دانشگاه کردستان
دانشکده علوم پایه
گروه ریاضی

عنوان:

تقریب عناصر متناهی برای یک معادله تدریجی با یک عبارت حافظه از نوع مثبت

دانشجو:

فرزاد منصوری

استاد راهنما:

دکتر فردین ساعدپناه

استاد مشاور:

دکتر امجد علی‌پناه

پایان‌نامه کارشناسی ارشد رشته ریاضی کاربردی گرایش آنالیز عددی

اسفند ماه ۱۳۸۹

بسم الله الرحمن الرحیم

تقدیم به:

پدر ، مادر و همسر عزیزم

*****تعهد نامه*****

اینجانب فرزاد منصوری دانشجوی کارشناسی ارشد رشته ریاضی کاربردی گرایش آنالیز عددی دانشگاه کردستان، دانشکده علوم گروه ریاضی تعهد می‌نمایم که محتوای این پایان‌نامه نتیجه تلاش و تحقیقات خود بوده و از جایی کپی برداری نشده و به پایان رسانیدن آن نتیجه تلاش و مطالعات مستمر اینجانب و راهنمایی و مشاوره اساتید بوده است.

با تقدیم احترام

فرزاد منصوری

۱۳۸۹/۱۲/۱۷

قدردانی و تشکر

خداوند بزرگ را شکر می‌گویم که در سایه‌ی لطف و رحمتش توانستم این پایان‌نامه را به پایان برسانم. در نگارش این پایان‌نامه استادانی گرانمایه و دوستانی چند دخیل بودند و من وظیفه خود می‌دانم که از همه این عزیزان قدردانی و سپاسگزاری نمایم. از جمله آقای دکتر فردین ساعدپناه استاد راهنمایم که در طول این دوره زحمات بسیاری کشیده‌اند و نیز از آقایان دکتر امجد علی‌پناه، دکتر مراد احمدنسب و دکتر کمال شانظری که در دوره کارشناسی ارشد از راهنمایی‌های ارزنده این عزیزان بهره گرفته‌ام. همچنین از دوستان عزیزم آقایان ابوبکر آدربار، وریا رشیدی، محمدمهدی نیک‌مهر، فردین حسین‌پناهی و خانم‌ها شهلا ایزدی، فاطمه بابالو، الهام فیلی و تمامی عزیزانی که در این مسیر مرا یاری نمودند، تقدیر و تشکر می‌نمایم.

University of Kurdistan
Faculty of Science
Department of Mathematics

Title:

Finite element approximation of an evolution equation with a positive-type memory term

By:

Farzad Mansori

Supervisor:
Dr. Fardin Saedpanah

Advisor:
Dr. Amjad Alipanah

A Thesis
Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements for the Degree of
M. Sc. In Organic Mathematics

March, 08, 2011

Abstract

In this thesis, using finite element method, parapolic equations solution like heat equation and integro-differential equation has been presented. Some problems are presented, and variational formulation is done on them. Then variational formulation problem solution using continuous piecewise linear functions on domain triangulation has been approximated. Also error estimation for presented problems solution is studied.

Key Words: Finite Element Method, Parapolic Equations, Heat Equation, Variational Formulation, Domain Triangulation, Continuous Piecewise Linear Functions.

چکیده

در این پایان‌نامه با استفاده از روش عناصر متناهی به حل معادلات سهموی از جمله معادله گرما و معادله انتگرال-دیفرانسیل سهموی می‌پردازیم .معادلاتی را مطرح کرده و تغییر فرموله می‌دهیم، سپس جواب مسئله‌ی تغییر یافته را با استفاده از توابع پیوسته قطعه‌ای خطی که روی مثلث‌بندی دامنه مسئله تعریف می‌شوند تقریب می‌زنیم. همچنین پایداری و تخمین خطا را برای جواب مسائل مطرح شده، مورد بررسی قرار می‌دهیم.
واژه‌های کلیدی: روش عناصر متناهی، معادلات سهموی، معادله گرما، تغییر فرموله، مثلث‌بندی دامنه، توابع پیوسته قطعه‌ای خطی.

چکیده

در این پایان‌نامه با استفاده از روش عناصر متناهی به حل معادلات سهموی از جمله معادله گرما و معادله انتگرال-دیفرانسیل سهموی می‌پردازیم. معادلات مطرح شده را تغییر فرموله داده و سپس جواب مسأله‌ی تغییر یافته را با استفاده از توابع پیوسته قطعه‌ای خطی که روی مثلث‌بندی دامنه مسأله تعریف می‌شوند تقریب می‌زنیم. سپس پایداری و نخمین خطا را برای جواب مسائل مطرح شده مورد بررسی قرار می‌دهیم.

واژه‌های کلیدی: *معادله گرما، مثلث‌بندی، توابع پیوسته قطعه‌ای خطی، روش عناصر متناهی*

فهرست مطالب

فصل ۱

مقدمه

مسائل فیزیکی شامل بیش از یک متغیر را می‌توان با معادلات حاوی مشتقات جزئی بیان کرد، روش‌های زیادی برای حل این معادلات که به عنوان معادلات دیفرانسیل جزئی[۱] (PDE) معرفی می‌شوند، وجود دارد، از جمله می‌توان به روش‌های عناصر متناهی[۲] (FEM) و تفاضلات متناهی[۳] (FDM) اشاره کرد. روش عناصر متناهی یک تکنیک عددی برای پیدا کردن جواب‌های تقریبی (PDE) به صورت معادلات انتگرال می‌باشد. رویکرد جواب بر اساس انتقال دادن (PDE) به دستگاه تقریب معادلات دیفرانسیل معمولی می‌باشد. مزیت روش عناصر متناهی نسبت به روش تفاضلات متناهی سادگی نسبی آن در پرداختن به شرایط مرزی مسئله است. بسیاری از مسائل فیزیکی دارای شرایط مرزی هستند که شامل مشتقات جزئی می‌باشند و در حالت کلی مرز ناحیه تعریف شده آنها شکلی نامنظم دارد. پرداختن به شرایط مرزی با استفاده از تکنیک‌های تفاضلات متناهی بسیار مشکل است، زیرا هر شرط مرزی شامل یک مشتق، باید به وسیله یک خارج قسمت تفاضلی در نقاط شبکه‌ای تقریب زده شود، و شکل نامنظم مرز جا دادن نقاط شبکه‌ای را مشکل می‌کند، اما در روش عناصر متناهی، شرایط مرزی به صورت انتگرال‌های در یک تابع بیان می‌شوند، که این تابع مینیمم می‌گردد، پس اساس ساخت روند، مستقل

[۱] Partial differential equations
[۲] Finite element method
[۳] Finite defference method

از شرایط مرزی خاص مسئله است.

روش عناصر متناهی برای حل مسائل کشسانی (الاستیسیته[۴]) پیچیده و طرح محاسبات ساختمانی در مهندسی عمران و فضانوردی به وجود آمده است. استفاده این روش را در کارهای الکساندر هرینکوف[۵] در سال ۱۹۴۱ و ریچارد کارنت[۶] را در سال ۱۹۴۲ دید [؟]. رویکرد این پیشگامان در به کار بردن این روش، به طور چشمگیری متفاوت است، اما ویژگی مشترک آنها در گسسته‌سازی شبکه‌ای دامنه پیوسته، داخل یک مجموعه از زیردامنه‌های گسسته است، که اغلب عناصر نامیده می‌شود. در دهه ۱۹۵۰ توسعه روش عناصر متناهی برای مسائل ناشی شده از بدنه هواپیما و طرح محاسبات ساختمانی در مهندسی عمران را می‌توان در کارهای جان ارگریس[۷] و برکلی[۸] در دانشگاه ستوتگارت[۹] دید [؟]. کتاب «آنالیز روش عناصر متناهی» در سال ۱۹۷۳ توسط فیکس[۱۰] و سترانگ [۱۱] روش‌های عناصر متناهی را توسعه داد [؟].

در این پایان‌نامه روش عناصر متناهی را بر پایه‌ی گسسته‌سازی روی مکان و زمان، با استفاده از مثلث‌بندی دامنه، برای حل معادلات سهموی، از جمله معادله گرما و معادله تدریجی با یک عبارت حافظه از نوع مثبت به کار می‌بریم.

فصل دوم، شامل تعاریف و مقدمات مورد نیاز در این پایان‌نامه می‌باشد.

در فصل سوم، ابتدا یک مسئله نمونه را معرفی می‌کنیم و فرم ضعیف[۱۲] آن به دست می‌آوریم، سپس گسسته‌سازی را روی مکان و زمان بر اساس مثلث‌بندی روی دامنه مسئله اعمال می‌کنیم و جواب مسئله نمونه را با استفاده از عناصر متناهی تعریف شده روی مثلث‌بندی تقریب می‌زنیم. همچنین تخمین خطا را به صورت قضایای می‌آوریم.

در فصل چهارم، ابتدا معادله گرما را به صوت یک مسئله نمونه معرفی می‌کنیم و فرم ضعیف شده آن

[۴] Elasticity
[۵] Alexander Hrennikoff
[۶] Richard Courant
[۷] John Argyris
[۸] Berkeley
[۹] Stuttgart
[۱۰] Fix
[۱۱] Strang
[۱۲] Weak form

به دست می‌آوریم و آن را تقریب می‌زنیم، سپس تخمین خطا را برای آن در قضایای می‌آوریم. همچنین گسسته‌سازی را در بعد زمان به اختصار معرفی می‌کنیم.

در فصل چهارم، ابتدا معادله تدریجی با یک عبارت حافظه از نوع مثبت را به صوت یک مسئله نمونه معرفی می‌کنیم و فرم ضعیف شده آن را به دست می‌آوریم و گسسته‌سازی را در بعد مکان و زمان انجام می‌دهیم و آن را تقریب می‌زنیم سپس تخمین خطا را برای آن در قضایای می‌آوریم. همچنین رگیولاریتی[۱۳] را به اختصار ارائه می‌کنیم.

[۱۳] Regularity

فصل ۲

مفاهیم و تعاریف مقدماتی

در این فصل تعاریف و مفاهیم مقدماتی فضای ضرب داخلی، فضای نرم‌دار، فضای باناخ، فضای هیلبرت، فرمهای دوخطی، قضیه نمایش ریس، عملگرهای خطی و فضای سوبولوف را به اختصار بیان می‌کنیم. برای نوشتن این فصل از مراجع [؟] و [؟] استفاده شده است.

۱.۲ فضاهای باناخ

تعریف ۱. فضای برداری V مفروض است، تابع $\|\cdot\| : V \longmapsto [0, +\infty)$ را یک نرم می‌نامیم هرگاه ویژگی‌های زیر را داشته باشد

۱) به ازای هر $u \in V$، $\|u\| = 0$ اگر و فقط اگر $u = 0$

۲) به ازای هر $u \in V$ و هر $\alpha \in \mathbb{R}$، $\|\alpha u\| = |\alpha| \cdot \|u\|$

۳) به ازای هر $u, v \in V$، $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$.

اگر ویژگی (۱) برقرار نباشد آنگاه $\|\cdot\|$ را یک نیم‌نرم[1] گوئیم. ویژگی (۳) نامساوی‌مثلثی نام دارد و هم ارز با این گزاره است که به ازای هر $u, v, w \in V$

$$\|u - v\| \leq \|u - w\| + \|w - v\|.$$

فضای برداری V همراه با نرم $\|\cdot\|$ را یک فضای برداری نرم‌دار یا به اختصار، یک فضای نرم‌دار نامیم.

دو نرم $\|\cdot\|_a$ و $\|\cdot\|_b$ روی فضای برداری V هم‌ارزند هرگاه ثابت‌های مثبت c و C موجود باشند به طوری که

$$c\|\cdot\|_b \leq \|\cdot\|_a \leq C\|\cdot\|_b.$$

اگر V یک فضای برداری متناهی-البعد باشد همه نرم‌های روی V هم‌ارزند.

تعریف ۲. یک دنباله‌ی نامتناهی مانند $\{v_i\}_{i=۱}^{\infty}$ از فضای برداری V همگرا به $v \in V$ است، یا $\lim_{i\to\infty} v_i = v$ اگر

$$\lim_{i\to\infty} \|v_i - v\| = ۰,$$

و دنباله‌ی $\{v_i\}_{i=۱}^{\infty}$ از فضای برداری V را یک دنباله‌ی کوشی[2] می‌نامیم هرگاه

$$\lim_{i,j\to\infty} \|v_i - v_j\| = ۰.$$

هرگاه هر دنباله‌ی کوشی در فضای نرم‌دار V همگرا باشد، آن را یک فضای برداری کامل گوئیم.

تعریف ۳. فضای برداری نرم‌دار V را یک فضای باناخ[3] گوئیم هرگاه کامل باشد.

---
[1] Seminorm
[2] Cauchy sequence
[3] Banach space

۲.۲ فضاهای هیلبرت

تعریف ۴. یک تابعک خطی (فرم خطی) L روی فضای برداری V، تابع $L : V \longmapsto \mathbb{R}$ است به طوری که برای هر $u, v \in V$ و $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ داشته باشیم

$$L\big(\lambda u + \mu v\big) = \lambda L(u) + \mu L(v).$$

تعریف ۵. یک فرم دو خطی[۴] $a(\cdot,\cdot)$ روی فضای برداری V تابع $a : V \times V \longmapsto \mathbb{R}$ است، هرگاه نسبت به هر مولفه خطی باشد. به عبارت دیگر به ازای $u, v \in V$ و $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ داشته باشیم

$$a\big(\lambda u + \mu v, w\big) = \lambda a\big(u, w\big) + \mu a\big(v, w\big),$$
$$a\big(w, \lambda u + \mu v\big) = \lambda a\big(w, u\big) + \mu a\big(w, v\big).$$

فرم دوخطی $a(\cdot,\cdot)$ را متقارن گوئیم، هرگاه به ازای هر $v, w \in V$ داشته باشیم

$$a\big(v, w\big) = a\big(w, v\big),$$

و معین مثبت است، هرگاه به ازای هر $v \in V$ که $v \neq ۰$ داشته باشیم

$$a\big(v, v\big) > ۰.$$

تعریف ۶. فرم دوخطی $a(\cdot,\cdot)$ روی V ضرب داخلی است هرگاه معین مثبت و متقارن باشد. هر فضای برداری همراه با ضرب داخلی روی آن، یک فضای ضرب داخلی نامیده می‌شود. وقتی که به ضرب داخلی یا نرم یک فضا برداری مانند V اشاره می‌کنیم، در این حالت می‌نویسیم $(\cdot,\cdot)_V$ و $\|\cdot\|_V$، که در

[۴] Bilinear form

بیشتر موارد برای راحتی کار نماد $(\cdot,\cdot)$ و $\|\cdot\|$ را به کار می‌بریم.

فضای برداری V همراه با ضرب داخلی $(\cdot,\cdot)$ مفروض است، نرم متناظر با آن برای هر $v \in V$ به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\|v\|_V = (v,v)_V^{\frac{۱}{۲}}. \tag{۱.۲}$$

دو بردار u و v از فضای ضرب داخلی V بر هم عمودند هرگاه

$$(u,v) = ۰.$$

قضیه ۱.۲.۲. *فرض کنیم V یک فضای ضرب داخلی باشد، آنگاه به ازای هر $u, v \in V$ داریم*

$$|(u,v)| \leq \|u\| \; \|v\|,$$

که به نامساوی کوشی-شوارتز[۵] *معروف است و مساوی برقرار است اگر و تنها اگر $u = \lambda v$، که در آن $\lambda \in \mathbb{R}$.*

اثبات. برای هر $u, v \in V$ و $\alpha \in \mathbb{R}$، داریم

$$۰ \leq \|u-\alpha v\|^۲ = \big(u-\alpha v, u-\alpha v\big) = \big(u,u\big) - \alpha\big(u,v\big) - \alpha\big(v,u\big) + \alpha^۲\big(v,v\big).$$

اگر قرار دهیم $\alpha = \frac{(u,v)}{\|v\|^۲}$ بنابراین خواهیم داشت

$$\|u-\alpha v\|^۲ = \|u\|^۲ - \frac{(u,v)^۲}{\|v\|^۲} - \frac{(u,v)^۲}{\|v\|^۲} + \frac{(u,v)^۲}{\|v\|^۲}.$$

[۵] Cauchy-Schwarz

پس داریم

$$\circ \leq \|u-\alpha v\|^{۲} = \frac{\|u\|^{۲}\|v\|^{۲} - (u,v)^{۲}}{\|v\|^{۲}}.$$

بنابراین $|(u,v)| \leq \|u\| \, \|v\|$ و اثبات قسمت دوم بدیهی است، پس اثبات کامل می‌شود. $\square$

تعریف ۷. فضای ضرب داخلی V را یک فضای هیلبرت[۶] گوئیم هرگاه هر دنباله‌ی کوشی در آن همگرا باشد. فرض کنید V یک فضای هیلبرت و $V_\circ$ یک زیر فضای V باشد، گوئیم $V_\circ$ یک زیرفضای بسته است هرگاه شامل حد تمام دنباله‌های $\{v_j\}_{j=۱}^{\infty} \subset V_\circ$ باشد، یا به عبارت دیگر اگر $\{v_j\}_{j=۱}^{\infty} \subset V_\circ$ باشد و $\lim_{j\to\infty} v_j = v_\circ$ که این ایجاب می‌کند $v_\circ \in V_\circ$ است. بنابراین $V_\circ$ یک فضای هیلبرت با ضرب داخلی تعریف شده روی V است.

فرض می‌کنیم $V_\circ$ یک زیرفضای بسته V باشد، در اینصورت هر $v \in V$ را می‌توان به شکل منحصر بفردی به صورت $v = v_\circ + w$ نوشت، که در آن $v_\circ \in V_\circ$ و $w \in V$ بر $V_\circ$ عمود است، همچنین $v_\circ$ نزدیک‌ترین عضو در $V_\circ$ به v است، یعنی

$$\|v - v_\circ\| = \min_{u \in V_\circ} \|v - u\|,$$

که به قضیه تصویر[۷] معروف است و یک نتیجه اساسی در نظریه فضای هیلبرت می‌باشد. $v_\circ$ را تصویر متعامد v در $V_\circ$ می‌نامیم و با نماد $P_{V_\circ} v$ نشان داده می‌شود.

تعریف ۸. فرض کنید که V و W دو فضای برداری باشند. یک عملگر خطی مانند B، یک نگاشت از V به W است به طوری که به ازای هر $f, g \in V$ و $\lambda \in F$ داشته باشیم

$$B\big(\lambda f + g\big) = \lambda B(f) + B(g),$$

که در آن F می‌تواند $\mathbb{R}$ و $\mathbb{C}$ باشد.

[۶] Hilbert space
[۷] Projection theorem

تعریف ۹. فرض کنید V و W دو فضای هیلبرت باشند، در اینصورت عملگر $B : V \longmapsto W$ را کراندار گوئیم هرگاه وجود داشته باشد ثابت $C \in \mathbb{R}$ و $0 < C < \infty$، به طوری که

$$\|Bv\|_W \leq C\|v\|_V, \qquad \forall\, v \in V. \tag{۲.۲}$$

نرم عملگر خطی کراندار B به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\|B\| = \sup_{v \in V - \{0\}} \frac{\|Bv\|_W}{\|v\|_V}, \tag{۳.۲}$$

در نتیجه برای هر $v \in V$، $\|Bv\|_W \leq \|B\|\ \|v\|_V$. اگر $W = \mathbb{R}$ باشد، آنگاه عملگر B به تابعک خطی تقلیل داده می‌شود.

تعریف ۱۰. مجموعه تمام تابعک‌های خطی کراندار روی V را فضای دوگان[8] V می‌نامیم و با نماد V^* نشان می‌دهیم. با استفاده از (؟؟) نرم در V^* برای هر $L \in V^*$ به صورت زیر است

$$\|L\|_{V^*} = \sup_{v \in V - \{0\}} \frac{|L(v)|}{\|v\|_V}. \tag{۴.۲}$$

توجه داریم که V^* خود یک فضای خطی است، زیرابرای هر $L, M \in V^*$ و $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ داریم

$$(\lambda L + \mu M)(v) = \lambda L(v) + \mu M(v).$$

با استفاده از نرم تعریف شده در (؟؟) فضای خطی نرم‌دار است. فضای برداری V^* کامل و در نتیجه فضای باناخ است [؟].

[8] Dual space

به طور مشابه فرم دوخطی $a(\cdot,\cdot)$ روی V کراندار است هرگاه ثابت C وجود داشته باشد به طوری که به ازای هر $v, w \in V$ داشته باشیم

$$|a(v,w)| \leq C\, \|v\|\, \|w\|. \tag{۵.۲}$$

فضای هیلبرت دارای خاصیت مهمی است که در قضیه زیر آن را بیان می‌کنیم.

قضیه ۲.۲.۲. *(قضیه نمایش ریس[۹]) فرض کنیم V یک فضای هیلبرت با ضرب داخلی $(\cdot,\cdot)$ باشد، در اینصورت برای هر تابعک خطی کران‌دار L روی V عضو $u \in V$ منحصر بفردی وجود دارد به طوری که*

$$L(v) = (v,u), \qquad \forall\, v \in V.$$

به علاوه داریم

$$\|L\|_{V^*} = \|u\|_V. \tag{۶.۲}$$

اثبات. اثبات یکتایی واضح است، چون اگر $u_1, u_2 \in V$ وجود داشته باشند به طوری که برای هر $v \in V$ داشته باشیم $(v,u_1) = (v,u_2)$، در اینصورت با قرار دادن $v = u_1 - u_2$ داریم

$$\|u_1 - u_2\| = (u_1 - u_2, u_1 - u_2) = 0.$$

حال اگر برای هر $v \in V$، $L(v) = 0$ باشد، می‌توان $u = 0$ قرار دهیم. فرض می‌کنیم عضو $\overline{v} \in V$ وجود داشته باشد به طوری که $L(\overline{v}) \neq 0$، مجموعه $V_0 = \{v \in V : L(v) = 0\}$ را در نظر می‌گیریم

[۹] Riesz represertation theorem