دانشگاه تبریز
دانشکده فیزیک
گروه نظری

پایان‌نامه
برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشتهٔ فیزیک نظری

عنوان
تقارن پاریته- زمان

استاد راهنما
دکتر حسین فخری

استاد مشاور
دکتر علیرضا چناقلو

۱۳۸۷ /۱۲/ ۵

پژوهشگر
تایماز قانع

شهریور ۸۶

شماره

۹۶۹۴۷

تقدیر و تشکر

بهترین آرزوهایم را نثار پدر و مادر فداکارم می‌دارم که حمایت بی‌دریغشان هیچگاه قابل جبران نیست و همسر مهربانم که همواره مدیون خوبی‌هایش هستم.

وظیفهٔ خویش می‌دانم نهایت قدردانی صمیمانه و قلبی خود را از استاد راهنمای دلسوز، جناب آقای دکتر فخری، الگوی انسانیت و اخلاق‌علمی که پس از بزرگواری، توان علمی ایشان به حق مثال‌زدنی است، ابراز دارم. کسب علم و بهره‌مندی از محضر دوستانهٔ ایشان موجب افتخار بندهٔ حقیر بوده است.

همچنین از اساتید گرامی، دکتر علیرضا چناقلو، استاد مشاور و دکتر کمال‌الدین سیدیعقوبی، استاد داور این پایان‌نامه که در نهایت بزرگواری قبول زحمت نمودند، کمال تشکر را دارم.

در انتها، یاد و خاطرهٔ استاد جوان، شادروان دکتر مجید ابولحسنی، را گرامی می‌دارم که خنده‌های صاف و ساده‌اش هرگز از ذهنم و غم از دست رفتنش هرگز از وجودم پاک نخواهد شد.

نام خانوادگی: قانع خشکبیجاری نام: تایماز

عنوان پایان‌نامه: تقارن پاریته-زمان

استاد راهنما: دکتر حسین فخری

استاد مشاور: دکتر علیرضا چناقلو

مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد رشته: فیزیک گرایش: نظری دانشگاه: تبریز

دانشکده: فیزیک تاریخ فارغ‌التحصیلی: ۸۶/۶/۳۱ تعداد صفحه: ۱۳۱

کلید واژه‌ها: تقارن پاریته- زمان ، شبه- هرمیتی ، کوازی- هرمیتی

چکیده

هامیلتونی های غیر هرمیتی در زمینه های متعددی مانند فیزیک هسته ای، نظریهٔ میدانهای کوانتومی، فیزیک ماده چگال و زیست‌شناسی کاربرد یافته است. یک زیر کلاس از چنین هامیلتونی‌هایی شامل عملگرهای ناوردا تحت عمل پاریته ($\mathcal{P}\ : x \to -x,\ p \to -p$) و معکوس زمانی ($\mathcal{T}: x \to x,\ p \to -p,\ i \to -i$) می‌باشد ، که علاقه مندی زیادی را به خود جلب کرده است. یک دلیل اصلی چنین توجهی حقیقی بودن ویژه مقادیر حالتهای مقید هامیلتونی‌های مذکور است. یک دیدگاه دیگر به این مسئله سعی در پاسخگویی به این سوال اساسی است : شرایط لازم و کافی برای حقیقی بودن طیف یک عملگر چیست؟ پاسخ به این سوال نیازمند فهم دقیق ساختار ریاضی مکانیک کوانتومی دارای تقارن $\mathcal{PT}$ و ارتباط آن با مفهومی جدید به نام خاصیت شبه-هرمیتی است.

فهرست مطالب

فهرست اشکال و جداول

مقدمه

در سه سال اخیر شاهد اشتیاقی رو به افزایش در زمینهٔ هامیلتونی‌های غیرهرمیتی با طیف حقیقی بوده‌ایم [۲۸-۶]. با استناد به نتایج مطالعات عددی گوناگون، بندر و همکارانش[۶،۹] مثالهایی مشخص از هامیلتونی‌های غیرهرمیتی یک‌بعدی یافتند که دارای طیفی حقیقی بودند. از آنجا که این هامیلتونی‌ها تحت تبدیلات پاریته-زمانی ناوردا بودند، خواص طیفی آنها به تقارن پاریته- زمانی‌شان ربط داده شد.

برای بیان ارتباط میان حقیقی بودن طیف و تقارن نسبت به یک عملگر ضدخطی همچون $\mathcal{PT}$ ، فرض کنید H هامیلتونی سیستم و A یک عملگر ضدخطی جابه‌جاشونده با H باشد. ویژه‌کت مشترک A, H را ***در صورت وجود*** با $|E,a\rangle$ نمایش می‌شود. داریم:

$$H\mathrm{A}\,|E,a\rangle = H\,\mathrm{a}|E,a\rangle = \mathrm{a}\,E\,|E,a\rangle$$
$$\mathrm{A}H\,|E,a\rangle = \mathrm{A}E|E,a\rangle = E^{*}\mathrm{a}|E,a\rangle$$

$$\xrightarrow{[H,A]=0} \quad (E - E^{*})\,\mathrm{a}|E,a\rangle = 0 \quad \Rightarrow \quad \forall a \neq 0 : E = E^{*}$$

اما حداکثر نتیجه‌ای که از تحلیل فوق می‌توان گرفت این است که کت‌های مشترک A, H در صورت وجود دارای مقادیر ویژهٔ حقیقی برای H هستند؛ یا به بیان دیگر تنها برای ویژه‌مقادیری از H که حقیقی باشند، کت‌ویژهٔ مشترک وجود دارد.

همچنین به خوبی می‌دانیم که اگر یک هامیلتونی رابطهٔ

$$[H,A]=0 \qquad (۱)$$

را به ازای هر عملگر ضدخطی A برآورده کند، آنگاه

$$HA|E,a\rangle = AH|E,a\rangle \Rightarrow HA|E,a\rangle = AE|E,a\rangle$$
$$\Rightarrow H(A|E,a\rangle) = E^*(A|E,a\rangle)$$

بدین معنی که اگر E ویژه مقداری از H با امتداد ویژهٔ $|E,a\rangle$ باشد، E^* نیز ویژه مقداری از H با امتداد ویژهٔ $A|E,a\rangle$ خواهد بود.

بنابراین:

ویژه مقادیر H یا حقیقی خواهند بود و یا بصورت جفت‌های مزدوج یکدیگر ظاهر خواهند شد.

دلیل اصلی علاقه‌مندی اخیر به موضوع تقارن پاریته-زمانی [۳۸-۳۶،۵۴،۵۳،۲۴،۲۲-۱۴،۱۱-۶] نیز همین است.

علاوه بر این، یک ویژه مقدار از H حقیقی خواهد بود منوط بر اینکه ویژه بردار مربوطه تحت اثر A ناوردا باشد،

$$\left.\begin{array}{l} HA|E,a\rangle = E^*A|E,a\rangle \\ H|E,a\rangle = E|E,a\rangle \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{If } A|E,a\rangle=|E,a\rangle} E = E^*$$

یعنی رابطهٔ (۱) بهمراه

$$H|E\rangle = E|E\rangle \qquad (۲)$$

و

$$A|E\rangle = |E\rangle \qquad (۳)$$

تقاضا می‌کند که $E \in \mathbb{R}$. بنابراین به عنوان یک حالت خاص، یک هامیلتونی با تقارنی ضدخطی دارای طیفی حقیقی خواهد بود، هر گاه تقارن کامل باشد، بدین معنی که $\begin{cases}[H,A]=0 \\ A|E\rangle = |E\rangle\end{cases}$.

هدف یافتن ساختاریست بنیادی که مسئول حقیقی‌بودن طیف یک هامیلتونی غیرهرمیتی باشد.

طبق تعریف، یک هامیلتونی دارای تقارن پاریته-زمانی دارای یک تقارن داده شده توسط عملگر ضدخطی $\mathcal{PT}$ است، بدین معنی که شرط زیر را برآورده می‌کند:

$$(\mathcal{PT})H(\mathcal{PT})^{-1} = (\mathcal{PT})H(\mathcal{PT}) = H \qquad (٤)$$

که $\mathcal{P},\mathcal{T}$ به ترتیب عملگرهای تبدیلات پاریته و معکوس‌زمانی هستند و بصورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\begin{aligned} &\mathcal{P}\,\mathrm{x}\,\mathcal{P} = -\mathrm{x} \quad , \quad \mathcal{P}\,\mathrm{p}\,\mathcal{P} = -\mathrm{p} \\ &\mathcal{T}\,\mathrm{x}\,\mathcal{T} = \mathrm{x} \quad , \quad \mathcal{T}\,\mathrm{p}\,\mathcal{T} = -\mathrm{p} \\ &\mathcal{T}\,\mathrm{i}1\,\mathcal{T} = -\mathrm{i}1 \end{aligned} \qquad (٥)$$

که $\mathrm{x,p,1}$ به ترتیب، عملگرهای مکان، تکانه و همانی، عمل‌کننده در فضای هیلبرت $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R})$ (فضای برداری مجهز به ضرب داخلی با نرمی حقیقی برای بردارها) هستند و $\mathrm{i} := \sqrt{-1}$. توجه کنید که روابط (٥) تنها برای سیستمهایی که مکان کلاسیکی x وتکانهٔ p آنها حقیقی‌اند بکار برده می‌شود. فعلا در این مرحله از بحث، تنها با چنین سیستمهایی سروکار خواهیم داشت.

در اینجا لازم است به نکات زیر توجه کنیم:

$$\begin{aligned} (٥) \Rightarrow\ & \mathrm{x}\,\mathcal{P} = -\mathcal{P}^{-1}\mathrm{x} \ \Rightarrow\ \mathrm{x}\,\mathcal{P}\,|x'\rangle = -\mathcal{P}^{-1}\mathrm{x}\,|x'\rangle \\ \Rightarrow\ & \mathrm{x}|-x'\rangle = -x'\,\mathcal{P}^{-1}|x'\rangle \ \Rightarrow\ -x'\,|-x'\rangle = -x'\,\mathcal{P}^{-1}|x'\rangle \\ \Rightarrow\ & -x'\ \mathcal{P}\,|x'\rangle = -x'\,\mathcal{P}^{-1}|x'\rangle \ \Rightarrow\ \mathcal{P} = \mathcal{P}^{-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (٥) \Rightarrow\ & \mathrm{p}\,\mathcal{T} = -\mathcal{T}^{-1}\mathrm{p} \ \Rightarrow\ \mathrm{p}\,\mathcal{T}\,|p'\rangle = -\mathcal{T}^{-1}\mathrm{p}|p'\rangle \\ \Rightarrow\ & \mathrm{p}|-p'\rangle = -\mathcal{T}^{-1}\,p'\,|p'\rangle \ \Rightarrow\ -p'\,|-p'\rangle = -p'\,\mathcal{T}^{-1}\,|p'\rangle \\ \Rightarrow\ & -p'\ \mathcal{T}\,|p'\rangle = -p'\,\mathcal{T}^{-1}|p'\rangle \ \Rightarrow\ \mathcal{T}\,|p'\rangle = \mathcal{T}^{-1}|p'\rangle \\ \xrightarrow[|\alpha\rangle = \int dp'|p'\rangle\langle p'|\alpha\rangle]{}\ & \mathcal{T}\,|\alpha\rangle = \mathcal{T}^{-1}|\alpha\rangle \ \Rightarrow\ \mathcal{T} = \mathcal{T}^{-1} \end{aligned}$$

$$(۵)\quad \Rightarrow \begin{array}{l} \mathcal{T}\mathcal{P}\,p\,\mathcal{P}\mathcal{T} = -\mathcal{T}p\mathcal{T} = -(-p) = p \\ \mathcal{P}\mathcal{T}p\,\mathcal{T}\mathcal{P} = -\mathcal{P}p\mathcal{P} = -(-p) = p \end{array} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{P}\mathcal{T} = \mathcal{T}\mathcal{P}$$

بنابراین رابطهٔ (٤)را می‌توان بدین شکل نوشت:

$$(\mathcal{P}\mathcal{T})\, H\, (\mathcal{P}\mathcal{T})^{-1} = \mathcal{T}(\mathcal{P}\, H\, \mathcal{P}^{-1})\mathcal{T}^{-1} = H$$

برقراری رابطهٔ فوق مشروط بر این است که $V(x)$ زوج باشد که بتواند خواست زیر را برآورده کند:

$$(\mathcal{P}\mathcal{T})\, V(x)\, (\mathcal{P}\mathcal{T})^{-1} = \mathcal{P}(\mathcal{T}\, V(x)\mathcal{T}^{-1})\, \mathcal{P}^{-1} = V(-x) = V(x)$$

همانگونه که در فوق اشاره شد، تنها دلیل برای ارتباط دادن مفهوم تقارن پاریته- زمانی و هامیلتونی‌های غیرهرمیتی با طیفی حقیقی این است که بسیاری از مثالهای شناخته شدهٔ اخیر، روابط (٤) را برآورده می‌کنند. مسلماً هامیلتونی‌هایی هرمیتی با طیفی حقیقی نیز وجود دارند که تقارن پاریته- زمانی ندارند و همچنین هامیلتونی‌هایی با تقارن پاریته- زمانی نیز وجود دارند که فاقد یک طیف حقیقی‌اند. بنابراین برای اینکه یک هامیلتونی طیفی حقیقی داشته باشد، تقارن پاریته- زمانی نه یک شرط لازم است و نه کافی. این موضوع این احتمال را به ذهن می‌آورد که تقارن پاریته- زمانی یک هامیلتونی هیچ ارتباطی با حقیقی بودن طیف آن ندارد. به نظر می‌آید که علاقه‌مندی به تقارن مذکور بیشتر به جهت فقدان یک چهارچوب کاری جا افتاده بوده است که بتواند جایگزین هرمیتی بودن هامیلتونی در مکانیک کوانتومی معمول(یکانی) گردد (مکانیک کوانتومی یکانی، مکانیک کوانتومی است که در آن کلیهٔ تبدیلات به‌غیراز عملگر تصویرگر[١] یکانی‌اند). بسیاری از کارهای به چاپ رسیده در باب این

[١] Projection operator

موضوع به مطالعهٔ مثالهای گوناگون و توسعهٔ مفاهیم گسترش یافته برای هامیلتونی‌های هرمیتی به هامیلتونی‌های دارای تقارن پاریته- زمانی می‌پردازد[۲۵-۶] .

در سری مقالات اخیر [۳-۱] یک ساختار ریاضی پایه به عنوان مسئول خواص طیفی فریبندهٔ سیستم‌های $\mathcal{PT}$- متقارن معین معلوم شده است[۶۴،۹-۶] . عنصر اصلی منجر شدهٔ به نتایج[۳-۱] و انشعابات آنها [۶۶،۶۵،۵۴،۵۳،۴] مفهوم یک عملگر شبه- هرمیتی است که در بسیار مورد توجه این پایان‌نامه است.

فصل ۱- بررسی منابع (پایه‌های نظری و پیشینهٔ پژوهش)

۱-۱- خاصیت شبه-هرمیتی

ابتدا چند تعریف ارائه می‌شود. در طول این بحث فرض خواهیم نمود که تمام فضاهای ضرب داخلی، مختلط هستند. تعمیم روابط به فضاهای ضرب داخلی حقیقی سرراست است.

تعریف۱: فرض کنید $V_\pm$ دو فضای ضرب داخلی مجهز به خودریختی‌های خطی هرمیتی $\eta_\pm$ هستند، (بطوریکه $\eta_\pm$ عملگرهایی معکوس‌پذیرند که $V_\pm$ را به درون خودش می‌نگارند و رابطهٔ زیر را برآورده می‌سازند:

$$\forall v_\pm, w_\pm \in V_\pm \ , \quad (v_\pm, \eta_\pm w_\pm)_\pm = (\eta_\pm v_\pm, w_\pm)_\pm \ ،$$

که $(\,,)_\pm$ ضرب داخلی در $V_\pm$ است) و $O: V_+ \to V_-$ یک عملگر خطی‌ست؛

آنگاه الحاقی $\eta_\pm$-شبه هرمیتیِ $O^\#: V_- \to V_+$ از O، بصورت $O^\# := \eta_+^{-1} O^\dagger \eta_-$ تعریف می‌شود.

نکته: رابطهٔ فوق برای $\eta_\pm$ و ضرب داخلی $(\,,)_\pm$، برای $\eta_\pm^{-1}$ نیز برقرار است:

$$(\eta_\pm^{-1} v_\pm, w_\pm)_\pm \quad = (\eta_\pm^{-1} v_\pm, \eta_\pm \eta_\pm^{-1} w_\pm)_\pm = (\eta_\pm \eta_\pm^{-1} v_\pm, \eta_\pm^{-1} w_\pm)_+ \quad = (v_\pm, \eta_\pm^{-1} w_\pm)_\pm$$

همچنین می‌توان بدست آورد:

$$(\eta_\pm^{-1} v_\pm, \eta_\pm w_\pm)_\pm = (\eta_\pm \eta_\pm^{-1} v_\pm, w_\pm)_\pm = (v_\pm, w_\pm)_\pm$$

با توجه به تعریفی که از $O^{\#}$ ارائه شد ($O^{\#} := \eta_+^{-1} O^{\dagger} \eta_-$) و با یادآوری اینکه $\eta_- : V_- \to V_-$ ، $O^{\#}$ عملگریست که بر اعضای V_- اثر می‌کند؛ بنابر این $O^{\dagger}$ می‌بایست بصورت $O^{\dagger} : V_- \to V_+$ باشد. با استفاده از این نکته و رابطهٔ $O^{\#} := \eta_+^{-1} O^{\dagger} \eta_-$ می‌توان $O^{\dagger}$ را نتیجه‌ای از تعریف زیر دانست:

$$\big(\underbrace{v_-}_{\in V_-}, \underbrace{O w_+}_{\in V_-}\big)_- := \big(\underbrace{O^{\dagger} v_-}_{\in V_+}, \underbrace{w_+}_{\in V_+}\big)_+ \quad , \qquad \forall v_- \in V_-, w_+ \in V_+$$

همچنین طبق استدلال فوق:

$$O^{\#} v_- = \eta_+^{-1} \underbrace{v'_+}_{\in V_+} \quad \Rightarrow \quad O^{\#} : V_- \to V_+$$

نیز می‌توان $O^{\# \dagger}$ را محاسبه نمود:

$$\begin{aligned} \left(v_-, \eta_- O \eta_+^{-1} w_+\right)_- &= \left(\eta_- v_-, O \eta_+^{-1} w_+\right)_- \\ &= \left(O^{\dagger} \eta_- v_-, \eta_+^{-1} w_+\right)_+ \\ &= \left(\eta_+^{-1} O^{\dagger} \eta_- v_-, w_+\right)_+ \\ &= \left(O^{\#} v_-, w_+\right)_- \\ &= \left(v_-, O^{\# \dagger} w_+\right)_+ \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \qquad \eta_- O \eta_+^{-1} = O^{\# \dagger} \ : v_+ \to v_-$$

که از تعریف $O^{\dagger}$ و خواص تعریف‌شده برای $\eta_\pm^{-1}$ استفاده کردیم.

پس سرانجام می‌توان به دیاگرام زیر رسید:

$$\begin{tikzcd} V_+ \arrow[r, shift left, "O"] \arrow[d, "\eta_+"'] & V_- \arrow[l, shift left, "O^{\#}"] \arrow[d, "\eta_-"] \\ V_+ & V_- \arrow[l, "O^{\dagger}"'] \end{tikzcd}$$

< دیاگرام۱ >

این دیاگرام فلسفهٔ تعریف۱ را بهتر بیان می‌کند.

در حالت خاص برای $V_\pm = V$ و $\eta_\pm = \eta$، عملگر O، η- شبه هرمیتی گفته می‌شود هرگاه $O = O^\#$.

این موضوع مشابه تعریف عملگر هرمیتی در مکانیک کوانتومی معمول است که در آن عملگر O هرمیتی است هرگاه $O = O^\dagger$.

تعریف عملگر شبه- هرمیتی تنها در حالت خاص $V_\pm = V$ ممکن است، چراکه O و $O^\#$ بگونه‌ای متفاوت عمل می‌کنند:

$$O^\# : V_- \to V_+ \qquad , \qquad O : V_+ \to V_-$$

و در نتیجه تساوی $O = O^\#$ تنها هنگامی بامعنی است که داشته باشیم: $V_+ = V_-$.

بر این اساس تعریف زیر صورت می‌گیرد:

تعریف ۲: فرض کنید V یک فضای ضرب داخلی باشد، عملگر خطی $O : V \to V$ شبه-هرمیتی گفته می‌شود، هرگاه خودریختی خطی هرمیتی η چنان وجود داشته باشد که O، η-شبه هرمیتی باشد.

نکته:

$$O^\# := \eta^{-1} O^\dagger \eta \xrightarrow{IF\ O^\# = O} O := \eta^{-1} O^\dagger \eta$$

$$\Rightarrow \quad \eta O := \eta^{-1} O^\dagger$$

دیدیم که : $O^{\#\dagger} := \eta^{-1} O \eta \xrightarrow{IF\ O^\# = O} O^\dagger := \eta^{-1} O \eta$

نتیجهٔ فوق تحت عمل دِگَرگیری مجدداً به خودش تبدیل می‌شود. بنابراین اگر O، η-شبه هرمیتی باشد تعریف $O^\#$ $(O^\# := \eta^{-1} O^\dagger \eta)$ تحت دِگَرگرفتن ناوردا خواهد بود.

۲-۱- دستگاه دواورتونرمال[۲]

در مکانیک کوانتومی معمولی، از یک دستگاه اورتونرمال کامل برای توصیف هامیلتونی H سیستم استفاده می‌شود و هامیلتونی سیستم در پایهٔ ویژه‌کتهای انرژی دارای فرمی قطری خواهد بود:

$$H = \left(\sum_{n,a} |\psi_n, a\rangle\langle\psi_n, a|\right) H \left(\sum_{m,b} |\psi_m, b\rangle\langle\psi_m, b|\right)$$
$$= \sum_{n,m}\sum_{a,b} E_m\, |\psi_n, a\rangle \underbrace{\langle\psi_n, a|\psi_n, b\rangle}_{\delta_{nm}\delta_{ab}} \langle\psi_m, b| = \sum_{n,a} E_n |\psi_n, a\rangle\langle\psi_n, a|$$

در چنین حالتی $H^\dagger$ نیز در همین پایه دارای فرمی قطری بوده(و در نتیجه با H جابه‌جاپذیر است)، چرا که:

$$H = \sum_{n,a} E_n |\psi_n, a\rangle\langle\psi_n, a| \quad \Rightarrow \quad H^\dagger = \sum_{n,a} E_n{}^* |\psi_n, a\rangle\langle\psi_n, a|$$

مادامی که H هرمیتی باشد ($H = H^\dagger$) رابطهٔ فوق مشکلی ایجاد نمی‌کند. اما در صورتی که H هرمیتی نباشد، رابطهٔ فوق از این حیث که هیچ الزامی بر جابه‌جاشدن H با $H^\dagger$ وجود ندارد (مانند هامیلتونی $H_1 = p^2 + x^2 p$) محل اشکال است. در چنین مواردی از دستگاه‌های دواورتونرمال استفاده می‌کنند که در آنها H بر حسب دیادهای یکهٔ غیرهرمیتی بفرم $|\psi\rangle\langle\varphi|$ توصیف می‌شود($(|\psi\rangle\langle\varphi|)^\dagger = |\varphi\rangle\langle\psi| \neq |\psi\rangle\langle\varphi|$) :

$$H = \sum_{n,a} E_n |\psi_n, a\rangle\langle\varphi_n, a|$$

---
[۲] Biorthonormal

فرض کنید H یک هامیلتونی η-شبه‌هرمیتی با ویژه‌پایه‌های دواورتونرمال $\{|\psi_n,a\rangle,|\varphi_n,a\rangle\}$ وطیفی گسسته باشد[۳۱،۳۲] ، در اینصورت طبق تعریف:

$$H|\psi_n,a\rangle = E_n|\psi_n,a\rangle \qquad , \qquad H^{\dagger}|\varphi_n,a\rangle = F_n|\varphi_n,a\rangle$$
$$\langle\varphi_m,b\,|\psi_n,a\rangle = \delta_{mn}\delta_{ab}$$

طبق این روابط:

$$\begin{aligned}
H|\psi_n,a\rangle = E_n|\psi_n,a\rangle \qquad &\Rightarrow \langle\psi_n,a|H^{\dagger} = \langle\psi_n,a|E_n{}^*\\
&\Rightarrow \langle\psi_n,a|H^{\dagger}|\varphi_m,b\rangle = \langle\psi_n,a|E_n{}^*|\varphi_m,b\rangle\\
&\Rightarrow F_m\langle\psi_n,a\,|\varphi_m,b\rangle = E_n{}^*\langle\psi_n,a\,|\varphi_m,b\rangle\\
&\Rightarrow (F_m - E_n{}^*)\langle\psi_n,a\,|\varphi_m,b\rangle = 0\\
&\Rightarrow (F_m - E_n{}^*)\,\delta_{nm}\delta_{ab} = 0\\
&\Rightarrow F_n = E_n{}^*
\end{aligned}$$

همچنین:

$$H|\psi_n,a\rangle = E_n|\psi_n,a\rangle$$

$$\Rightarrow \sum_{m,b}|\psi_m,b\rangle\langle\varphi_m,b|H|\psi_n,a\rangle = \sum_{m,b}|\psi_m,b\rangle\langle\varphi_m,b|E_n|\psi_n,a\rangle$$

$$\Rightarrow \sum_{m,b}|\psi_m,b\rangle\langle\varphi_m,b|H|\psi_n,a\rangle = \sum_{m,b}|\psi_m,b\rangle\, E_n\delta_{mn}\,\delta_{ba}$$

$$\Rightarrow \sum_{m,b}|\psi_m,b\rangle\langle\varphi_m,b|H|\psi_n,a\rangle = E_n\,|\psi_n,a\rangle$$

$$\Rightarrow \sum_{m,b}|\psi_m,b\rangle\langle\varphi_m,b|H|\psi_n,a\rangle = H\,|\psi_n,a\rangle$$

$$\Rightarrow \sum_{m,b}|\psi_m,b\rangle\langle\varphi_m,b| = 1$$

$$\sum_{n}\sum_{a=1}^{dn}|\varphi_n,a\rangle\langle\psi_n,a| = \sum_{n}\sum_{a=1}^{dn}|\psi_n,a\rangle\langle\varphi_n,a| = 1$$

که d_n چندگانگی(درجه تبهگنی) ویژه مقدار E_n، و a,b اندیس های تبهگنی اند.

بنابراین بطور خلاصه یک دستگاه دواورتونرمال کامل از ویژه بردارهای $\{|\psi_n,a\rangle,|\varphi_n,a\rangle\}$ خواص تعریف شدهٔ زیر را برآورده می‌کند

$$H|\psi_n,a\rangle = E_n|\psi_n,a\rangle, \qquad H^\dagger|\varphi_n,a\rangle = E_n^*|\varphi_n,a\rangle \tag{٦}$$

$$\langle\varphi_m,b|\psi_n,a\rangle = \delta_{mn}\delta_{ab} \tag{٧}$$

$$\sum_n\sum_{a=1}^{d_n}|\varphi_n,a\rangle\langle\psi_n,a| = \sum_n\sum_{a=1}^{d_n}|\psi_n,a\rangle\langle\varphi_n,a| = 1 \tag{٨}$$

فصل ۲- مواد و روشها

۱-۲- شرط لازم برای حقیقی بودن طیف یک هامیلتونی غیر هرمیتی

۱-۱-۲- مقدمهٔ این بخش

در این بحث به معرفی نظریه شبه-هرمیتی پرداخته و نشان داده می‌شود که هر هامیلتونی دارای یک طیف حقیقی، شبه-هرمیتی است. به این موضوع اشاره می‌گردد که تمام هامیلتونی‌های غیرهرمیتی که تقارن پاریته-زمانی داشته و در این بحث مطالعه می‌شوند، به دسته هامیلتونی‌های شبه-هرمیتی تعلق دارند و در این مورد که شبه-هرمیتی بودن یک ساختار بنیادی مسئول خواص طیفی ویژهٔ این هامیلتونی‌هاست بحث می‌شود.خواص پایهٔ یک هامیلتونی شبه-هرمیتی کلی را پیدا کرده و مکانیک کوانتومی شبه-ابر تقارنی گسترش داده می‌شود و تعدادی مثال‌های آشنا از جمله هامیلتونی موسوم به معادلهٔ ویلر-دویت [۳] دو مولفه‌ای برای مدلهای جفت‌شده با یک میدان اسکالر جرم‌دار حقیقی و یک دسته از هامیلتونی‌های شبه-هرمیتی با طیفی حقیقی مورد مطالعه قرار می‌گیرد.

اخیراً ژوجیل[۲۶] ، جاپاریدزه[۲۷] ، کرشمر و زیمانوفسکی [۴] [۲۸] ، برخی از جنبه‌های اساسی‌تر در چهارچوب ساختار ریاضی و تعبیر مکانیک کوانتومی دارای تقارن$\mathcal{PT}$ را بررسی کرده‌اند.

در میان خواص مشترک تمام هامیلتونی‌های $\mathcal{PT}$- متقارن که تاکنون مورد مطالعه قرار گرفته‌اند، می‌توان به موارد زیر اشاره کرد:

---
۳ Wheeler-Dewitt
۴ Znojil, Japaridze, Kretschmer & Szymanowski