعریف ۳.۱ فرض کنید X یک مجموعه مرجع و $\tilde{A}$ یک زیرمجموعه فازی از آن باشد. مجموعه نقاطی از X که برای آن نقاط $\mu_{\tilde{A}}(x) > 0$، تکیه‌گاه[5] $\tilde{A}$ نامیده شده و با $supp(\tilde{A})$ نشان داده می‌شود.

تعریف ۴.۱ مقدار $M = \sup_x \mu_{\tilde{A}}(x)$، ارتفاع مجموعه $\tilde{A}$ نامیده می‌شود. اگر ارتفاع مجموعه فازی $\tilde{A}$ برابر یک باشد آنگاه $\tilde{A}$ نرمال نامیده می‌شود و در غیر این صورت $\tilde{A}$ را زیر نرمال می‌گوییم. بدیهی است که هرمجموعه فازی زیر نرمال $\tilde{A}$ رامی‌توان باتقسیم درجات عضویت بر ارتفاع $\tilde{A}$ نرمال کرد.

مثال ۵.۱ برای مجموعه‌ی فازی $\tilde{B}$ در مثال ۱.۱ داریم $supp\tilde{B} = \{1, 2, 3, 4\}$. همچنین $M = \sup_X \mu_{\tilde{B}}(x) = 1$ یعنی ارتفاع $\tilde{B}$ برابر ۱ است و بنابراین $\tilde{B}$ یک مجموعه‌ی فازی نرمال است .

برای نشان دادن یک مجموعه فازی روش‌های مختلفی رایج است. یک روش به کاربردن مستقیم تابع عضویت مجموعه فازی است. روش متداول دیگر توصیف یک مجموعه فازی به‌صورت مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب به صورت زیراست

$$\tilde{A} = \left\{(x, \mu_{\tilde{A}}(x));\ x \in X\right\}$$

اصولاً برخی مولفین، یک مجموعه فازی را مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب به‌صورت فوق تعریف کرده‌اند. هنگامی که مجموعه مرجع X یک مجموعه متناهی (یا نامتناهی شمارا) به‌صورت $x_1, x_2, ..., x_n$ باشد، یک مجموعه فازی مانند $\tilde{A}$ از X به‌صورت زیر نشان داده می‌شود

$$\tilde{A} \quad = \quad \left\{\frac{\mu_{\tilde{A}}(x_1)}{x_1}, \frac{\mu_{\tilde{A}}(x_2)}{x_2}, \ldots, \frac{\mu_{\tilde{A}}(x_n)}{x_n}\right\}.$$

مثال ۶.۱ فرض کنید $X = \{1, 2, ..., 10\}$. یک مجموعه فازی $\tilde{A}$ از X را که نشان دهنده‌ی ویژگی «نه خیلی کوچک و نه خیلی بزرگ» باشد، می‌توان توسط تابع عضویت زیر تعریف کرد

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} 0/1 & x = 2 \\ 0/3 & x = 3 \\ 0/5 & x = 4 \\ 0/8 & x = 5 \\ 0/8 & x = 6 \\ 0/5 & x = 7 \\ 0/3 & x = 8 \\ 0/1 & x = 9 \\ 0 & x = 1, 10 \end{cases}$$

[5] Support

با استفاده از نمادی که در بالا اشاره شد، $\tilde{A}$ را می‌توان به صورت زیر نیز نوشت

$$\tilde{A} = \Big\{(۱,۰),(۲,۰/۱),(۳,۰/۳),...,(۹,۰/۱),(۱۰,۰)\Big\}.$$

مثال ۷.۱ فرض کنید $X = [۰,۱۰۰]$ و $x \in X$ به عنوان سن تلقی شوند. مجموعه فازی $\tilde{B}$ که پیری را نشان می‌دهد می‌تواند این‌گونه تعریف شود

$$\tilde{A} = \begin{cases} ۰ & x \leq ۵۰ \\ \frac{۱}{۱+(\frac{x-۵۰}{۵})^{-۲}} & ۵۰ < x \leq ۱۰۰ \end{cases}$$

که با نماد اشاره شده در بالا به‌صورت زیر بیان می‌شود

$$\tilde{A} = \int_{۵۰}^{۱۰۰} \frac{۱}{۱+(\frac{x-۵۰}{۵})^{-۲}}/x$$

در این مثال $suppÃ = (۵۰,۱۰۰]$. هم‌چنین $\sup \mu_{\tilde{A}}(x) = ۰/۹۹$، پس $\tilde{A}$ زیر نرمال است.

تعریف ۸.۱ زیر مجموعه (معمولی) عناصری از X را که درجه عضویت آن‌ها در مجموعه فازی $\tilde{A}$ حداقل به بزرگی α، $(\alpha > ۰)$ باشد، $\alpha-$برش (یا مجموعه تراز α وابسته به $\tilde{A}$) گوییم و با $\tilde{A}_\alpha$ نشان می‌دهیم. یعنی

$$\tilde{A}_\alpha = \Big\{x \in X| \ \ \mu_{\tilde{A}}(x) \geq \alpha\Big\}.$$

مثال ۹.۱ فرض کنید $X = \{۱,۲,\ldots,۱۰\}$ و زیر مجموعه‌ی فازی $\tilde{A}$ از X که نشان دهنده‌ی ویژگی «حدوداً سه» است، این‌گونه تعریف شود

$$\tilde{A} = \Big\{\frac{۰/۳}{۱}, \frac{۰/۷}{۲}, \frac{۱}{۳}, \frac{۰/۷}{۴}, \frac{۰/۳}{۵}\Big\}$$

در این‌صورت چند $\alpha-$برش $\tilde{A}$ عبارتند از

$$\tilde{A}_{۰/۱} = \{۱,۲,۳,۴,۵\} \qquad \tilde{A}_{۰/۳} = \{۱,۲,۳,۴.۵\}$$
$$\tilde{A}_{۰/۷} = \{۲,۳,۴\} \quad A_{۰/۸} = \{۳\} \quad \tilde{A}_۱ = \{۳\}.$$

به‌طور خلاصه می‌توان نوشت

$$\tilde{A}_\alpha = \begin{cases} \{۱,۲,۳,۴,۵\} & ۰ < \alpha \leq ۰/۳ \\ \{۲,۳,۴\} & ۰/۳ < \alpha \leq ۰/۷ \\ \{۳\} & ۰/۷ < \alpha \leq ۱ \end{cases}$$

تعریف ۱۰.۱ اگر $\tilde{A}$ یک مجموعه فازی باشد، آن‌گاه $\alpha\tilde{A}$ که در آن $\alpha \in [۰,۱]$ به‌صورت یک مجموعه فازی با تابع عضویت زیر تعریف می‌شود

$$\mu_{\alpha\tilde{A}}(x) = \alpha\mu_{\tilde{A}}(x).$$

قضیه ۱۱.۱ (اتحاد تجزیه)[٦] [۸۵] فرض کنید $\tilde{A}$ مجموعه‌ای فازی از $\mathbb{R}$ با تابع عضویت $\mu_{\tilde{A}}(.)$ باشد. در این‌صورت

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \sup_{\alpha\in[۰,۱]} \alpha.\, I_{\tilde{A}_\alpha}(x),$$

که در آن $I_{\tilde{A}_\alpha}(.)$ تابع مشخصه می‌باشد.

تعریف ۱۲.۱ [۸۲] مجموعه فازی $\tilde{A}$ از $X = \mathbb{R}$ را محدب[۷] گوییم، اگر هر $\alpha-$برش $\tilde{A}$ (برای تمامی $۰ < \alpha \leq ۱$) محدب باشد.

یک تعریف معادل برای تحدب در گزاره زیر داده شده است.

گزاره ۱۳.۱ [۸۲] مجموعه‌ی فازی $\tilde{A}$ از $X = \mathbb{R}$ محدب است اگر و تنها اگر برای هر $x_۱, x_۲ \in X$ و هر $\lambda \in [۰,۱]$

$$\mu_{\tilde{A}}\Big(\lambda x_۱ + (۱-\lambda)x_۲\Big) \geq \min\Big\{\mu_{\tilde{A}}(x_۱), \mu_{\tilde{A}}(x_۲)\Big\},$$

مثال ۱۴.۱ مجموعه‌ی فازی $\tilde{A}$ با تابع عضویت زیر را در نظر بگیرید

$$\mu_{\tilde{A}(x)} = e^{-\frac{x^۲}{۲}} \quad x \in \mathbb{R}$$

$\tilde{A}$ یک مجموعه‌ی فازی محدب است، زیرا برای هر $\alpha > ۰$ داریم

$$\begin{aligned}\tilde{A}_\alpha &= \Big\{x \in \mathbb{R} | \mu_{\tilde{A}}(x) \geq \alpha\Big\} = \Big\{x \in \mathbb{R} | e^{-\frac{x^۲}{۲}} \geq \alpha\Big\} \\ &= \Big\{x \in \mathbb{R} | -\sqrt{۲\ln\alpha} \leq x \leq \sqrt{۲\ln\alpha}\Big\}\end{aligned}$$

که به روشنی یک مجموعه‌ی محدب است.

---
[٦] Resolution Identity
[۷] Convex

مثال ۱۵.۱ فرض کنید مجموعه فازی $\tilde{C}$، نشان دهنده‌ی ویژگی «قدر مطلق عدد، نزدیک به $\frac{۱}{۲}$»، با تابع عضویت زیر تعریف شود

$$\mu_{\tilde{C}}(x) = \begin{cases} ۰ & x \leq -۱ \\ ۱ - ۴(x + \frac{۱}{۲})^۲ & -۱ < x \leq ۰ \\ ۱ - ۴(x - \frac{۱}{۲})^۲ & ۰ < x \leq ۱ \\ ۰ & x > ۱ \end{cases}$$

در این‌جا $\tilde{C}$ یک مجموعه فازی محدب نیست. زیرا $\alpha > ۰$ وجود دارد که $\tilde{C}_\alpha$ یک مجموعه معمولی محدب نیست (بلکه در این‌جابرای تمام $\alpha > ۰$، $\tilde{C}_\alpha$ها غیرمحدب‌اند). مانند حالت معمولی اگر $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$ دو مجموعه فازی محدب باشند، اشتراک آن‌ها نیز مجموعه فازی محدب است. درباره‌ی اجتماع این نتیجه برقرار نیست.

تعریف ۱۶.۱ فرض کنید $f(x)$ تابعی حقیقی مقدار بر $\mathbb{R}$ باشد. در این‌صورت f را نیم‌پیوسته بالایی [۸] گوییم هرگاه

الف) [۵۳] برای هر $\alpha \in (۰, ۱]$ مجموعه $\{x : f(x) \geq \alpha\}$ مجموعه‌ای بسته در $\mathbb{R}$ باشد.

یا به‌طور معادل

ب) [۵۲] $f(x)$ نیم‌پیوسته بالایی در y است هرگاه

$$\forall \varepsilon > ۰, \exists \delta > ۰ \quad s.t \ \ |x - y| < \delta \implies f(x) - f(y) < \varepsilon.$$

تعریف ۱۷.۱ [۳] مجموعه فازی $\tilde{A}$ از $\mathbb{R}$ را یک عددی فازی [۹] (حقیقی) گوییم هرگاه $\tilde{A}$ نرمال، تک‌نمایی و محدب و نیم‌پیوسته بالایی باشد.

مجموعه تمام اعداد فازی را با $\mathcal{F}_\mathbb{R}$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۱۸.۱ (اصل توسیع) [۱۰] [۲۷] فرض کنید $X_۱, ..., X_n$، n مجموعه مرجع، و $X = X_۱ \times ... \times X_n$ حاصل‌ضرب دکارتی آن‌ها باشد. هم‌چنین $\tilde{A}_۱, ..., \tilde{A}_n$، n مجموعه فازی به ترتیب از $X_۱, ..., X_n$ باشد. فرض کنید f یک نگاشت از X به Y باشد، یعنی $y = f(x_۱, ..., x_n)$. در این‌صورت حاصل عمل f بر n مجموعه فازی $\tilde{A}_۱, ..., \tilde{A}_n$ به‌عنوان یک مجموعه فازی $\tilde{B}$ از Y و به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$\begin{aligned} \tilde{B} &= f(\tilde{A}_۱, ..., \tilde{A}_n) \\ &= \Big\{(y, \mu_{\tilde{B}}(y) | y = f(x_۱, ..., x_n), (x_۱, ..., x_n) \in X)\Big\} \end{aligned}$$

---

۸ Upper Semicontinuous

۹ Fuzzy Number

۱۰ Extension Principle

که در آن

$$\mu_{\tilde{B}}(y) = \begin{cases} \sup_{y=f(x_1,...,x_n)} \ \min\left\{\mu_{\tilde{A}_1}(x_1), ..., \mu_{\tilde{A}_n}(x_n)\right\} & f^{-1}(y) \neq \emptyset \\ 0 & f^{-1}(y) = \emptyset \end{cases}$$

مثال ۱.۱۹ [۳] فرض کنید $X_1 = X_2 = \mathbb{Z}$ و $\tilde{A}_1$ و $\tilde{B}_1$ دو زیر مجموعه فازی از$\mathbb{Z}$ به ترتیب نمایشگر «تقریباً صفر» و «تقریباً یک» به صورت زیر باشند

$$\begin{aligned} \tilde{A}_1 &= \left\{\frac{0/2}{-2}, \frac{0/5}{-1}, \frac{1}{0}, \frac{0/5}{1}, \frac{0/2}{2}\right\} \\ \tilde{A}_2 &= \left\{\frac{0/2}{-1}, \frac{0/5}{0}, \frac{1}{1}, \frac{0/5}{2}, \frac{0/2}{3}\right\} \end{aligned}$$

فرض کنید تابع $f : X_1 \times X_2 \longrightarrow Y$ به صورت $y = f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$ تعریف شده باشد. دراین صورت

$$\tilde{A}_1 \times \tilde{A}_2 = \left\{\frac{0/2}{(-2,-1)}, \frac{0/2}{(-2,0)}, \ldots, \frac{1}{(0,1)}, \frac{0/5}{(0,2)}, \ldots, \frac{0/2}{(2,3)}\right\}$$

و بنابر اصل توسیع

$$\tilde{B} = f(\tilde{A}_1, \tilde{A}_2) = \left\{\frac{0/5}{0}, \frac{1}{1}, \frac{0/5}{2}, \frac{0/5}{4}, \frac{0/5}{5}, \frac{0/2}{8}, \frac{0/2}{9}, \frac{0/2}{10}, \frac{0/2}{13}\right\}.$$

تعریف ۱.۲۰ فرض کنید $I = [0, 1]$. یک تابع دو متغیره به صورت $T : I \times I \to I$ را یک T—نرم[11] گوئیم اگر در شرایط زیر صدق کند

الف) $T(x, 1) = x$.

ب) یکنوایی $x_1 \leq x_2, y_1 \leq y_2 \Longrightarrow T(x_1, y_1) \leq T(x_2, y_2)$.

پ) جابه‌جایی $T(x, y) = T(y, x)$.

ت) شرکت‌پذیری $T[x, T(y, z)] = T[T(x, y), z]$.

مثال ۱.۲۱ $T(x, y) = \min(x, y)$ و $T(x, y) = \max(0, x + y - 1)$ نمونه‌هایی از T—نرم هستند.

[11] T-Norm

تعریف ۲۲.۱ [۲۷] فرض کنید $\tilde{M}, \tilde{N} \in F(\mathbb{R})$ و $\star : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ یک عملگر دوتایی [۱۲] بر اعداد حقیقی باشد. اگر تعمیم $\star$ را برای اعداد فازی با $\odot$ نمایش دهیم، با استفاده از اصل گسترش حاصل $\tilde{M} \odot \tilde{N}$ به‌صورت یک مجموعه فازی با تابع عضویت زیر تعریف می‌شود

$$(\tilde{M} \odot \tilde{N})(z) = \sup_{z=x\star y} T[\tilde{M}(x), \tilde{N}(y)]$$

که در آن T، یک T−نرم است. بنابراین تعمیم چهار عمل اصلی برای اعداد فازی با استفاده ازT−نرم min به‌صورت زیر درمی آید

$$\begin{aligned}
(\tilde{M} \oplus \tilde{N})(z) &= \sup_{z=x+y} \min[\tilde{M}(x), \tilde{N}(y)] \\
(\tilde{M} \ominus \tilde{N})(z) &= \sup_{z=x-y} \min[\tilde{M}(x), \tilde{N}(y)] \\
(\tilde{M} \otimes \tilde{N})(z) &= \sup_{z=x\times y} \min[\tilde{M}(x), \tilde{N}(y)] \\
(\tilde{M} \oslash \tilde{N})(z) &= \sup_{z=x/y\ ,\ y\neq 0} \min[\tilde{M}(x), \tilde{N}(y)]
\end{aligned}$$

قضیه ۲۳.۱ فرض کنید $\tilde{M}$ و $\tilde{N}$ دو عدد فازی مثبت باشند در این‌صورت $\tilde{M} \oplus \tilde{N}$، $\tilde{M} \ominus \tilde{N}$، $\tilde{M} \otimes \tilde{N}$ و $\tilde{M} \oslash \tilde{N}$ نیز اعداد فازی می‌باشند.

تعریف ۲۴.۱ فرض کنید $\odot_{int}$، یک عملگر دوتایی $\oplus_{int}$ ، $\ominus_{int}$، $\otimes_{int}$ یا $\oslash_{int}$ بین دو بازه‌ی $\tilde{M}_\alpha = [\tilde{M}^L_\alpha, \tilde{M}^U_\alpha]$ و $\tilde{N}_\alpha = [\tilde{N}^L_\alpha, \tilde{N}^U_\alpha]$ باشد، در این‌صورت $\tilde{M}_\alpha \odot_{int} \tilde{N}_\alpha$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\tilde{M}_\alpha \odot_{int} \tilde{N}_\alpha = \left\{ z \in \mathbb{R} \quad | \quad z = x \circ y, \forall\, x \in \tilde{M}_\alpha, \forall\, y \in \tilde{N}_\alpha \right\}$$

که در آن $\circ$ یک عملگر دوتایی معمولی $+$،$-$،$\times$ یا$/$ می باشد.

قضیه ۲۵.۱ [۳۶] (الف) اگر $\tilde{a}$ و $\tilde{b}$ دو عدد فازی باشند، آن‌گاه

$$(\tilde{a} \oplus \tilde{b})_\alpha = [\tilde{a}^L_\alpha + \tilde{b}^L_\alpha, \tilde{a}^U_\alpha + \tilde{b}^U_\alpha], \quad (\tilde{a} \ominus \tilde{b})_\alpha = [\tilde{a}^L_\alpha - \tilde{b}^U_\alpha, \tilde{a}^U_\alpha + \tilde{b}^L_\alpha].$$

(ب) اگر $\tilde{a}$ و $\tilde{b}$ دو عدد فازی باشند، آن‌گاه

$$(\tilde{a} \otimes \tilde{b})_\alpha = \left[\min\left\{ \tilde{a}^L_\alpha \tilde{b}^L_\alpha, \tilde{a}^L_\alpha \tilde{b}^U_\alpha, \tilde{a}^U_\alpha \tilde{b}^L_\alpha, \tilde{a}^U_\alpha \tilde{b}^U_\alpha \right\}, \max\left\{ \tilde{a}^L_\alpha \tilde{b}^L_\alpha, \tilde{a}^L_\alpha \tilde{b}^U_\alpha, \tilde{a}^U_\alpha \tilde{b}^L_\alpha, \tilde{a}^U_\alpha \tilde{b}^U_\alpha \right\} \right].$$

[۱۲] Binary Operation

اعداد فازی LR، نوعی خاص از اعداد فازی هستند که ویژگی آن‌ها در توابع عضویت آن‌هاست. اعمال جبری براین نوع اعداد فازی بسیار ساده و دارای یک الگوی مشخص است.

تعریف ۲۶.۱ (اعداد فازی LR)[۲۷] اگر عدد فازی $\tilde{A}$ دارای تابع عضویتی با تعریف زیر باشد

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} L(\frac{m-x}{\alpha}) & x \leq m \\ \\ R(\frac{x-m}{\beta}) & x > m \end{cases}$$

که در آن L و R توابعی غیر صعودی از $\mathbb{R}^+$ به $[0, 1]$ هستند و $L(0) = R(0) = 1$؛ آن‌گاه $\tilde{A}$ را یک عدد فازی LR نامیده و با نماد $\tilde{A} = (m, \alpha, \beta)_{LR}$ نمایش می‌دهیم. عدد m را مقدار نمایی (میانه) و اعداد مثبت α و β را به ترتیب پهنای چپ و پهنای راست $\tilde{A}$ می‌نامیم. L و R توابع مرجع (شکل) نامیده می‌شوند.

تعریف ۲۷.۱ فرض کنید $\tilde{A} = (m, \alpha, \beta)_{LR}$ و $L = R$. در این‌صورت اگر

$$L(x) = \max\{0, 1 - x\} = \begin{cases} 1 - x & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{سایر جاها} \end{cases}$$

$\tilde{A}$ را یک عدد فازی مثلثی[۱۳] نامیده و با $\tilde{A} = (m, \alpha, \beta)_T$ نشان می‌دهیم.

۱—۲ نظریه‌ی قابلیت اعتماد

تحقیق در زمینه‌ی قابلیت اعتماد با مساله‌ی تعمیر و نگهداری ماشین ها در اواخر دهه‌ی ۱۹۳۰ وجایگزینی لامپ‌های روشنایی خیابان دراوایل دهه‌ی ۱۹۴۰ آغاز شد. جنگ جهانی دوم و ساخت ابزارهای پیچیده‌ی نظامی باعث شد تا مدل‌سازی قابلیت اعتماد سیستم‌ها مورد توجه قرار گیرد. در دهه‌ی ۵۰ همزمان با ابداع سیستم‌های الکترونیکی، مطالعات در مورد قابلیت اعتماد وارد مراحل تازه‌ای شد. دهه‌ی ۶۰ با آغاز عصر فضا و پیشرفت‌های صنایع فضایی، تحقیق و پژوهش در زمینه‌ی قابلیت اعتماد گسترش بیشتری یافت، در این میان نقش آماردانان نیز بسیار برجسته بود. در همین سال‌ها اولین کتاب در این زمینه توسط بازوفسکی[۱۰] و همچنین اولین شماره‌ی نشریه‌ی "*IEEE Transaction on Reliability*" منتشر شد. در دهه‌های ۷۰ و ۸۰ میلادی همزمان با پیشرفت صنایع پتروشیمی و تکنولوژی راه‌آهن، اتومبیل‌سازی و سدسازی از تکنیک‌های آماری به طور وسیعی در

[۱۳] Triangular

قابلیت اعتماد استفاده گردید. همچنین در طراحی انواع سیستم‌های صنعتی، روش‌های قابلیت اعتماد بکار گرفته شد و در دهه‌ی ۹۰ با پیشرفت صنعت بیمه و مسائل رقابتی، مباحث قابلیت اعتماد به علوم پزشکی نیز وارد شد.
در ادامه تعاریف مقدماتی این نظریه را مرور می‌کنیم.

تعریف ۲۸.۱ (موجود)[۱۴] هر آن چه که بررسی طول عمر و قابلیت اعتماد آن می تواند اهمیت داشته باشد را یک موجود می نامیم. یک موجود می تواند یک انسان باشد و یا یک سیستم پیچیده الکترونیکی و یا یک جزء کوچک از یک سیستم.

تعریف ۲۹.۱ (زمان بقا)[۱۵] زمان بقا یا طول عمر یک موجود که با T نمایش داده می شود، فاصله بین زمان شروع به کار موجود تا زمان خرابی آن می باشد و یک متغیر تصادفی نامنفی است.

تعریف ۳۰.۱ (توزیع طول عمر)[۱۶] توزیع طول عمر یک توزیع پیوسته برای متغیر نامنفی T می‌باشد و کاربرد آن در مدل‌سازی داده‌های مربوط به زمان بقای موجودات است.

تعریف ۳۱.۱ (تابع قابلیت اعتماد)[۱۷] قابلیت اعتماد[۱۸] یک موجود برابر با احتمال آن است که موجود کار معینی را تحت شرایط مشخص در فاصله زمانی $(0,t)$ به طور رضایت‌بخش انجام دهد. اگر متغیر تصادفی T نشانگر طول عمر موجود باشد در این صورت تابع قابلیت اعتماد یا تابع بقا[۱۹] به صورت زیر تعریف می‌شود

$$R(t) = P(T > t) = \int_t^{\infty} f(u)du = \overline{F}(t), \qquad (1)$$

که $f(t)$ تابع چگالی طول عمر موجود است. اگر $F(t)$ توزیع تجمعی مربوط به طول عمر این موجود باشد، قابلیت اعتماد یک موجود برابر با $1 - F(t)$ است. تابع $F(t)$، تابع عدم اعتماد[۲۰] نامیده می شود و معادل با احتمال آن است که موجود در فاصله زمانی $(0,t)$ خراب شود.

واضح است که $R(0) = 1$ و $R(\infty) = 0$ به عبارتی موجود در زمان صفر(شروع) حتماً سالم است و در زمان های خیلی بزرگ احتمال سالم بودن موجود صفر می باشد. واضح است که تابع قابلیت اعتماد، تابعی غیر صعودی از زمان است.

[۱۴] Entity
[۱۵] Survival Time or Life Time
[۱۶] Life Time Distribution
[۱۷] Reliability Function
[۱۸] Reliability
[۱۹] Survival Function
[۲۰] Unreliability

تعریف ۳۲.۱ (خرابی)[۲۱] خرابی یا شکست یک موجود معادل است با متوقف شدن توانایی موجود برای انجام کار معین تحت شرایط مشخص.

تعریف ۳۳.۱ (نرخ خرابی)[۲۲] نرخ خرابی یا تابع شکست[۲۳] که با $h(t)$ نشان داده می شود، برابر است با احتمال آن که موجود در فاصله بسیار کوچک بعد از t خراب شود به شرط آنکه تا زمان t سالم باشد. به بیان دیگر

$$h(t) = \lim_{\triangle t \to 0} \frac{P(t < T < t + \triangle t | T > t)}{\triangle t}$$

$$= \lim_{\triangle t \to 0} \frac{F(t + \triangle t) - F(t)}{\triangle t R(t)} = \frac{f(t)}{R(t)} \qquad (۲)$$

هر تابع $h(t)$ که دارای شرایط زیر باشد یک تابع نرخ خرابی به حساب می آید.

الف) $\forall t, h(t) \geq 0$

ب) $\lim_{x \to \infty} \int_{\infty}^{x} h(t)dt = 0$

ج) $\lim_{x \to \infty} \int_{-\infty}^{x} h(t)dt = \infty$

تعریف ۳۴.۱ (متوسط زمان کارکرد تا خرابی)[۲۴] متوسط زمان کارکرد تاخرابی که با $MTTF$ نشان داده می شود، برابر با میانگین طول عمر موجود است و به زبان ریاضی به صورت زیر بیان می شود

$$MTTF = E(T) = \int_{0}^{\infty} t \ f(t) \ dt$$

با توجه به مثبت بودن مقادیر مشاهدات مربوط به طول عمر T، رابطه زیر نتیجه می گردد

$$E(T) = \int_{0}^{\infty} P(T > t)dt = \int_{0}^{\infty} R(t)dt. \qquad (۳)$$

مثال ۳۵.۱ فرض کنید طول عمر یک قطعه دارای توزیع وایبل با تابع چگالی زیر است

$$f_T(t; \alpha, \beta) = \frac{\beta}{\alpha} \left(\frac{t}{\alpha}\right)^{\beta - 1} e^{-\left(\frac{t}{\alpha}\right)^{\beta}}, \quad t \geq 0, \ \alpha > 0, \ \beta > 0.$$

[۲۱] Failure
[۲۲] Failure Rate
[۲۳] Failure Function
[۲۴] Mean Time To Failure