وزارت علوم، تحقیقات و فناوری

دانشگاه دامغان

دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر

پایان‌نامه کارشناسی ارشد

ریاضی کاربردی (گرایش آنالیز عددی)

حل مسائل هدایت گرمایی معکوس با استفاده از روش موجک

توسط:

سونا پاره‌کار

استاد راهنما:

دکتر رضا پورقلی

استاد مشاور:

مهندس حسن کدخدایی خلفی

شهریور ۱۳۹۱

بسم الله الرحمن الرحیم

به نام خدا

حل مسائل هدایت گرمایی معکوس با استفاده از روش موجک

توسط:

سونا پاره کار

پایان‌نامه

ارائه شده به تحصیلات تکمیلی دانشگاه به عنوان بخشی از فعالیت‌های تحصیلی لازم
برای اخذ درجه کارشناسی ارشد

در رشته

ریاضی کاربردی (گرایش آنالیز عددی)

از دانشگاه دامغان

ارزیابی و تأیید شده توسط کمیته پایان‌نامه با درجه: **عالی**

دکتر رضا پورقلی استادیار ریاضی کاربردی گرایش آنالیز عددی دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر دانشگاه دامغان (استاد راهنما)

مهندس حسن کدخدایی خلفی مربی علوم کامپیوتر گرایش علوم کامپیوتر دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر دانشگاه دامغان (استاد مشاور)

دکتر سید هاشم طبسی استادیار علوم کامپیوتر گرایش علوم کامپیوتر دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر دانشگاه دامغان (داور اول)

دکتر علی عباسی ملائی استادیار ریاضی کاربردی گرایش تحقیق در عملیات دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر دانشگاه دامغان(داور دوم)

دکتر محمد ابری استادیار ریاضی محض گرایش توپولوژی دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر دانشگاه دامغان (نماینده تحصیلات تکمیلی)

شهریور ۱۳۹۱

تقدیم به

بهترین همراهان زندگیم،

پدر و مادرم

مهربان فرشتگانی که لحظات ناب باور بودن، لذت و غرور دانستن، جسارت خواستن، عظمت رسیدن
و تمام تجربه های یکتا و زیبای زندگیم، مدیون حضور آنهاست.

سپاسگزاری

سپاس خدایی را که هرگاه از او چیزی خواسته‌ایم، عطا می‌کند و آنگاه که امیدی به او داشته‌ایم، به امیدمان می‌رساند. خدای مهربانی که با کرم و احساس خویش هرکس روی به او بیاورد، او را محروم نمی‌کند و امیدش را ناامید نمی‌گرداند

از محضر استاد فرهیخته و بزرگوارم جناب آقای دکتر رضا پورقلی که در کمال سعه صدر، با حسن خلق و فروتنی از هیچ کمکی در این راه بر من دریغ ننمودند و زحمت راهنمایی این رساله را بر عهده گرفتند. و خداوند رحمان را سپاس گزارم که افتخار شاگردی در محضر ایشان را به من عطا فرمود و از آن قادر متعال برای ایشان سلامتی و توفیق روزافزون مسئلت دارم.

از محضر استاد بزرگوار جناب آقای مهندس کدخدایی که در مقام استاد مشاور از نظرات سودمند ایشان بهره گشته‌ام کمال تشکر و سپاس گزاری را دارم.

از محضر اساتید بزرگوار، جناب آقای دکتر سید هاشم طبسی و جناب آقای دکتر علی عباسی ملائی که داوری این پایان نامه را بر عهده گرفتند و از نظرات ارزشمند ایشان بهره مند گشته‌ام، کمال تشکر و قدردانی را دارم.

از محضر جناب آقای دکتر حسین جعفری که با نظرات ارزشمند و دلگرمی‌ها من را در این راه یاری نمودند کمال تشکر و سپاس گزاری را دارم.

از پدر و مادر عزیزم و برادر مهربانم که در تمام مراحل زندگی حامی و مشوق من هستند و همواره دعای خیرشان بدرقه راهم بوده است، صمیمانه سپاس گزارم.

سونا پاره کار

شهریور ۹۱

چکیده

حل مسائل هدایت گرمایی معکوس با استفاده از روش موجک

به وسیله‌ی:
سونا پاره کار

آنالیز موجک یکی از دستاوردهای نسبتاً جدید ریاضیات است. امروزه شاهد کابردهای مهمی از آن در بسیاری از رشته‌های علوم و مهندسی هستیم.
در این پایان نامه ابتدا با معرفی موجکی به نام **موجک لژاندر**، کاربرد آن را برای حل نوعی از معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزیی به نام مسائل هدایت گرمایی معکوس نشان داده‌ایم.
برای این کار بالاترین مرتبه‌ی مشتق موجود در معادله نسبت به هریک از متغیرها را بر حسب موجک لژاندر تقریب می‌زنیم.

کلمات کلیدی : مسائل هدایت گرمایی، موجک لژاندر، مسائل بد وضع، روش منظم سازی تیخونوف.

فهرست مطالب

فهرست جدول‌ها

فهرست شکل‌ها

فصل ۱

معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزیی

۱-۱ مقدمه

هر معادله‌ای که شامل یک متغیر وابسته و مشتقاتش نسبت به یک یا چند متغیر مستقل باشد را یک **معادله‌ی دیفرانسیل** می‌نامیم.
معادلات دیفرانسیل به دو دسته کلی تقسیم می‌شوند:

(۱) معادلات دیفرانسیل معمولی (ODEs) [1]

(۲) معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزیی (PDEs) [2]

بحث اصلی در این پایان‌نامه، پیرامون مسائل معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزیی است که در زیر به معرفی این دسته از معادلات می‌پردازیم.
هر معادله‌ی دیفرانسیلی که شامل تابع دو یا چند متغیره و مشتقات تابع نسبت به متغیرهای مستقل باشد، به یک **معادله‌ی دیفرانسیل با مشتقات جزیی** موسوم است.

در حالت دو بعدی یک PDE را می‌توان به‌صورت زیر تعریف کرد:

$$Au_{xx} + Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + Fu + G = ۰ \qquad (۱.۱)$$

دراین‌صورت

(۱) معادله‌ی (۱.۱) را **بیضوی** گوییم اگر، $B^۲ - ۴AC < ۰$

[1] Ordinary Differential Equations

[2] Partial Differential Equations

(۲) معادله‌ی (۱.۱) را **سهموی** گوییم اگر، $B^۲ - ۴AC = ۰$

(۳) معادله‌ی (۱.۱) را **هذلولوی** گوییم اگر، $B^۲ - ۴AC > ۰$

(۴) معادله‌ی (۱.۱) را **خطی** گوییم، هرگاه ضرایب F, E, D, C, B, A و G توابعی از x و y باشند

(۵) معادله‌ی (۱.۱) را **شبه خطی** گوییم، هرگاه به‌صورت زیر باشد:

$$Au_{xx} + Bu_{xy} + Cu_{yy} = F(x, y, u, u_x, u_y)$$

که در آن، ضرایب B, A و C توابعی از x و y هستند.

(۶) حالتی به جز حالت خطی و شبه خطی به‌صورت **غیر خطی** معادله‌ی (۱.۱) موسوم است.

هدف از حل یک مسئله‌ی معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزیی، حل یک معادله هست که در برخی شرایط فیزیکی، صادق است. شرایط فیزیکی مسئله ممکن است فقط از نوع اولیه (آغازین) باشد، که در این‌صورت به این مسئله، مسئله‌ی مقدار اولیه می‌گوییم. اگر شرایط فیزیکی مسئله از نوع مرزی (کرانه‌ای) باشد، مسئله‌ی مقدار مرزی و اگر شرایط فیزیکی مسئله از نوع اولیه و مرزی باشد، مسئله را، مسئله‌ی مقدار اولیه-مرزی می‌گوییم.

در بخش‌های بعدی به معرفی شرایط اولیه و مرزی و دسته‌ی خاصی از مسائل سهموی می‌پردازیم.

۱-۲ شرایط اولیه و مرزی، برای یک مسئله‌ی وابسته به زمان

۱-۲-۱ شرط اولیه

شرط اولیه برای یک مسئله‌ی وابسته به زمان، تعیین دما در جسم مورد نظر در لحظه شروع فرآیند است.

۱-۲-۲ شرایط مرزی

شرایط مرزی، دما یا جریان حرارتی(شار حرارتی) بر روی مرز است. شرایط مرزی به سه دسته زیر تقسیم بندی می‌شوند:

(۱) شرایط مرزی نوع اول (مسئله‌ی دیریکله)

(۲) شرایط مرزی نوع دوم (مسئله‌ی مرزی نیومن)

(۳) شرایط مرزی نوع سوم (مسئله‌ی مرزی روبین)

۱- شرط مرزی با دمای معلوم، روی مرز (نوع اول)

ممکن است در یک مسئله مقدار دما در سطح مرزی را داده باشند که تابع زمان و مکان می‌تواند باشد، این نوع شرط به شرط مرزی دیریکله معروف است.

۲- شرط مرزی با شار حرارتی معین، بر روی مرز جسم (نوع دوم)

هرگاه توزیع شار حرارتی بر روی مرز جسم مشخص باشد و به‌صورت ثابت یا تابعی از مکان و زمان و یا هردو باشد، شرط مرزی نوع دوم یا شرط مرزی نیومن گویند.

۳-شرط مرزی نوع سوم

اگر بر بخشی از کران مقدار دما و بر بقیه کران توزیع شار حرارتی مشخص باشد، چنین شرطی به شرط مرزی روبین (آمیخته) موسوم است.

۱-۳ مسائل سهموی

از مسائل سهموی در این پایان‌نامه به معرفی **مسائل هدایت گرمایی** می‌پردازیم.

۱-۳-۱ مسائل هدایت گرمایی

معادله‌ی اساسی حاکم بر انتقال گرما در یک جسم صلب در حالت کلی با توجه به قوانین فیزیکی یا طبیعی و استفاده از قوانین ریاضی به‌صورت زیر فرمول‌بندی می‌شود:

$$k\nabla^{۲}u + G(r,t) = (\rho c)u_t \tag{۲.۱}$$

که در آن k، ضریب هدایت گرمایی جسم است که ممکن است تابعی از مختصات نقطه روی جسم یا دما و یا هردو آن‌ها باشد، ρ چگالی جسم، c ظرفیت حرارتی ویژه جسم و $G(r,t)$ شدت انرژی جسم و انرژی وارد شده به جسم در زمان t و در نقطه $r = (x,y,z)$ است. هم چنین $\nabla^{۲}u$ در حالت یک بعدی، دو بعدی و سه بعدی به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\nabla^{۲}u = u_{xx}, \qquad (\text{یک بعدی})$$

$$\nabla^{۲}u = u_{xx} + u_{yy}, \qquad (\text{دو بعدی})$$

$$\nabla^{۲}u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}. \qquad (\text{سه بعدی})$$

معادله‌ی (۲.۱) یکی از مهمترین مسائل ریاضی فیزیک است که توسط دانشمندان بزرگ ریاضی، فیزیک، شیمی و $\cdots$ مورد استفاده قرار می‌گیرد، به‌طوری‌که با حل این معادله به همراه شرایط اولیه و مرزی، بخش بسیار مهمی از مشکلات و مسائل موجود در صنعت رفع می‌گردد.

هر مسئله‌ی هدایت گرمایی برای ناحیه‌ای بسته و کراندار در حالت یک بعدی با شرط اولیه و شرایط مرزی به‌صورت زیر بیان می‌شود:

$$\begin{cases} ku_{xx} + G(x,t) = (\rho c)u_t, & ۰ < x < l,\ t > ۰, \\ u(x,۰) = f(x), & ۰ \leq x \leq l, \\ u(۰,t) = g(t), \quad or \quad -ku_x(۰,t) = \phi(t), & t \geq ۰, \\ u(l,t) = q(t), \quad or \quad -ku_x(l,t) = \psi(t), & t \geq ۰, \end{cases} \tag{۳.۱}$$

اگرچه مسئله‌ی (۳.۱) به جهت آن‌که از مدل سازی مسئله‌ی انتقال حرارت ناشی شده‌است به مسئله‌ی گرما معروف شده‌است، اما این مسئله کاربردهای متنوعی از جمله در حل مسائل نفوذ آب در داخل زمین، اندازه‌گیری میزان معادل موجود آب و نفت در منابع زیرزمینی نیز دارد، اغلب اوقات چنین

مسائلی را مسئله‌ی نفوذ می‌نامند.

در ادامه پیش از تعریف مسائل هدایت گرمایی مستقیم و معکوس، لازم است توضیحاتی را پیرامون **مسائل معکوس** ذکر کنیم.

۱–۴ مسائل معکوس

امروزه مسائل معکوس جزء مهمترین مسائل در علوم و مهندسی هستند. به این دلیل که در شاخه‌های گوناگون علوم و مهندسی کاربردهای متعددی دارند. به عنوان مثال مهندسان مکانیک، هوافضا، شیمی، ریاضی‌دانان، متخصصین علم فیزیک، آمار و دیگر شاخه‌ها در حل مسائل خود با مسائل معکوس مواجه می‌شوند [۱۰،۱۶].

از دید کلر [۳] ریاضی‌دان و متخصص در زمینه مسائل معکوس، دو مسئله را معکوس یکدیگر می‌نامند هرگاه فرمول‌بندی یکی از آن‌ها نیازمند تمام یا بخشی از اطلاعات مسئله‌ی دیگر باشد. بر طبق این تعریف یکی از مسائل را مستقیم و دیگری را معکوس می‌نامند. مسائل هدایت گرمایی را می‌توان به دو دسته مستقیم و معکوس تقسیم کرد. در مسائل مستقیم که کاربردهای بیشتری دارند، هندسه، خواص ترموفیزیکی، شرایط اولیه و مرزی معلوم هستند. هدف در این مسائل محاسبه دما در داخل ناحیه حل است، در مسائل هدایت گرمایی معکوس، تعدادی از این اطلاعات نامعلوم بوده و در عوض اطلاعات اضافی که معمولاً دماهای اندازه‌گیری شده در داخل ناحیه حل و یا روی مرز است، معلوم است. مسائل هدایت گرمایی معکوس کاربردهای مختلفی دارند، این کاربردها را می‌توان به سه دسته مسائل کنترلی، طراحی و شناخت تقسیم کرد. در مسائل کنترلی و شناخت، هدف تعیین یک متغیر می‌باشد که اندازه‌گیری مستقیم آن ممکن نیست، مانند تعیین ضریب هدایت گرمایی و یا دما روی یک سطح که قراردادن مستقیم دماسنج روی آن ممکن نمی‌باشد. مسائل طراحی معمولاً شامل اندازه‌گیری نیستند بلکه در این مسائل معمولاً بهینه کردن یک طرح از طریق یک تابع هدف تعریف کننده یک مسئله‌ی معکوس است.

یکی از حوزه‌های مسائل معکوس، بحث و بررسی در ارتباط با استخراج و استنباط اطلاعات مفید از اندازه‌گیری‌های ناسازگار، غیر عادی و محدود درون یک ناحیه در سیستم‌های نفوذی است. از سیستم‌های نفوذی می‌توان به مکانیزم انتقال گرما به شیوه هدایت یا رسانش اشاره کرد. به عنوان مثال یک میله به طول l، که دارای دمای اولیه معلوم و یک طرف آن عایق بندی شده‌است را در نظر بگیرید، در این نمونه به دلیل شرایط سخت و یا نامناسب بودن وضعیت سطح میله در طرف دیگر میله، نمی‌توان

[۳] Keller

حسگرهای دما را به طور مستقیم بر روی سطح انتهایی میله قرار داد، بلکه به محاسبه دما در یک نقطه داخلی میله با استفاده از سنسور [۴] می‌پردازند. در چنین حالتی با یک مسئله‌ی هدایت گرمایی معکوس مواجه خواهیم شد که هدف از تحلیل این مسئله، تخمین شرط مرزی سطح است.

هم چنین از تحلیل مسائل هدایت گرمایی معکوس برای برآورد خواص گرما مانند ضریب هدایت گرمایی و ظرفیت ویژه گرمایی استفاده می‌شود [۳].

مسئله‌ی هدایت گرمایی مستقیم با توجه به نتایج داده شده حل می‌گردد، اما مسئله‌ی هدایت گرمایی معکوس به نتایج و ارائه علّت و معلول وابسته است که برای حل آن باید از نتایج و پیامدهای شناخته شده به علل ناشناخته دست یافت، همان‌طور که بیان شد در بسیاری از موارد، اندازه‌گیری و تخمین مستقیم ممکن نیست و یا حتی در برخی موارد غیرممکن است، لذا مجبور به تخمین علّت از روی مشاهدات نتایج فرآیند می‌باشیم. برای مثال درجه حرارت در یک سطح خیلی داغ را نمی‌توان به‌طور مستقیم با استفاده از حسگرها به‌دست آورد به همین دلیل معمولاً حسگرها را زیر سپر تشعشع قرار می‌دهند و دمای سطح داغ را به روش تحلیل معکوس تخمین می‌زنند.

۱-۴-۱ تعریف مسائل هدایت گرمایی مستقیم و معکوس

مسئله‌ی هدایت گرمایی مستقیم

در مسئله‌ی (۳.۱) توابع مختلفی در شرایط اولیه و مرزی موجود می‌باشند. اگر تنها تابع $u(x,t)$ مجهول مسئله‌ی فوق باشد و بقیه‌ی توابع در شرایط اولیه و مرزی و هم چنین ضرایب در معادله‌ی (۳.۱) معلوم باشند، مسئله، یک مسئله‌ی هدایت گرمایی مستقیم (DHCP) [۵] است.

مسئله‌ی هدایت گرمایی معکوس

اگر در مسئله‌ی هدایت گرمایی (۳.۱) به غیر از تابع $u(x,t)$ توابع دیگری مجهول باشند، آن را یک مسئله‌ی هدایت گرمایی معکوس (IHCP) [۶] گویند.

---

[۴] Sensor

[۵] Direct Heat Conduction Problem

[۶] Inverse Heat Conduction Problem

۱-۵ مثال هایی از مسائل هدایت گرمایی معکوس

مسئله‌ای به صورت

$$\begin{cases} \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^۲ T}{\partial x^۲} \\ T(x,۰) = f(x) \qquad ۰ \leq x \leq ۱ \\ T(۰,t) = q(t) \qquad ۰ \leq t \leq t_f \\ T(۱,t) = h(t) \qquad ۰ \leq t \leq t_f \end{cases}$$

که در آنq از مجهولات وh و f از مفروضات مسئله هستند. این مسئله یک مسئله سهموی معکوس است که با توجه به شرط فوق اضافی

$$T(x_۱,t) = g(x) \qquad ۰ < x_۱ < ۱, ۰ \leq t \leq t_f$$

یعنی با مشخص بودن درجه حرارت در $x = x_۱$، حل آن مورد بررسی قرار می‌گیرد. در این مسئله معادله و شرایط خطی هستند.

۲.مسئله معکوس به صورت

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x}(k(x,t)\frac{\partial T(x,t)}{\partial x}) = \frac{\partial T(x,t)}{\partial t} - g(x,t) \quad ۰ \leq x \leq ۱, t > ۰ \\ T(x,۰) = \phi(x), \qquad ۰ \leq x \leq ۱ \\ k(۰,t)\frac{\partial T}{\partial x}(۰,t) = q(۰,t), \qquad t > ۰ \\ k(۱,t)\frac{\partial T}{\partial x}(۱,t) = q(۱,t), \qquad t > ۰ \end{cases}$$

و شرط فوق اضافه مساله به صورت زیر است

$$T(x_i,t) = p(t) \quad i = ۰,۱,۲,\cdots,m, t > ۰, x_i \in [۰,۱]$$

این مسئله معکوس با دو عبارت ناشناخته k,Tاست. در این مسئله T درجه حرارت در میله‌ای به طول واحد و k ضریب هدایت گرمایی، ناشناخته هستند.

۳.مسئله اجسام متخلخل، با ضریب نفوذ مجهول

$$\begin{cases} \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}(a(u)\frac{\partial u}{\partial x}), \qquad 0 < x < 1, t > 0 \\ u(x,0) = f(x), \qquad 0 \leq x \leq 1, \qquad 0 \leq x \leq 1 \\ -a(u(0,t))\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = g(t), \qquad t \geq 0 \\ \frac{\partial u}{\partial x}(1,t) = h(t), \qquad t \geq 0 \\ u(0,t) = \phi(t), \qquad t \geq 0 \end{cases}$$

در این مسئله معادله و شرایط غیرخطی هستند و هدف از حل آن تعیین ضریب نفوذ است. این مسئله به مسئله نفوذ موسوم است. نفوذ را می‌توان تمایل ذرات یک گروه متراکم در یک نقطه به انتشار و نفوذ در طول زمان در محیط و فضای اطراف خود دانست. در اینجا نه فقط ذرات فیزیکی بلکه یک مجموعه یا توده بیولوژیکی یا هر واحد قابل تعیین هویت دیگری مثل جرم حرارت و غیره می‌تواند باشد. عبارت فضا نیز نه فقط فضای اقلیدسی معمولی بلکه فضای مطلق است. با چنین تعریفی همراه هر نفوذ و نفوذی اغتشاش موجود است. مثلا اگر ذراتی که از یک نقطه در جهت و سرعت خاصی در مسیر خاصی آزاد شوند، نفوذ نامیده نمی‌شود. نفوذ در حقیقت حرکت منظم مجموعه ذرات در اثر حرکت نامنظم و میکروسکوپی هر ذره است. در نتیجه همراه هر نفوذ حرکات تصادفی موجود خواهد بود. آزمایشی که معمولاً و به طور کلاسیك در این زمینه به کار می رود این است که در یك ظرف استوانه‌ای در قسمت پایین محلول رنگی ریخته و روی آن آب خالص ریخته می‌شود. به طوری که در بالای استوانه در ابتدا آب زلال و در زیر آب رنگی است. به تدریج رنگ به قسمت بالا نفوذ کرده و در قسمت پایین از شدت رنگ کاسته می‌شود و بعد از مدت زمان کافی کل محلول دارای رنگ یکنواخت می‌گردد. این نفوذ در حالی است که حرکت جابجائی وجود ندارد و فقط انتقال مولکول‌ها باعث نفوذ رنگ به آب خالص می‌گردد. این حرکات کاملاً تصادفی صورت گرفته و هر مولکول رنگی مستقل از دیگری عمل می‌کند. واضح است که حرکت مولکول‌های رنگی در جهت مرجحی صورت نگرفته و امکان اینکه مولکول به چه نقطه‌ای خواهد رفت باید توسط فرآیند قدم زدن بررسی گردد. ازکاربردهای نفوذ، می‌توان به نفوذ مولکولی، نفوذ مغشوش، نفوذ با وجود نیرو، نظریه نفوذ در محیط‌های طبیعی، نفوذ در لایه مرزی اتمسفر و نفوذ در اجسام متخلخل اشاره نمود.

۱-۵-۱ برخی از کاربردهای صنعتی مسائل هدایت گرمایی معکوس

تحقیقات بر روی مسائل هدایت گرمایی معکوس و استفاده از آن‌ها در کاربردهای صنعتی به دههٔ ۱۹۵۰ تا ۱۹۶۰ میلادی بر می‌گردد. از جمله‌ی این کاربردها می‌توان به عملیات و مکانیزم گرمایی آیرودینامیک