بسم الله الرحمن الرحیم

۱۳۷۱۲۴

دانشگاه شهید باهنر کرمان

دانشکده ریاضی و کامپیوتر

گروه ریاضی

پایان نامه تحصیلی برای دریافت درجه کارشناسی ارشد ریاضی کاربردی

سیستم کنترل موجودی مرور دوره‌ای با سفارش اضطراری

استاد راهنما :

دکتر محمد علی یعقوبی

مؤلف :

حدیثه حق شناس حقیقی

خردادماه ۸۸

ب

دانشگاه شهید باهنر کرمان

این پایان نامه

به عنوان یکی از شرایط احراز کارشناسی ارشد

به

بخش ریاضی - دانشکده ریاضی و کامپیوتر

دانشگاه شهید باهنر کرمان

تسلیم شده است و هیچگونه مدرکی به عنوان فراغت از تحصیل دوره مزبور شناخته نمی شود .

دانشجو : حدیثه حق شناس

استاد راهنما : دکترمحمدعلی یعقوبی

داور ۱ : دکترماشاالله ماشین چی

داور ۲ : دکترمحمدعلی ولی

نماینده تحصیلات تکمیلی دانشگاه : دکترسید ناصر حسینی

تقدیم به

دو گوهر لایزال هستی

پدرم و مادرم

به پاس محبتهای بسیار و گرمای امید بخش وجودشان

و

همسفر همیشه زندگیم

همسرم

تشکر و قدردانی

بهترین سپاسها شایسته پروردگار سبحان که پرتو هدایتش روشنگر تاریکی هاست. خداوند مهربان را شکرگزارم که توفیق آموختن و فرصت اندیشیدن را به من عطا فرموده تا از پی سالها تحصیل دریابم که آنچه جستنی است تنها اوست.

با تشکر و قدردانی از پدر بزرگوار و مادر مهربانم که تمام لحظات زندگی ام با وجود گرمشان پرفروغ است. توانشان رفت تا به توانایی برسم و مویشان سپید گشت تا رویم سپید بماند. در برابر قدمهایشان زانوی ادب بر زمین می گذارم و با قلبی مملو از عشق و خضوع بر دستانشان بوسه می زنم. سرو وجودشان همیشه سرسبز و استوار.

هموار راهی که تا به امروز پیموده ام مدیون تلاشهای قابل تقدیر تمامی اساتیدی می دانم که از آغاز یاری ام داده اند. از استاد ارجمند و نیک اندیشم جناب آقای دکتر محمدعلی یعقوبی که فکر جوان و کم تجربه ام را با همراهی دلسوزانه و بی دریغشان راه رفتن آموخت، صمیمانه سپاسگذارم و از خداوند مهربان می خواهم که روشنگر راهشان باشد.

از اساتید بزرگوار آقایان دکتر ماشاالله ماشین چی و دکتر محمدعلی ولی به خاطر وقت و حوصله ای که صرف مطالعه و داوری این پایان نامه نمودند تشکر می کنم و سلامتی و توفیق روزافزونشان را آرزو می کنم.

از همسرم عزیزم که در طول مدت تحصیل همواره وجودش مایه تشویق و همراهی ام بود قدردانی می کنم.

در پایان از خانم عهدیه زمزم زاده و همه دوستانم که در مدت تحصیل یاریم کردند تشکر می کنم.

باشد که در تمام زندگی سعادت و نیکبختی نصیبشان گردد.

تشکر و قدردانی

بهترین سپاسها شایسته پروردگار سبحان که پرتو هدایتش روشنگر تاریکی هاست. خداوند مهربان را شکرگزارم که توفیق آموختن و فرصت اندیشیدن را به من عطا فرموده تا از پی سالها تحصیل دریابم که آنچه جستنی است تنها اوست.

با تشکر و قدردانی از پدر بزرگوار و مادر مهربانم که تمام لحظات زندگی ام با وجود گرمشان پرفروغ است. توانشان رفت تا به توانایی برسم و مویشان سپید گشت تا رویم سپید بماند. در برابر قدمهایشان زانوی ادب بر زمین می گذارم و با قلبی مملو از عشق و خضوع بر دستانشان بوسه می زنم. سرو وجودشان همیشه سرسبز و استوار.

همواری راهی که تا به امروز پیموده ام مدیون تلاشهای قابل تقدیر تمامی اساتیدی می دانم که از آغاز یاری ام داده اند. از استاد ارجمند و نیک اندیشم جناب آقای دکتر محمدعلی یعقوبی که فکر جوان و کم تجربه ام را با همراهی دلسوزانه و بی دریغشان راه رفتن آموخت، صمیمانه سپاسگذارم و از خداوند مهربان می خواهم که روشنگر راهشان باشد.

از اساتید بزرگوار آقایان دکتر ماشاالله ماشین چی و دکتر محمدعلی ولی به خاطر وقت و حوصله ای که صرف مطالعه و داوری این پایان نامه نمودند تشکر می کنم و سلامتی و توفیق روزافزونشان را آرزو می کنم.

از همسرم عزیزم که در طول مدت تحصیل همواره وجودش مایه تشویق و همراهی ام بود قدردانی می کنم.

در پایان از خانم عهدیه زمزم زاده و همه دوستانم که در مدت تحصیل یاریم کردند تشکر می کنم.

باشد که در تمام زندگی سعادت و نیکبختی نصیبشان گردد.

چکیده

سیستم کنترل موجودی مرور دوره ای سیستمی است که در آن سفارشی موسوم بـه سـفارش معـین در مقاطعی از زمان به فاصله مساوی از یکدیگر صادر و بعد از زمان مشخصی کالا به انبار می رسد. وقتـی که هزینه کمبود خیلی زیاد باشد مقرون به صرفه است که سیستم مجـاز بـه سـفارش اضـطراری باشـد. زمان تحویل سفارش اضطراری خیلی کمتر از سفارش معین است اما هزینـه بیـشتری بـرای سیـستم بـه دنبال دارد و این در حالی است که هزینه سفارش اضطراری از هزینه کمبود کمتر است. در این سیستم زمان مناسب و میزان سفارش اضطراری بر اساس موجودی خالص تعیین می شـود. در ایـن پایـان نامـه چنین سیستم هایی بررسی می شوند. سفارش اضطراری در زمانهـایی از دوره درسـت قبـل از رسـیدن سفارش معین زمانی که احتمالاً کمبود حداکثر است، صادر می شود. همچنین با توجـه بـه مشخـصات سیستم می توان هزینه تقریبی چنین سیستمی را بدست آورد و این هزینه را بهینه کرد. بعلاوه می توان سطح بهینه سفارش معین و اضطراری را محاسبه نمود.

فهرست مطالب

عنوان | صفحه

فصل اول

تعاریف و پیش نیازها

۱-۱ مقدمه

در این فصل قضایا و تعاریف اساسی که در فصلهای بعد مورد استفاده قرار می گیرند، آمده است. ابتدا مقدمه ای از برنامه ریزی غیرخطی و شرایط بهینگی در برنامه ریزی غیرخطی آورده شده، سپس قواعدی در مورد مشتقگیری و روشی برای محاسبه انتگرال دوگانه آورده شده است. همچنین مطالبی از آمار و احتمال که مورد نیاز می باشند در ادامه اشاره شده اند. برای مطالعه جامع و بیشتر پیرامون موارد ذکر شده، مراجع مناسب ذکر شده است.

۱-۲ مقدمه ای بر برنامه ریزی غیر خطی[1]

مسئله برنامه ریزی غیر خطی زیر را در نظر بگیرید [۱۰]:

$$
\begin{aligned}
\min \quad & z = f(\mathrm{x}) \\
s.t. \quad & g_i(\mathrm{x}) \le 0 \qquad \text{for} \quad i = 1, \cdots, m \\
& h_i(\mathrm{x}) = 0 \qquad \text{for} \quad i = 1, \cdots, l
\end{aligned}
\tag{۱-۱}
$$

که در آن f؛ g_1 , ... , g_m؛ $h_1, \dots, h_l$ توابع تعریف شده روی $\Re^n$ هستند.

هدف مدل (۱-۱) یافتن مقادیری برای متغیر $\mathrm{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ است که در قیدها صدق کنند و در ضمن تابع $f(x)$ کمینه شود. تابع f معمولاً تابع هدف، هر قید $g_i(\mathrm{x}) \le 0$ ($i = 1, \cdots, m$) قید نامساوی و هر قید $h_i(\mathrm{x}) = 0$ ($i = 1, \cdots, l$) قید مساوی نامیده می شود. یک بردار $\mathrm{x} \in \Re^n$ که در همه قیدها صدق کند، جواب شدنی و جواب شدنی $\overline{\mathrm{x}}$ که $f(\overline{\mathrm{x}}) \le f(\mathrm{x})$ برای هر نقطه شدنی x، جواب بهین نامیده می شود.

[1] -Non-Linear programming

مسئله برنامه ریزی غیر خطی همچنین می تواند بصورت بیشینه سازی باشد و قیدهای نامساوی نیز می توانند به فرم $g_i(\mathrm{x}) \geq 0$ ($i=1,\cdots,m$) باشند.

مثال ۱-۲-۱: مسئله زیر یک مسئله برنامه ریزی غیر خطی است.

$$\begin{aligned} \min \quad & z = x_1 + 2x_2^{\ 2} + x_1x_3 \\ s.t. \quad & x_1 + x_2 + x_3 = 10 \\ & x_1^{\ 2} + x_2^{\ 2} \geq 5 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

مثال ۱-۲-۲: مسئله زیر یک مسئله برنامه ریزی غیر خطی بدون قید است.

$$\min z = x_1 + 2x_2^{\ 2} + x_1x_3 \, .$$

تعریف ۱-۲-۳: برای مجموعه $S \subset \Re^n$، اگر به ازای هر دو نقطه $\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2 \in S$ و برای هر $\lambda \in [0,1]$، $\lambda \mathrm{x}_1 + (1-\lambda)\mathrm{x}_2 \in S$ باشد، آنگاه مجموعه S محدب نامیده می شود.

تعریف ۱-۲-۴: فرض کنید $f: S \to \Re$ یک تابع و S مجموعه ای محدب و ناتهی باشد. اگر به ازای هر دو نقطه $\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2 \in S$ و برای هر $\lambda \in [0,1]$ $f(\lambda \mathrm{x}_1 + (1-\lambda)\mathrm{x}_2) \leq \lambda f(\mathrm{x}_1) + (1-\lambda) f(\mathrm{x}_2)$ باشد، تابع f محدب نامیده می شود.

تعریف ۱-۲-۵: فرض کنید $f: \Re^n \to \Re$ یک تابع و $\overline{\mathrm{x}} \in \Re^n$ باشد. هرگاه همسایگی به شعاع ε حول $\overline{\mathrm{x}}$ ($N_\varepsilon(\overline{\mathrm{x}})$) موجود باشد بطوری که $f(\overline{\mathrm{x}}) \leq f(\mathrm{x})$ باشد برای هر $\mathrm{x} \in N_\varepsilon(\overline{\mathrm{x}})$، آنگاه $\overline{\mathrm{x}}$ کمینه موضعی[۱] نامیده می شود. در صورتیکه برای هر $\mathrm{x} \in N_\varepsilon(\overline{\mathrm{x}})$، $f(\overline{\mathrm{x}}) < f(\mathrm{x})$ باشد آنگاه $\overline{\mathrm{x}}$ را کمینه موضعی اکید می نامند.

---

[۱] - Local minimum

تعریف ۱-۲-۶: فرض کنید $f:\Re^n \to \Re$ یک تابع و $\overline{\mathrm{x}} \in \Re^n$ باشد. اگر $f(\overline{\mathrm{x}}) \le f(\mathrm{x})$ برای هر $\mathrm{x} \in \Re^n$، آنگاه $\overline{\mathrm{x}}$ کمینه سراسری[۱] نامیده می شود.

قضیه ۱-۲-۷: فرض کنید S مجموعه ای محدب و ناتهی در $\Re^n$ و تابع $f:S \to \Re$ محدب باشد. مسئله
$$\begin{array}{ll} \min & f(\mathrm{x}) \\ s.t. & \mathrm{x} \in S \end{array}$$
را در نظر بگیرید. اگر $\overline{\mathrm{x}} \in S$ جواب کمینه موضعی مسئله باشد، آنگاه $\overline{\mathrm{x}}$ جواب کمینه سراسری (جواب بهین) است.

اثبات: به [۱۰] صفحه ۱۰۱ مراجعه شود.

تعریف ۱-۲-۸: هرگاه S مجموعه ای ناتهی در $\Re^n$ و $\overline{\mathrm{x}}$ نقطه درونی S و تابع $f:S \to \Re$ در $\overline{\mathrm{x}}$ دارای مشتقات جزئی باشد، بردار گرادیان که با $\nabla f(\overline{\mathrm{x}})$ نشان داده می شود، بصورت زیر تعریف می شود:
$$\nabla f(\overline{\mathrm{x}}) = \left(\frac{\partial f(\overline{\mathrm{x}})}{\partial x_1}, \frac{\partial f(\overline{\mathrm{x}})}{\partial x_2}, \cdots, \frac{\partial f(\overline{\mathrm{x}})}{\partial x_n}\right).$$

تعریف ۱-۲-۹: هرگاه تابع $f:\Re^n \to \Re$ در $\overline{\mathrm{x}}$ دارای مشتقات جزئی مرتبه دوم پیوسته باشد، ماتریس هسیان[۲] در نقطه $\overline{\mathrm{x}}$ که با $\mathrm{H}(\overline{\mathrm{x}})$ نشان داده می شود، شامل مشتقات جزئی مرتبه دوم $\frac{\partial^2 f(\overline{\mathrm{x}})}{\partial x_i x_j}$ برای $i=1,2,\cdots,n$ و $j=1,2,\cdots,n$ می باشد:

$$\mathrm{H}(\overline{\mathrm{x}}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(\overline{\mathrm{x}}) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(\overline{\mathrm{x}}) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(\overline{\mathrm{x}}) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(\overline{\mathrm{x}}) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(\overline{\mathrm{x}}) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n}(\overline{\mathrm{x}}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(\overline{\mathrm{x}}) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2}(\overline{\mathrm{x}}) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(\overline{\mathrm{x}}) \end{bmatrix}.$$

۱ - Global minimum
۲ - Hessian Matrix

مثال ۱-۲-۱۰: فرض کنید $f(x_1,x_2)=2x_1+6x_2-2x_1^2-3x_2^2+4x_1x_2$ آنگاه

$$\nabla f(\mathrm{x})=\begin{pmatrix}2-4x_1+4x_2 & 6-6x_2+4x_1\end{pmatrix} \text{ و } \mathrm{H}(\mathrm{x})=\begin{bmatrix}-4 & 4\\ 4 & -6\end{bmatrix}.$$

تعریف ۱-۲-۱۱: فرض کنید A یک ماتریس متقارن $n\times n$ باشد.

- اگر $\mathrm{x}^t\mathrm{A}\mathrm{x}>0$ باشد برای همه بردارهای ستونی ناصفر x در $\Re^n$، ماتریس A معین مثبت[۱] نامیده می شود.
- اگر $\mathrm{x}^t\mathrm{A}\mathrm{x}\geq 0$ باشد برای همه بردارهای ستونی ناصفر x در $\Re^n$، ماتریس A نیمه معین مثبت[۲] نامیده می شود.

قضیه ۱-۲-۱۲: ماتریس هسیان تابع $f:\Re^n\to\Re$ معین مثبت است اگر و فقط اگر

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}>0 \text{ و } \begin{vmatrix}\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_2}\\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2\partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}\end{vmatrix}>0 \text{ و } \dots \text{ و } \begin{vmatrix}\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_n}\\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2\partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2\partial x_n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n\partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}\end{vmatrix}>0.$$

اثبات: به [۸] مراجعه کنید.

۱ - Positive definite
۲ - Positive semidefinite

قضیه ۱-۲-۱۳: ماتریس هسیان تابع $f:\Re^n \to \Re$ نیمه معین مثبت است اگر و فقط اگر

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} \geq 0 \text{ و } \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \end{vmatrix} \geq 0 \text{ و } \ldots \text{ و } \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{vmatrix} \geq 0.$$

اثبات: به [۸] مراجعه کنید.

لم ۱-۲-۱۴: ماتریس متقارن $H = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$ را در نظر بگیرید

- ماتریس H معین مثبت است اگر و تنها اگر $a > 0$ و $c > 0$ و $ac - b^2 > 0$.
- ماتریس H نیمه معین مثبت است اگر و تنها اگر $a \geq 0$ و $c \geq 0$ و $ac - b^2 \geq 0$.

اثبات: به [۱۰] صفحه ۹۶ مراجعه شود.

قضیه ۱-۲-۱۵: فرض کنید S مجموعه ای محدب و ناتهی در $\Re^n$ باشد و تابع $f:S \to \Re$ روی S دارای مشتقات مرتبه دوم پیوسته باشد. تابع f محدب است اگر و تنها اگر ماتریس هسیان در هر نقطه S نیمه معین مثبت باشد.

اثبات: به [۱۰] صفحه ۹۱ مراجعه شود.

نتیجه ۱-۲-۱۶: فرض کنید S مجموعه ای محدب و ناتهی در $\Re$ باشد و تابع $f:S \to \Re$ روی S دو بار مشتق پذیر باشد. تابع f محدب است اگر و تنها اگر برای هر $x \in \Re$، $f''(x) \geq 0$ باشد.

۱-۳ شرایط لازم بهینگی برنامه ریزی غیر خطی

قضیه زیر شرط لازم بهینگی یک جواب را برای یک مسئله برنامه ریزی غیر خطی بیان می کند.

قضیه ۱-۳-۱: فرض کنید تابع $f:\mathfrak{R}^n \to \mathfrak{R}$ در $\overline{\mathrm{x}}$ دارای مشتقات جزئی باشد. اگر $\overline{\mathrm{x}}$ کمینه موضعی باشد، آنگاه $\nabla f(\overline{\mathrm{x}})=0$ است.

اثبات: به [۱۰] صفحه ۱۳۳ مراجعه شود.

در قضیه بالا از بردار گرادیان استفاده شده است که مؤلفه های آن مشتقات جزئی مرتبه اول تابع f هستند. از این روشرایط لازم بهینگی (صفر بودن مشتقات جزئی مرتبه اول در جواب بهین) شرایط بهینگی مرتبه اول[۱] نیز نامیده می شوند.

نتیجه ۱-۳-۲: فرض کنید تابع $f:\mathfrak{R}\to\mathfrak{R}$ در $\overline{x}$ مشتق پذیر باشد. اگر $\overline{x}$ کمینه موضعی باشد، آنگاه $f'(\overline{x})=0$ است.

قضیه ۱-۳-۳: فرض کنید تابع $f:\mathfrak{R}^n \to \mathfrak{R}$ دارای مشتقات جزئی مرتبه دوم پیوسته در $\overline{x}$ باشد. اگر $\overline{\mathrm{x}}$ کمینه موضعی باشد آنگاه $\nabla f(\overline{\mathrm{x}})=0$ و ماتریس $\mathrm{H}(\overline{\mathrm{x}})$ نیمه معین مثبت است.

اثبات: به [۱۰] صفحه ۱۳۳ مراجعه شود.

نتیجه ۱-۳-۴: فرض کنید تابع $f:\mathfrak{R}\to\mathfrak{R}$ در $\overline{x}$ دو بار مشتق پذیر باشد. اگر $\overline{x}$ کمینه موضعی باشد آنگاه $f'(\overline{x})=0$ و $f''(\overline{x})\geq 0$ است.

---

۱ - First order condition

۱-۴ شرایط کافی بهینگی برنامه ریزی غیر خطی

در بخش قبل برخی شرایط لازم بهینگی برای یک جواب مسئله برنامه ریزی غیرخطی بررسی شد. در این بخش برخی شرایط کافی معرفی می شوند [۱۰].

قضیه ۱-۴-۱: فرض کنید تابع $f:\Re^n \to \Re$ در $\bar{x}$ دارای مشتقات جزئی مرتبه دوم پیوسته باشد. اگر $\nabla f(\bar{x})=0$ و ماتریس $H(\bar{x})$ معین مثبت باشد آنگاه $\bar{x}$ کمینه موضعی اکید است.

اثبات: به [۱۰] صفحه ۱۳۴مراجعه شود.

در قضیه بالا از بردار گرادیان و ماتریس هسیان استفاده شده و ماتریس هسیان شامل مشتقات جزئی مرتبه دوم تابع f است. از این رو شرایط قضیه ۱-۴-۱، شرایط مرتبه دوم[۱] نامیده می شوند.

مثال ۱-۴-۲: کمینه موضعی تابع $f(x,y)=2x^4+y^2-x^2-2y$ را بیابید.

حل: برای بهره گیری از قضیه ۱-۴-۱ ابتدا باید مشتقات جزئی مرتبه اول را بدست آورد:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=8x^3-2x \text{ و } \frac{\partial f}{\partial y}=2y-2$$

باقرار دادن $\frac{\partial f}{\partial x}=0$ نتیجه می شود که $x=\frac{1}{2}$، $x=0$، $x=-\frac{1}{2}$ ، با قرار دادن $\frac{\partial f}{\partial y}=0$، $y=1$ بدست می آید.

همچنین:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial x}=24x^2-2,\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial y}=2,\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=0,\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=0.$$

در دو نقطه $\left(-\frac{1}{2},1\right)$ و $\left(\frac{1}{2},1\right)$:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=4,\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=2,\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=0,\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=0$$

در نتیجه ماتریس هسیان برابر است با:

$$H=\begin{bmatrix}4 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}.$$

---
[۱] - Second order condition

ماتریس هسیان فوق معین مثبت است. از این رو نقاط $\left(\frac{1}{2},1\right)$ و $\left(-\frac{1}{2},1\right)$ هر دو کمینه موضعی اکید هستند.

در نقطه $(0,1)$، ماتریس هسیان معین مثبت نیست.

نتیجه ۱-۴-۳: فرض کنید تابع $f:\Re\to\Re$ در $\bar{x}$ دو بار مشتق پذیر باشد. اگر $f'(\bar{x})=0$ و $f''(\bar{x})>0$ باشد آنگاه $\bar{x}$ کمینه موضعی اکید است.

مثال ۱-۴-۴: کمینه موضعی تابع $f(x)=12x^5-45x^4+40x^3+5$ را بیابید.

طبق نتیجه ۱-۴-۳:

$$f'(x)=60\left(x^4-3x^3+2x^2\right)=60x^2(x-1)(x-2)$$

در $x=0$، $x=1$ و $x=2$، $f'(x)=0$ است.

$$f''(x)=60\left(4x^3-9x^2+4x\right)$$

در $x=2$، $f''(x)=240>0$ است بنابراین $f(x)$ در $x=2$ کمینه موضعی اکید دارد.

۱-۵ برخی از قواعد مشتقگیری و انتگرالگیری

۱-۵-۱ قاعده زنجیره ای در مورد مشتقگیری از توابع دو متغیره

در این بخش قاعده زنجیره ای در مورد مشتقگیری از توابع دو متغیره یادآوری می شود [۱۳].

تعریف ۱-۵-۱: هرگاه $u=f(x(t))$ و $x(t)$ تابعی مشتق پذیر باشد، آنگاه $\frac{du}{dt}=\frac{df}{dx}\times\frac{dx}{dt}$.

نتیجه ۱-۵-۲: هرگاه $w=f(x(t),y(t))$ و $x(t)$ و $y(t)$ توابعی مشتق پذیر و f و $\frac{\partial f}{\partial x}$ و $\frac{\partial f}{\partial y}$ پیوسته باشند، آنگاه $\frac{dw}{dt}=\frac{\partial f}{\partial x}\times\frac{dx}{dt}+\frac{\partial f}{\partial y}\times\frac{dy}{dt}$.