بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه شهید بهشتی

تاریخ ....

شماره ....

پیوست ....

«بسمه تعالی»

«صورتجلسه دفاع از پایان نامه دانشجویان دوره کارشناسی ارشد»

ران ۱۹۸۳۹۶۳۱۱۳ اوین
فن: ۲۹۹۰۱

بازگشت به مجوز دفاع شماره ۱۶۰۰/۲۰۰/پ مورخ ۸۹/۴/۱۸ جلسه هیأت داوران ارزیابی پایان نامه کارشناسی ارشد **آقای امیرحسین مختاری** به شماره شناسنامه: **۳۷۷** صادره از : **حوزه ۵ مشهد** متولد: **۱۳۶۴/۶/۳۰** دانشجوی دوره کارشناسی ارشد **ریاضی محض**

با عنوان:

منظم بودن آرنز ضرب‌های مدولی

به راهنمایی: آقای دکتر سید علیرضا حسینیون

طبق دعوت قبلی در تاریخ **۸۹/۴/۲۹** تشکیل گردید و بر اساس رأی هیأت داوری و با عنایت به ماده ۲۰ آئین نامه کارشناسی ارشد مورخ ۷۵/۱۰/۲۵ پایان نامه مزبور با نمرهٔ **۱۸/۷۵ (هیجده و هفتاد و پنج صدم)** و درجه **عالی** مورد تصویب قرار گرفت.

	مرتبه علمی	نام دانشگاه	امضاء
۱. **استاد راهنما:** آقای دکتر سید علیرضا حسینیون	استاد	شهید بهشتی	
۲. **استاد مشاور:** آقای دکتر داود ابراهیمی بقاء			
۳. **استاد داور:** آقای دکتر مجید اسحاقی گرجی	دانشیار	سمنان	
۴. **استاد داور:** خانم دکتر مونا نبیعی	استادیار	شهید بهشتی	
۵. **مدیر گروه:** آقای دکتر سهرابعلی یوسفی	دانشیار	شهید بهشتی	

تقدیم به

پدر و مادر عزیز به خاطر محبت‌ها و فداکاری‌های بی‌دریغشان

قدردانی و تشکر

سپاس بیکران پروردگار را که به انسان قدرت اندیشیدن بخشید.

در اینجا بر خود لازم می‌دانم که سپاس و قدردانی خود را نسبت به راهنمایی‌ها و محبت‌های استاد ارجمندم آقای دکترسید علیرضا حسینیون ابراز دارم و بدینوسیله زحمات و الطاف ایشان را ارج نهم.

ازجناب آقای دکتر داوود ابراهیمی بقا که در این پایان نامه‌بامشاوره‌های راه‌گشای خود اینجانب رایاری رساندند تشکر می‌کنم .

از جناب آقای دکتر مجید اسحاقی گرجی و خانم دکتر مونا نبیعی که داوری پایان‌نامه را بر عهده گرفتند، متشکرم.

چکیده

ضرب یک جبر باناخ را می‌توان به دو ضرب دیگر طوری تعمیم داد که دوگان دوم این فضای باناخ با هر یک از این دو ضرب تبدیل به یک جبر باناخ گردد و در صورتی‌که در یک جبر باناخ این دو ضرب بر هم منطبق شوند، آن جبر را آرنز منظم می‌نامیم. به‌علت کاربردهای فراوان دوگان دوم جبرهای باناخ و اهمیت آن‌ها در انتقال خواص از یک جبر به دوگان دومش و برعکس، این موضوع تاکنون در چندین مقاله مورد بررسی قرار گرفته است.
در این پایان‌نامه به ارتباط بین آرنز منظم بودن(قوی-نامنظم آرنز بودن) یک جبر باناخ با آرنز منظم بودن(قوی-نامنظم آرنز بودن) اعمال مدولی اش روی دوگان nام آن می‌پردازیم و دسته‌ای از جبرهای باناخی که قوی-نامنظم آرنز چپ هستند ولی قوی-نامنظم آرنز راست نیستند را معرفی می‌کنیم و در پایان مراکز توپولوژی دوگان دوم جبرهای باناخ مثلثاتی را تعیین می‌کنیم.

واژه‌های کلیدی: آرنز منظم،اولین مرکز توپولوژیکی،دومین مرکز توپولوژیکی، قوی-نامنظم آرنز، اولین ضرب آرنز، دومین ضرب آرنز .

پیشگفتار

در سال‌های ۱۹۵۱ و ۱۹۵۳، *R.Arens* در دو مقاله ضرب یک جبرباناخ را به دو ضرب دیگر طوری تعمیم داد که دوگان دوم این فضای باناخ با هر یک از این دو ضرب تبدیل به جبرباناخ گردید. این دو ضرب در بسیاری از جبرهای باناخ بر یکدیگر منطبق نمی شوند و هرگاه این دو ضرب به ازاء جبرباناخ A بریکدیگر منطبق شوند، A را آرنزمنظم می‌نامیم. به علت کاربردهای فراوان دوگان دوم جبرهای باناخ و اهمیت آنها در انتقال خواص از یک جبر به دوگان دومش و برعکس ، این موضوع تاکنون در چندین مقاله مورد بررسی قرار گرفته‌است.

در این پایان‌نامه به عوض ضرب‌های جبرباناخ ، ضرب‌های مدولی یک جبرباناخ را بایک فضای باناخ دیگر در نظر می گیریم و درباره دوگان دوم جبرباناخ حاصل به کمک ضرب‌های مدولی تعریف شده بحث می‌نماییم.

پایان‌نامه از مقاله '**Arens regularity of module actions**' استخراج شده‌است که توسط **M.Eshaghi** و **M.Filali** در سال ۲۰۰۷ در مجله **STUDIA MATHEMATICA** منتشرشده‌است. این مقاله اولین و کاملترین مقاله در این مورد است و مقاله اصلی این پایان‌نامه نیز می‌باشد.

در فصل اول این پایان‌نامه ابتدا تعاریف و قضیه های مقدماتی مورد نیاز را بیان می‌کنیم که این تعاریف و قضایا از سه مرجع $[D]$و $[B-D]$ و$[D-H]$ اختیار شده است.

درفصل دوم ثابت می‌کنیم که به ازای هر جبرباناخ A که دارای همانی تقریبی راست

کراندار (همانی تقریبی چپ کراندار) است، عمل مدولی راست (چپ) A روی A^*منظم آرنز است اگر و تنها اگر A انعکاسی باشد. این قضیه شامل نتایجی می‌شود که$Arikan$ در $[Ar]$ و $\ddot{U}lger$ در$[U1]$ و $Velasco$ در $[D-R-V]$ قبلا ثابت کرده‌اند.

در فصل سوم نشان می‌دهیم که اگر جبرباناخ A یک همانی تقریبی راست کراندار(یا یک همانی تقریبی چپ کراندار) داشته‌باشد و به ازاء عدد صحیح $K \geq 1$ عمل مدولی چپ A روی $A^{(2K)}$ ($A^{(2K-1)}$) منظم آرنز باشد آنگاه A منظم آرنز است و همچنین ثابت می‌کنیم که اگر A دارای همانی تقریبی راست کراندار (همانی تقریبی چپ کراندار) و قوی—نامنظم آرنزچپ (راست) باشد ، آن‌گاه به ازاء عدد طبیعی K ،عمل مدولی چپ (راست) A روی $A^{(2K)}$ ($A^{(2K-1)}$) قوی—نامنظم آرنز است.

در فصل چهارم ثابت می‌کنیم که A منظم آرنز است هرگاه A^* فاکتورشود و A یک ایده آل چپ در A^{**} باشد. اگر A^{**} (به عنوان یک A- مدول باناخ) فاکتور شود و A یک ایده آل راست در A^{**} باشد ، نتیجه مشابهی به دست می‌آید. در این فصل ارتباط بین فاکتورشدن A^{**} با نقاط ضعیف—ستاره تجمعی همانی تقریبی کراندار A در A^{**} را نشان می‌دهیم .

در فصل پنجم مثالی که قهرمانی و همکارانش در $[Gh-M-M]$ آوردند را به کار می گیریم و یک دسته از جبرهای باناخی که قوی—نامنظم آرنز چپ هستند ولی قوی—نامنظم آرنز راست نیستند را معرفی می‌کنیم . این دسته مثال ارائه شده، مثال‌های $Dales$ و Lau در $[D-L, Exp.4.5]$ را شامل می‌شود. بالاخره مثال ساده‌ای از جبرهای باناخی که نه منظم آرنز و نه قوی—نامنظم آرنز چپ هستند ، ارائه می‌دهیم .مثال دیگری از این نوع جبرها توسط $Saghafi$ در $[S]$ ارائه‌شده‌است.

در فصل ششم مراکز توپولوژی دوگان دوم جبرهای باناخ مثلثی که منظم آرنز بودن آن‌ها توسط $Forrest$ و $Marcoux$ در$[F-M]$ بررسی شده‌است را تعیین می‌کنیم. از این مراکز توپولوژیکی برای اثبات عبارت‌های زیر استفاده می‌کنیم.

i) شرط $A^*A = AA^*$ برای داشتن $Z(A^{**}) = Z^t(A^{**})$ کافی نیست.

ii) شروط $Z(A^{**}) = Z^t(A^{**})$ و $A^*A = A^*$ برای داشتن $AA^* = A^*$ کافی نیست.

iii) جبرباناخ A موجوداست آنچنان که قوی–نامنظم آرنز است ولی دنباله‌ای ضعیف کامل نیست.

⋮

⋮

فهرست مندرجات

فصل ۱

تعاریف و قضایای مقدماتی

در این فصل تعاریف، گزاره‌ها، قضایا و نتایجی که در فصلهای آینده به آنها نیاز داریم را بیان خواهیم کرد. و برهان برخی از آن‌ها را که اساسی بوده و در ضمن خیلی طولانی نیست و یا مرجعی برای آنها نیافته‌ایم، خواهیم آورد و در بقیه موارد اثبات را به مراجع مورد استفاده ارجاع خواهیم داد.

۱.۱ تعاریف و مطالب مورد نیاز

تعریف ۱.۱ فضای برداری A را روی میدان $\mathbb{F}$ (که $\mathbb{C}$ یا $\mathbb{R}$ است) یک جبر می‌گوییم هرگاه نگاشت $(a,b)\longmapsto ab$ از $A\times A$ به A موجود باشد به طوری‌که به ازاء هر $a,b,c\in A$ و $\alpha\in\mathbb{F}$ داشته باشیم

i) $a(bc)=(ab)c$

ii) $a(b+c)=ab+ac \quad \& \quad (a+b)c=ac+bc$

iii) $(\alpha a)b=\alpha(ab)=a(\alpha b)$

جبر A را روی میدان $\mathbb{F}$ یک جبرنرمدار گوییم هر گاه A مجهز به نرم $\|.\|: A\longmapsto \mathbb{R}^{+}\cup\{0\}$ باشد که به ازای هر $a,b\in A$ داشته‌باشیم

$$\|ab\|\leq \|a\|\ \|b\|$$

و جبر نرمدار A را جبرباناخ گوییم هرگاه به عنوان یک فضای نرمدار، کامل باشد.

تعریف ۲.۱ فرض کنیم A یک جبر روی میدان $\mathbb{F}$ و M نیز یک فضای برداری روی میدان $\mathbb{F}$ باشد. M را A- مدول چپ گوییم هرگاه نگاشت $(a,m)\longmapsto am$ از $A\times M$ به M موجود باشد به طوری که در شرایط زیر صدق کند

i) به ازای هر $a\in A$، نگاشت $m\longmapsto am$ روی M خطی باشد.

ii) به ازای هر $m\in M$، نگاشت $a\longmapsto am$ روی A خطی باشد.

iii) $a_1(a_2m)=(a_1a_2)m \qquad (a_1,a_2\in A, m\in M)$

M را یک A- مدول راست گوییم هرگاه نگاشت $(a,m)\longmapsto ma$ از $A\times M$ به M موجود باشد به طوری که در شرایط زیر صدق کند

i) به ازای هر $a\in A$، نگاشت $m\longmapsto ma$ روی M خطی باشد.

ii) به ازای هر $m \in M$، نگاشت $a \longmapsto ma$ روی A خطی باشد.

iii) $(a_1, a_2 \in A, m \in M) \qquad (ma_1)a_2 = m(a_1 a_2)$

M را یک A- دومدول گوییم هرگاه M یک A- مدول چپ و یک A- مدول راست باشد و داشته باشیم

$$a(mb) = (am)b \qquad (a, b \in A, m \in M)$$

تعریف ۳.۱ فرض کنید A یک جبر نرمدار روی میدان $\mathbb{F}$ و M یک فضای نرمدار روی میدان $\mathbb{F}$ باشد.

M را یک A- مدول چپ نرمدار گوییم هرگاه M یک A- مدول چپ باشد و $K > 0$ موجود باشد به طوری که

$$\|am\| \leq K\|a\|\|m\| \qquad (a \in A, m \in M)$$

M را یک A- مدول چپ باناخ گوییم هرگاه M یک A مدول چپ نرمدار و یک فضای باناخ نیز باشد.

M را یک A- مدول راست نرمدار گوییم هر گاه M یک A- مدول راست باشد و $K > 0$ موجود باشد به طوری که

$$\|ma\| \leq K\|a\|\|m\| \qquad (a \in A, m \in M)$$

M را یک A- مدول راست باناخ گوییم هرگاه M یک A- مدول راست نرمدار و یک فضای باناخ نیز باشد.

M را یک A- دومدول نرمدار گوییم هرگاه M یک A- مدول راست نرمدار و یک A- مدول چپ نرمدار باشد.

M را یک A- دومدول باناخ گوییم هرگاه M یک A- مدول راست باناخ و یک A- مدول چپ باناخ باشد.

مثال ۱.۱ فرض کنیم A یک جبر نرمدار باشد.

i) A با ضرب جبری یک A- دومدول نرمدار است.

ii) در صورتی که ضرب جبری A را ضرب مدولی در نظر بگیریم، هر ایده‌آل چپ A یک A- مدول چپ نرمدار است و هر ایده‌آل راست A یک A- مدول راست نرمدار است.

iii) فرض کنیم L یک ایده‌آل چپ بسته A باشد. رابطه " $\sim$ " روی A را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$a \sim b \Longleftrightarrow a - b \in L$$

" $\sim$ " یک رابطه هم‌ارزی است، بنابراین A را به کلاس های هم‌ارزی مجزا تقسیم می‌کند. کلاس هم‌ارزی $a \in A$ را با $[a]$ نمایش می‌دهیم یعنی

$$[a] = \{x \in A, x \sim a\}$$

حال مجموعه کلاس‌های هم‌ارزی روی A را با $A - L$ نمایش می‌دهیم. $A - L$ با نرم زیر یک فضای نرمدار است.

$$\|[a\ ]\| = inf\{\|a + x\|; x \in L\} \qquad (a \in L)$$

قرار می‌دهیم $X = A - L$ و نگاشت $a \longmapsto [a]$ از A به X را نگاشت کانونی می‌نامیم. در این صورت فضای خطی نرمدار X، یک A- مدول چپ نرمدار با ضرب مدولی

$$ax := [ab] \qquad (b \in x \in X, a \in A)$$

می‌باشد. به طور مشابه به ازای هر ایده‌آل راست بسته J از A، $A - J$ یک A- مدول راست نرمدار می‌باشد. $[B - D, chapter I, Exp13]$

تعریف ۴.۱ مجموعه همه تابعک های خطی و کراندار با اعمال نقطه‌ای روی فضای نرمدار A را با A^* نمایش می‌دهیم و این فضا همراه با نرم $\|f\| = sup\{\|f(x)\|; \|x\| \leq ۱, f \in A^*\}$ یک فضای باناخ می‌باشد که آن را دوگان A می‌نامیم. به همین صورت مجموعه همه تابعک

های خطی و کراندار با اعمال نقطه‌ای روی فضای نرمدار A^* را با A^{**} نمایش می‌دهیم و این فضا همراه با نرم $\|F\| = sup\{\|F(f)\|; \|f\| \leq ۱, F \in A^{**}\}$ یک فضای باناخ می‌باشد که آن را دوگان دوم A می‌نامیم. با تکرار این روند می‌توان به ازای $n \geq ۲$، $A^{(n+۱)}$ را به صورت $(A^n)^*$ تعریف کرد.

تعریف ۵.۱ فرض کنیم A یک جبرباناخ باشد. عنصر φ از A^* را ضربی می‌گوییم هرگاه برای هر $a, b \in A$ داشته‌باشیم

$$\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$$

فضای تمام تابعک‌های خطی و ضربی روی A را با ϕ_A نشان می‌دهیم و هر عضو آن را یک مشخصه روی A می‌نامیم.

تعریف ۶.۱ فرض می‌کنیم A یک فضای باناخ باشد. در این صورت کوچکترین توپولوژی روی A که نسبت به آن تمام $f \in A^*$ پیوسته‌باشد را توپولوژی ضعیف القاشده از A^* به A می‌گوییم که اصطلاحا آن را توپولوژی ضعیف روی A می‌نامیم و آن را با علامت $\sigma(A, A^*)$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۷.۱ اگر A یک فضای باناخ باشد آن‌گاه نگاشت $a \longmapsto \hat{a}$ از A به A^{**} با ضابطه

$$\hat{a}(f) := f(a) \quad (a \in A, f \in A^*)$$

را نگاشت کانونی از A به A^{**} می‌گوییم.

در ضمن اگر A یک فضای نرمدار باشد نگاشت کانونی یک طولپا است. به عبارت دیگر برای هر $a \in A$ داریم

$$\|\hat{a}\| = \|a\|$$

تعریف ۸.۱ فرض کنیم A یک جبرباناخ و $\pi : A \to A^{**}$ نگاشت کانونی باشد. $\hat{A} := \pi(A) = \{\hat{a}; a \in A\}$ قرار می‌دهیم. در این صورت کوچکترین توپولوژی روی A^* که نسبت به آن هر $\hat{a} \in \hat{A}$ پیوسته‌باشد را توپولوژی ضعیف القاشده از $\hat{A}$ به A^* یا اصطلاحا توپولوژی ضعیف—ستاره روی A^* می‌گوییم. این توپولوژی روی A^* را با علامت $\sigma(A^*, A)$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۹.۱ فرض کنید A یک جبرباناخ باشد و $a, b \in A$ و $f \in A^*$ و $F, G \in A^{**}$. عناصر af و fa را در A^* به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$< fa, b >:=< f, ab > ،< af, b >:=< f, ba >$$

و عناصر fF و Ff را در A^* به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$< fF, a >:=< F, af > ،< Ff, a >:=< F, fa >$$

همچنین FG و $F.G$ را در A^{**} به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$< F.G, f >:=< G, fF > ،< FG, f >:=< F, Gf >$$

در این صورت A^{**} نسبت به هر یک ازدو ضرب بالا یک جبرباناخ است.$[D - H]$

تعریف ۱۰.۱ با فرض اینکه $F, G \in A^{**}$ ضرب FG را اولین ضرب آرنز FوG و ضرب $F.G$ را دومین ضرب آرنز روی F و G می‌نامیم.

جبرباناخ A را منظم آرنز می‌گوییم هرگاه برای هر $F, G \in A^{**}$ داشته‌باشیم

$$FG = F.G$$

تعریف ۱۱.۱ فرض کنیم A یک جبرباناخ باشد. $f \in A^*$ را به طور ضعیف تقریبا متناوب گوییم هرگاه نگاشت $b \longmapsto fb$ فشرده‌باشد (که این معادل فشردگی نگاشت $b \longmapsto bf$ می‌باشد) و زیرفضای A^* شامل تمام تابعک های به طور ضعیف تقریبا متناوب را $WAP(A)$ می‌نامیم.

لم ۱.۱ فرض کنیم A یک جبرباناخ باشد. تور $\{G_\lambda\}_{\lambda\in I} \subseteq A^{**}$ به G, $weak^*$- همگرا است اگر و فقط اگر به ازای هر $f \in A^*$، تور $\{G_\lambda(f)\}_{\lambda\in I}$ به Gf همگرا باشد.

لم ۲.۱ فرض کنیم A یک جبرباناخ و $\pi : A \to A^{**}$ نگاشت کانونی روی A باشد. در این صورت به ازای هر $a \in A$ و $f \in A^*$ و $F \in A^{**}$ داریم

$$fa = f\pi(a) \qquad af = \pi(a)f$$

$$fF\ a = f\ F\pi(a) \qquad a\ Ff = \pi(a)F\ f$$

$$F\pi(a) = F.\pi(a) \qquad \pi(a)F = \pi(a).F$$

برهان. اثبات در $[D-H]$ آمده است.□

لم ۳.۱ فرض کنیم A یک جبرباناخ باشد. به ازای هر $G \in A^{**}$ نگاشت‌های $F \longmapsto FG$ و $F \longmapsto G.F$ روی A^{**} ضعیف—ستاره پیوسته‌اند.$[D-H]$

لم ۴.۱ اگر A یک جبرباناخ باشد. احکام زیر با هم معادلند.

i) A منظم آرنز است.

ii) به ازای هر $F \in A^{**}$ نگاشت $G \longmapsto FG$ ضعیف — ستاره پیوسته است.

iii) به ازای هر $F \in A^{**}$ نگاشت $G \longmapsto G.F$ ضعیف — ستاره پیوسته است.

برهان. اثبات در $[D-H, Thm ۱]$ آمده‌است.□

تعریف ۱۲.۱ تور $\{e_\alpha\}_{\alpha\in I}$ (I مجموعه اندیس گذار) در جبرباناخ A همانی تقریبی چپ نامیده می‌شود هرگاه به ازای هر $x \in A$ داشته باشیم

$$||e_\alpha a - a|| \longrightarrow ۰$$

و همانی تقریبی چپ $\{e_\alpha\}_{\alpha\in I}$ را کراندار گوییم در صورتی که عدد $M > ۰$ موجود باشد به طوری که به ازای هر $\alpha \in I$ داشته باشیم

$$||e_\alpha|| \leq M$$

همانی تقریبی راست و همانی تقریبی راست کراندار به طریق مشابه تعریف می‌شود. همانی تقریبی (همانی تقریبی کراندار) برای جبرA تور $\{e_\alpha\}_{\alpha\in I}$ منی‌باشد به طوری که این تور همانی تقریبی راست (همانی تقریبی راست کراندار) و همانی تقریبی چپ (کراندار) باشد.

تعریف ۱۳.۱ همانی تقریبی چپ ضعیف برای جبر A تور $\{e_\alpha\}_{\alpha\in I}$ می‌باشد به طوری که به ازای هر $f\in A^*, x\in A$ داشته باشیم

$$f(e_\alpha x) \to f(x)$$

همانی تقریبی چپ ضعیف کراندار و همانی تقریبی راست ضعیف (کراندار) و همانی تقریبی ضعیف (کراندار) نیز به طور مشابه تعریف می‌شوند.

لم ۵.۱ فرض کنیم $\{x_\alpha\}_{\alpha\in I}$ یک تور در جبرباناخ A باشد. در این صورت به ازای هر $f\in A^*$،

$$\lim_\alpha f(x_\alpha) = f(x)$$

اگر و تنها اگر $\{x_\alpha\}_{\alpha\in I}$ به طور ضعیف به x همگرا باشد.$[D-H]$

لم ۶.۱ جبرباناخ A همانی ضعیف راست دارد اگر و تنها اگر A^{**} با اولین ضرب آرنز همانی راست داشته‌باشد.$[B-D]$

لم ۷.۱ فرض کنیم X یک فضای نرمدار باشد، در این صورت هر تابعک خطی F روی X^* ضعیف—ستاره پیوسته است اگر و تنها اگر $F\in \hat{X}=\{\hat{x}; x\in X\}$. $[D-S]$

تعریف ۱۴.۱ گروه G را گروه توپولوژیکی می‌نامیم هرگاه

i) G یک فضای هاسدورف باشد.

ii) نگاشت $xy^{-1} \longmapsto (x,y)$ از $G\times G$ به G پیوسته‌باشد.

تعریف ۱۵.۱ فضای توپولوژیکی X را موضعا فشرده نامیم هرگاه برای هر $x \in X$ همسایگی U از x موجود باشد به طوری‌که بستار U در X فشرده‌باشد.

تعریف ۱۶.۱ گروه توپولوژیکی G را گروه موضعا فشرده نامیم هرگاه توپولوژی روی G موضعا فشرده‌باشد.

تعریف ۱۷.۱ فرض کنیم m یک اندازه هارپایای چپ روی گروه موضعا فشرده G باشد. مجموعه توابع اندازه پذیر $f : G \longmapsto \mathbb{C}$ روی گروه موضعا فشرده G آن‌طور که داشته‌باشیم

$$||f||_۱ := \int_G |f(t)|\, dm(t) < \infty$$

همراه با عمل زیر یک جبرباناخ تشکیل می‌دهد $[B-D, Exp.۲۰]$ که آن را گروه جبری $(L^۱(G))G$ می‌نامیم.

$$(f*g)(t) = \int_G f(s)g(s^{-۱}t)\, dm(s)$$

لم ۸.۱ گزاره های زیر به ازای هر گروه موضعا فشرده G با هم معادلند.

i) $L^۱(G)$ منظم آرنز است.

ii) $L^۱(G)$ انعکاسی است.

iii) G متناهی است.

برهان. اثبات در $[Y, Thm۱]$ آمده‌است.□

تعریف ۱۸.۱ یک برگشت روی جبر A یک نگاشت $* : A \longmapsto A$ است به طوری‌که به ازای هر $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ و $a, b \in A$ داشته باشیم

$$(\alpha a + \beta b)^* = \overline{\alpha} a^* + \overline{\beta} b^* \qquad (۱.۱)$$

$$(a^*)^* = a \qquad (۲.۱)$$

$$(ab)^* = b^* a^* \qquad (۳.۱)$$

تعریف ۱۹.۱ یک جبرباناخ A همراه با یک برگشت (نگاشت $* : A \longmapsto A$) C^*- جبر نامیده می‌شود هرگاه

$$||aa^*|| = ||a||^۲ \quad (a \in A)$$

لم ۹.۱ یک C^*- جبر انعکاسی است اگر و تنها اگر از بعد متناهی باشد.$[D-R-V]$

لم ۱۰.۱ اگر تور $\{e''_\alpha\}_{\alpha\in I}$ به e'' در A^{**} همگرا باشد آن‌گاه به ازای هر $a' \in A^*$ داریم

$$< e''_\alpha, a' > \longrightarrow < e'', a' >$$

برهان. تور $\{e''_\alpha\}_{\alpha\in I}$ به e'' همگراست بنابراین $e''_\alpha \xrightarrow{weak^*} e''$ با توجه به لم (۱.۱۳) به ازای هر $a' \in A^*$ داریم

$$. < e''_\alpha, a' > \longrightarrow < e'', a' > \quad \square$$

تعریف ۲۰.۱ فرض کنیم X و Y و Z فضاهای نرمدار و نگاشت $f : X \times Y \longmapsto Z$ دو خطی و پیوسته‌باشد، در این صورت می‌گوییم نگاشت f فاکتور می‌شود هرگاه f پوشا باشد.

تعریف ۲۱.۱ فرض کنیم A یک جبر باشد. طیف A را مجموعه تمام $\varphi \in A^*$ تعریف می‌کنیم به طوری که $\varphi \neq ۰$ و به ازای هر $a, b \in A$ داشته باشیم

$$\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$$

لم ۱۱.۱ فرض کنیم A یک جبرباناخ یکدار جابجایی باشد در این صورت طیف A ناتهی است.$[R, Thm.11.5.a]$

گسترش نگاشت‌های دوخطی روی فضاهای نرمدار و مفهوم منظم بودن نگاشت‌های دوخطی برای اولین بار توسط ریچارد آرنز در سال ۱۹۵۱ معرفی شد.

در این پایان‌نامه فضای باناخ را با تصویرش تحت نگاشت کانونی در دوگان دومش یکی می‌گیریم.