

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

١٣٧١٢٤



دانشگاه شهید باهنر کرمان

دانشکده ریاضی و کامپیوتر

گروه ریاضی

پایان نامه تحصیلی برای دریافت درجه کارشناسی ارشد ریاضی کاربردی

سیستم کنترل موجودی مرور دوره‌های با سفارش اضطراری

استاد راهنما:

دکتر محمد علی یعقوبی

مؤلف:

حدیثه حق شناس حقیقی

۱۳۸۹/۳/۱۷

کتابخانه اساتاد دانشگاه شهید باهنر کرمان
توسط: ...

خردادماه ۸۸

ب

۱۳۷۱۲۴



دانشگاه شهید باهنر کرمان

این پایان نامه

به عنوان یکی از شرایط احراز کارشناسی ارشد

به

بخش ریاضی - دانشکده ریاضی و کامپیوتر

دانشگاه شهید باهنر کرمان

تسلیم شده است و هیچگونه مدرکی به عنوان فراغت از تحصیل دوره مزبور شناخته نمی شود.

دانشجو: حدیثه حق شناس

دکتر محمد علی یعقوبی

استاد راهنما:

دکتر ماشاله ماشین چی

دور ۱:

دکتر محمد علی ولی

دور ۲:

نماینده تحصیلات تکمیلی دانشگاه: دکتر سید ناصر حسینی

حق چاپ محفوظ و مخصوص به دانشگاه است.

تقدیم به

دو گوهر لایزال هستی

پدرم و مادرم

به پاس محبت‌های بسیار و گرمای امید بخش وجودشان

و

همسفر همیشه زندگیم

همسرم

تشکر و قدردانی

بهترین سپاسها شایسته پروردگار سبحان که پرتو هدایتش روشنگر تاریکی هاست. خداوند مهربان را شکر گزارم که توفیق آموختن و فرصت اندیشیدن را به من عطا فرموده تا از پی سالها تحصیل دریابم که آنچه جستی است تنها اوست.

با تشکر و قدردانی از پدر بزرگوار و مادر مهربانم که تمام لحظات زندگی ام با وجود گرمشان پرفروغ است. توانشان رفت تا به توانایی برسم و مویشان سپید گشت تا رویم سپید بماند. در برابر قدمهایشان زانوی ادب بر زمین می گذارم و با قلبی مملو از عشق و خضوع بر دستانشان بوسه می زنم. سرو وجودشان همیشه سرسبز و استوار.

همواری راهی که تا به امروز پیموده ام مدیون تلاشهای قابل تقدیر تمامی اساتیدی می دانم که از آغاز یاری ام داده اند. از استاد ارجمند و نیک اندیشم جناب آقای دکتر محمدعلی یعقوبی که فکر جوان و کم تجربه ام را با همراهی دلسوزانه و بی دریغشان راه رفتن آموخت، صمیمانه سپاسگذارم و از خداوند مهربان می خواهم که روشنگر راهشان باشد.

از اساتید بزرگوار آقایان دکتر ماشالله ماشین چی و دکتر محمدعلی ولی به خاطر وقت و حوصله ای که صرف مطالعه و داوری این پایان نامه نمودند تشکر می کنم و سلامتی و توفیق روزافزونشان را آرزو می کنم.

از همسر عزیزم که در طول مدت تحصیل همواره وجودش مایه تشویق و همراهی ام بود قدردانی می کنم.

در پایان از خانم عهدیه زمزم زاده و همه دوستانم که در مدت تحصیل یاریم کردند تشکر می کنم.

باشد که در تمام زندگی سعادت و نیکبختی نصیبشان گردد.

تشکر و قدردانی

بهترین سپاسها شایسته پروردگار سبحان که پرتو هدایتش روشنگر تاریکی هاست. خداوند مهربان را شکرگزارم که توفیق آموختن و فرصت اندیشیدن را به من عطا فرموده تا از پی سالها تحصیل دریابم که آنچه جستنی است تنها اوست.

با تشکر و قدردانی از پدر بزرگوار و مادر مهربانم که تمام لحظات زندگی ام با وجود گرمشان پرفروغ است. توانشان رفت تا به توانایی برسم و مویشان سپید گشت تا رویم سپید بماند. در برابر قدمهایشان زانوی ادب بر زمین می گذارم و با قلبی مملو از عشق و خضوع بر دستانشان بوسه می زنم. سرو وجودشان همیشه سرسبز و استوار.

همواری راهی که تا به امروز پیموده ام مدیون تلاشهای قابل تقدیر تمامی اساتیدی می دانم که از آغاز یاری ام داده اند. از استاد ارجمند و نیک اندیشم جناب آقای دکتر محمدعلی یعقوبی که فکر جوان و کم تجربه ام را با همراهی دلسوزانه و بی دریغشان راه رفتن آموخت، صمیمانه سپاسگذارم و از خداوند مهربان می خواهم که روشنگر راهشان باشد.

از اساتید بزرگوار آقایان دکتر ماشاله ماشین چی و دکتر محمدعلی ولی به خاطر وقت و حوصله ای که صرف مطالعه و داوری این پایان نامه نمودند تشکر می کنم و سلامتی و توفیق روزافزونی را آرزو می کنم.

از همسر عزیزم که در طول مدت تحصیل همواره وجودش مایه تشویق و همراهی ام بود قدردانی می کنم.

در پایان از خانم عهدیه زمزم زاده و همه دوستانم که در مدت تحصیل یاریم کردند تشکر می کنم.

باشد که در تمام زندگی سعادت و نیکبختی نصیبشان گردد.

چکیده

سیستم کنترل موجودی مرور دوره ای سیستمی است که در آن سفارشی موسوم به سفارش معین در مقاطعی از زمان به فاصله مساوی از یکدیگر صادر و بعد از زمان مشخصی کالا به انبار می رسد. وقتی که هزینه کمبود خیلی زیاد باشد مقرون به صرفه است که سیستم مجاز به سفارش اضطراری باشد. زمان تحویل سفارش اضطراری خیلی کمتر از سفارش معین است اما هزینه بیشتری برای سیستم به دنبال دارد و این در حالی است که هزینه سفارش اضطراری از هزینه کمبود کمتر است. در این سیستم زمان مناسب و میزان سفارش اضطراری بر اساس موجودی خالص تعیین می شود. در این پایان نامه چنین سیستم هایی بررسی می شوند. سفارش اضطراری در زمانهایی از دوره درست قبل از رسیدن سفارش معین زمانی که احتمالاً کمبود حداکثر است، صادر می شود. همچنین با توجه به مشخصات سیستم می توان هزینه تقریبی چنین سیستمی را بدست آورد و این هزینه را بهینه کرد. بعلاوه می توان سطح بهینه سفارش معین و اضطراری را محاسبه نمود.

فهرست مطالب

صفحه	عنوان
۱	فصل اول: تعاریف و پیش نیازها
۲	۱-۱ مقدمه
۲	۲-۱ مقدمه ای بر برنامه ریزی غیر خطی
۷	۳-۱ شرایط لازم بهینگی برنامه ریزی غیر خطی
۸	۴-۱ شرایط کافی بهینگی برنامه ریزی غیر خطی
۹	۵-۱ برخی از قواعد مشتقگیری و انتگرالگیری
۹	۱-۵-۱ قاعده زنجیره ای در مورد مشتقگیری از توابع دو متغیره
۱۰	۲-۵-۱ محاسبه انتگرال دو گانه به روش ترتیب انتگرالگیری معکوس
۱۱	۳-۵-۱ قواعدی از مشتقگیری از یک انتگرال
۱۲	۶-۱ مطالبی از آمار و احتمال
۱۷	۱-۶-۱ توزیع نرمال
۱۸	۲-۶-۱ توزیع نرمال بریده شده
۲۱	فصل دوم: مدلهای مقدماتی سیستم کنترل موجودی
۲۲	۱-۲ مقدمه
۲۳	۲-۲ تعریف موجودی
۲۴	۳-۲ هزینه موجودی ها

- ۲-۳-۱ هزینه خریداری کالا یا قیمت مواد..... ۲۵
- ۲-۳-۲ هزینه های سفارش دهی..... ۲۵
- ۲-۳-۱-۱ هزینه های دفتری اداری..... ۲۶
- ۲-۳-۲-۲ هزینه های آماده سازی برای ساخت..... ۲۶
- ۳-۳-۳ هزینه های نگهداری (انبارداری)..... ۲۷
- ۴-۳-۲ هزینه های مواجهه با کمبود..... ۲۸
- ۴-۲ رابطه بین هزینه موجودی ها با سیاست کنترل موجودی..... ۲۹
- ۵-۲ نقش موجودیها در اقتصاد و تولید..... ۳۰
- ۵-۲-۱ جلوگیری از مواجهه با کمبود کالا..... ۳۰
- ۵-۲-۲ بهره وری از نوسانات قیمت..... ۳۱
- ۵-۲-۳ بهره وری از اقتصاد انبوهی..... ۳۲
- ۵-۲-۴ بهره وری از اقتصاد کنترل موجودی..... ۳۲
- ۶-۲ نقش و اهداف برنامه ریزی و کنترل موجودی..... ۳۲
- ۷-۲ نمودارهای موجودی در مقابل زمان..... ۳۳
- ۸-۲ انواع سیستم های کنترل موجودی..... ۳۷
- ۸-۲-۱ سیستم دوره سفارش (دوره ثابت سفارش یا سفارشات دوره ای)..... ۳۷
- ۸-۲-۲ سیستم نقطه سفارش (سفارش مستمر یا مقدار ثابت سفارش یا نقطه سفارش مجدد)..... ۳۹

۴۰ ۹-۲ میانگین موجودی

۴۱ ۱۰-۲ مقدار اقتصادی سفارش

۴۲ ۱۱-۲ روشهای تحلیلی در محاسبه مقدار اقتصادی سفارش

۴۳ ۱-۱۱-۲ مدل دریافت آنی، مصرف تدریجی و کمبود غیر مجاز

۴۷ ۲-۱۱-۲ مدل دریافت تدریجی و مصرف تدریجی و کمبود غیر مجاز

۵۲ ۳-۱۱-۲ مدل دریافت آنی مصرف تدریجی و کمبود مجاز

۵۷ ۴-۱۱-۲ مدل احتمالی سیستم موجودی یک دوره ای

۶۰ فصل سوم: سیستم کنترل موجودی مرور دوره ای

۶۱ ۱-۳ مقدمه

۶۲ ۲-۳ سیستم کنترل موجودی مرور دوره ای

۶۶ ۳-۳ تقریب هزینه مدل سیستم کنترل موجودی مرور دوره ای

۷۸ ۴-۳ سیستم کنترل موجودی مرور دوره ای با سفارش اضطراری

۸۳ ۵-۳ تقریب هزینه مدل سیستم کنترل موجودی مرور دوره ای با سفارش اضطراری

فصل چهارم: سیستم کنترل موجودی مرور دوره ای با دو سفارش معین و اضطراری و قید

۱۰۱ ظرفیت

۱۰۲ ۱-۴ مقدمه

۲-۴ سیستم کنترل موجودی مرور دوره ای با سفارش اضطراری و تعداد سفارش اضطراری

۱۰۲ محدود

- ۳-۴ سیستم کنترل موجودی مرور دوره ای با سفارش اضطراری در دیرترین زمان ممکن و تعداد سفارش اضطراری محدود ۱۰۵
- ۴-۴ تقریب هزینه سیستم کنترل موجودی مرور دوره ای با سفارش اضطراری دیرترین زمان ممکن و تعداد سفارش اضطراری محدود ۱۰۷
- ۴-۵ سیستم کنترل موجودی مرور دوره ای با سفارش اضطراری در یک واحد زمانی زودتر از دیرترین زمان ممکن و تعداد سفارش اضطراری محدود ۱۲۹
- ۴-۶ تقریب هزینه مدل سیستم کنترل موجودی مرور دوره ای با سفارش اضطراری در یک واحد زمانی زودتر از دیرترین زمان ممکن و تعداد سفارش اضطراری محدود ۱۳۲
- مراجع ۱۵۵
- ضمیمه ۱: جدول توزیع نرمال استاندارد ۱۵۸
- ضمیمه ۲: برنامه رایانه ای به زبان MATLAB مربوط به مثال ۳-۳-۱۹ ۱۵۹
- ضمیمه ۳: برنامه رایانه ای به زبان MATLAB مربوط به مثال ۳-۵-۲۱ ۱۶۰
- ضمیمه ۴: برنامه رایانه ای به زبان MATLAB مربوط به مثال ۴-۴-۲۲ ۱۶۱
- ضمیمه ۵: برنامه رایانه ای به زبان MATLAB مربوط به مثال ۴-۴-۲۲ ۱۶۲
- ضمیمه ۶: برنامه رایانه ای به زبان MATLAB مربوط به مثال ۴-۶-۱۹ ۱۶۳
- ضمیمه ۷: برنامه رایانه ای به زبان MATLAB مربوط به مثال ۴-۶-۱۹ ۱۶۴
- واژه نامه انگلیسی - فارسی ۱۶۵
- واژه نامه فارسی - انگلیسی ۱۶۵

فصل اول

تعاريف و پيش نيازها

۱-۱ مقدمه

در این فصل قضایا و تعاریف اساسی که در فصلهای بعد مورد استفاده قرار می گیرند، آورده شده است. ابتدا مقدمه ای از برنامه ریزی غیرخطی و شرایط بهینگی در برنامه ریزی غیرخطی آورده شده، سپس قواعدی در مورد مشتقگیری و روشی برای محاسبه انتگرال دوگانه آورده شده است. همچنین مطالبی از آمار و احتمال که مورد نیاز می باشند در ادامه اشاره شده اند. برای مطالعه جامع و بیشتر پیرامون موارد ذکر شده، مراجع مناسب ذکر شده است.

۱-۲ مقدمه ای بر برنامه ریزی غیر خطی^۱

مسئله برنامه ریزی غیر خطی زیر را در نظر بگیرید [۱۰]:

$$\begin{aligned} \min z &= f(x) \\ \text{s.t. } g_i(x) &\leq 0 \quad \text{for } i=1, \dots, m \\ h_i(x) &= 0 \quad \text{for } i=1, \dots, l \end{aligned} \quad (1-1)$$

که در آن $f, g_1, \dots, g_m, h_1, \dots, h_l$ توابع تعریف شده روی \mathbb{R}^n هستند.

هدف مدل (۱-۱) یافتن مقادیری برای متغیر $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ است که در قیدها صدق کنند و در ضمن تابع $f(x)$ کمینه شود. تابع f معمولاً تابع هدف، هر قید $g_i(x) \leq 0 (i=1, \dots, m)$ قید نامساوی و هر قید $h_i(x) = 0 (i=1, \dots, l)$ قید مساوی نامیده می شود. یک بردار $x \in \mathbb{R}^n$ که در همه قیدها صدق کند، جواب شدنی و جواب شدنی \bar{x} که $f(\bar{x}) \leq f(x)$ برای هر نقطه شدنی x ، جواب بهین نامیده می شود.

^۱-Non-Linear programming

مسئله برنامه ریزی غیر خطی همچنین می تواند بصورت بیشینه سازی باشد و قیدهای نامساوی نیز می توانند به فرم $g_i(x) \geq 0$ ($i=1, \dots, m$) باشند.

مثال ۱-۲-۱: مسئله زیر یک مسئله برنامه ریزی غیر خطی است.

$$\begin{aligned} \min z &= x_1 + 2x_2^2 + x_1x_3 \\ \text{s.t. } x_1 + x_2 + x_3 &= 10 \\ x_1^2 + x_2^2 &\geq 5 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

مثال ۲-۲-۱: مسئله زیر یک مسئله برنامه ریزی غیر خطی بدون قید است.

$$\min z = x_1 + 2x_2^2 + x_1x_3.$$

تعریف ۱-۲-۳: برای مجموعه $S \subset \mathbb{R}^n$ ، اگر به ازای هر دو نقطه $x_1, x_2 \in S$ و برای هر $\lambda \in [0, 1]$ ، $\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \in S$ باشد، آنگاه مجموعه S محدب نامیده می شود.

تعریف ۱-۲-۴: فرض کنید $f: S \rightarrow \mathbb{R}$ یک تابع و S مجموعه ای محدب و ناتهی باشد. اگر به ازای هر دو نقطه $x_1, x_2 \in S$ و برای هر $\lambda \in [0, 1]$ $f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2)$ باشد، تابع f محدب نامیده می شود.

تعریف ۱-۲-۵: فرض کنید $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ یک تابع و $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ باشد. هرگاه همسایگی به شعاع ε حول \bar{x} ($N_\varepsilon(\bar{x})$) موجود باشد بطوری که $f(\bar{x}) \leq f(x)$ باشد برای هر $x \in N_\varepsilon(\bar{x})$ ، آنگاه \bar{x} کمینه موضعی^۱ نامیده می شود. در صورتیکه برای هر $x \in N_\varepsilon(\bar{x})$ ، $f(\bar{x}) < f(x)$ باشد آنگاه \bar{x} را کمینه موضعی اکید می نامند.

^۱ - Local minimum

تعریف ۱-۲-۶: فرض کنید $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ یک تابع و $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ باشد. اگر $f(\bar{x}) \leq f(x)$ برای هر $x \in \mathbb{R}^n$ ، آنگاه \bar{x} کمینه سراسری^۱ نامیده می شود.

قضیه ۱-۲-۷: فرض کنید S مجموعه ای محدب و ناتهی در \mathbb{R}^n و تابع $f: S \rightarrow \mathbb{R}$ محدب باشد.

مسئله $\min_{x \in S} f(x)$ را در نظر بگیرید. اگر $\bar{x} \in S$ جواب کمینه موضعی مسئله باشد، آنگاه \bar{x} جواب کمینه سراسری (جواب بهین) است.

اثبات: به [۱۰] صفحه ۱۰۱ مراجعه شود.

تعریف ۱-۲-۸: هرگاه S مجموعه ای ناتهی در \mathbb{R}^n و \bar{x} نقطه درونی S و تابع $f: S \rightarrow \mathbb{R}$ در \bar{x}

دارای مشتقات جزئی باشد، بردار گرادیان که با $\nabla f(\bar{x})$ نشان داده می شود، بصورت زیر تعریف

$$\nabla f(\bar{x}) = \left(\frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_1}, \frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_n} \right).$$

می شود:

تعریف ۱-۲-۹: هرگاه تابع $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ در \bar{x} دارای مشتقات جزئی مرتبه دوم پیوسته باشد،

ماتریس هسیان^۲ در نقطه \bar{x} که با $H(\bar{x})$ نشان داده می شود، شامل مشتقات جزئی مرتبه دوم

$$\frac{\partial^2 f(\bar{x})}{\partial x_i \partial x_j} \text{ برای } i=1,2,\dots,n \text{ و } j=1,2,\dots,n \text{ می باشد:}$$

$$H(\bar{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(\bar{x}) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(\bar{x}) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(\bar{x}) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(\bar{x}) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(\bar{x}) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n}(\bar{x}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(\bar{x}) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2}(\bar{x}) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(\bar{x}) \end{bmatrix}.$$

^۱ - Global minimum

^۲ - Hessian Matrix

مثال ۱-۲-۱۰: فرض کنید $f(x_1, x_2) = 2x_1 + 6x_2 - 2x_1^2 - 3x_2^2 + 4x_1x_2$ آنگاه

$$\nabla f(x) = (2 - 4x_1 + 4x_2 \quad 6 - 6x_2 + 4x_1) \text{ و } H(x) = \begin{bmatrix} -4 & 4 \\ 4 & -6 \end{bmatrix}.$$

تعریف ۱-۲-۱۱: فرض کنید A یک ماتریس متقارن $n \times n$ باشد.

- اگر $x^t Ax > 0$ باشد برای همه بردارهای ستونی ناصفر x در \mathbb{R}^n ، ماتریس A معین مثبت^۱ نامیده می شود.

- اگر $x^t Ax \geq 0$ باشد برای همه بردارهای ستونی ناصفر x در \mathbb{R}^n ، ماتریس A نیمه معین مثبت^۲ نامیده می شود.

قضیه ۱-۲-۱۲: ماتریس هسیان تابع $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ معین مثبت است اگر و فقط اگر

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} > 0 \text{ و } \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \end{vmatrix} > 0 \text{ و } \dots \text{ و } \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{vmatrix} > 0.$$

اثبات: به [۸] مراجعه کنید.

^۱ - Positive definite

^۲ - Positive semidefinite

قضیه ۱-۲-۱۳: ماتریس هسیان تابع $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ نیمه معین مثبت است اگر و فقط اگر

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} \geq 0 \text{ و } \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \end{vmatrix} \geq 0 \text{ و } \dots \text{ و } \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{vmatrix} \geq 0.$$

اثبات: به [۸] مراجعه کنید.

لم ۱-۲-۱۴: ماتریس متقارن $H = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$ را در نظر بگیرید

- ماتریس H معین مثبت است اگر و تنها اگر $a > 0$ و $c > 0$ و $ac - b^2 > 0$.

- ماتریس H نیمه معین مثبت است اگر و تنها اگر $a \geq 0$ و $c \geq 0$ و $ac - b^2 \geq 0$.

اثبات: به [۱۰] صفحه ۹۶ مراجعه شود.

قضیه ۱-۲-۱۵: فرض کنید S مجموعه ای محدب و ناتهی در \mathbb{R}^n باشد و تابع $f: S \rightarrow \mathbb{R}$ روی

S دارای مشتقات مرتبه دوم پیوسته باشد. تابع f محدب است اگر و تنها اگر ماتریس هسیان در هر

نقطه S نیمه معین مثبت باشد.

اثبات: به [۱۰] صفحه ۹۱ مراجعه شود.

نتیجه ۱-۲-۱۶: فرض کنید S مجموعه ای محدب و ناتهی در \mathbb{R} باشد و تابع $f: S \rightarrow \mathbb{R}$ روی S

دو بار مشتق پذیر باشد. تابع f محدب است اگر و تنها اگر برای هر $x \in \mathbb{R}$ ، $f''(x) \geq 0$ باشد.

۳-۱ شرایط لازم بهینگی برنامه ریزی غیر خطی

قضیه زیر شرط لازم بهینگی یک جواب را برای یک مسئله برنامه ریزی غیر خطی بیان می کند.

قضیه ۱-۳-۱: فرض کنید تابع $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ در \bar{x} دارای مشتقات جزئی باشد. اگر \bar{x} کمینه

موضعی باشد، آنگاه $\nabla f(\bar{x}) = 0$ است.

اثبات: به [۱۰] صفحه ۱۳۳ مراجعه شود.

در قضیه بالا از بردار گرادیان استفاده شده است که مؤلفه های آن مشتقات جزئی مرتبه اول تابع f

هستند. از این روش شرایط لازم بهینگی (صفر بودن مشتقات جزئی مرتبه اول در جواب بهین) شرایط

بهینگی مرتبه اول^۱ نیز نامیده می شوند.

نتیجه ۱-۳-۲: فرض کنید تابع $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ در \bar{x} مشتق پذیر باشد. اگر \bar{x} کمینه موضعی باشد،

آنگاه $f'(\bar{x}) = 0$ است.

قضیه ۱-۳-۳: فرض کنید تابع $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ دارای مشتقات جزئی مرتبه دوم پیوسته در \bar{x} باشد. اگر

\bar{x} کمینه موضعی باشد آنگاه $\nabla f(\bar{x}) = 0$ و ماتریس $H(\bar{x})$ نیمه معین مثبت است.

اثبات: به [۱۰] صفحه ۱۳۳ مراجعه شود.

نتیجه ۱-۳-۴: فرض کنید تابع $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ در \bar{x} دو بار مشتق پذیر باشد. اگر \bar{x} کمینه موضعی

باشد آنگاه $f'(\bar{x}) = 0$ و $f''(\bar{x}) \geq 0$ است.

^۱ - First order condition

۴-۱ شرایط کافی بهینگی برنامه ریزی غیر خطی

در بخش قبل برخی شرایط لازم بهینگی برای یک جواب مسئله برنامه ریزی غیرخطی بررسی شد. در این بخش برخی شرایط کافی معرفی می شوند [۱۰].

قضیه ۱-۴-۱: فرض کنید تابع $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ در \bar{x} دارای مشتقات جزئی مرتبه دوم پیوسته باشد.

اگر $\nabla f(\bar{x}) = 0$ و ماتریس $H(\bar{x})$ معین مثبت باشد آنگاه \bar{x} کمینه موضعی اکید است.

اثبات: به [۱۰] صفحه ۱۳۴ مراجعه شود.

در قضیه بالا از بردار گرادیان و ماتریس هسیان استفاده شده و ماتریس هسیان شامل مشتقات جزئی

مرتبه دوم تابع f است. از این رو شرایط قضیه ۱-۴-۱، شرایط مرتبه دوم^۱ نامیده می شوند.

مثال ۱-۴-۲: کمینه موضعی تابع $f(x, y) = 2x^4 + y^2 - x^2 - 2y$ را بیابید.

حل: برای بهره گیری از قضیه ۱-۴-۱ ابتدا باید مشتقات جزئی مرتبه اول را بدست آورد:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 8x^3 - 2x \quad \text{و} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y - 2$$

$$\text{با قرار دادن } \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \text{ نتیجه می شود که } x = -\frac{1}{2}, x = 0, x = \frac{1}{2} \text{، با قرار دادن } \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \text{، } y = 1$$

بدست می آید.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x} = 24x^2 - 2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y} = 2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 0. \quad \text{همچنین:}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 4, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 0 \quad \text{در دو نقطه } \left(\frac{1}{2}, 1\right) \text{ و } \left(-\frac{1}{2}, 1\right)$$

$$H = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

در نتیجه ماتریس هسیان برابر است با:

^۱ - Second order condition

ماتریس هسیان فوق معین مثبت است. از این رو نقاط $\left(-\frac{1}{2}, 1\right)$ و $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ هر دو کمینه موضعی اکید هستند.

در نقطه $(0, 1)$ ، ماتریس هسیان معین مثبت نیست.
 نتیجه ۱-۴-۳: فرض کنید تابع $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ در \bar{x} دو بار مشتق پذیر باشد. اگر $f'(\bar{x}) = 0$ و $f''(\bar{x}) > 0$ باشد آنگاه \bar{x} کمینه موضعی اکید است.

مثال ۱-۴-۴: کمینه موضعی تابع $f(x) = 12x^5 - 45x^4 + 40x^3 + 5$ را بیابید.

طبق نتیجه ۱-۴-۳:

$$f'(x) = 60(x^4 - 3x^3 + 2x^2) = 60x^2(x-1)(x-2)$$

در $x=0$ ، $x=1$ و $x=2$ ، $f'(x) = 0$ است.

$$f''(x) = 60(4x^3 - 9x^2 + 4x)$$

در $x=2$ ، $f''(x) = 240 > 0$ است بنابراین $f(x)$ در $x=2$ کمینه موضعی اکید دارد.

۵-۱ برخی از قواعد مشتگیری و انتگرالگیری

۵-۱-۱ قاعده زنجیره ای در مورد مشتگیری از توابع دو متغیره

در این بخش قاعده زنجیره ای در مورد مشتگیری از توابع دو متغیره یادآوری می شود [۱۳].

تعریف ۱-۵-۱: هرگاه $u = f(x(t))$ و $x(t)$ تابعی مشتق پذیر باشد، آنگاه $\frac{du}{dt} = \frac{df}{dx} \times \frac{dx}{dt}$.

نتیجه ۱-۵-۲: هرگاه $w = f(x(t), y(t))$ و $x(t)$ و $y(t)$ توابعی مشتق پذیر و f و $\frac{\partial f}{\partial x}$ و $\frac{\partial f}{\partial y}$

پیوسته باشند، آنگاه $\frac{dw}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \times \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \times \frac{dy}{dt}$