بسم الله الرحمن الرحیم

دانشکده علوم

گروه ریاضی محض

زیرمدول‌های اول، مدول‌های ضربی و فرمول رادیکالی

استاد راهنما

دکتر ناصر زمانی

اساتید مشاور

دکتر محمد باقر مقیمی

دکتر جعفر اعظمی

توسط

زینب حکیمی

دانشگاه محقق اردبیلی

پاییز ۱۳۸۹

دانشکده علوم

گروه ریاضی

زیرمدول‌های اول، مدول‌های ضربی و فرمول رادیکالی

پژوهشگر:

زینب حکیمی

پایان‌نامه برای اخذ درجه کارشناسی ارشد

در رشته ریاضی محض (گرایش جبر)

از

دانشگاه محقق اردبیلی

اردبیل - ایران

ارزیابی و تصویب شده توسط کمیته پایان‌نامه با درجه: عالی

دکتر ناصر زمانی (استاد راهنما و رئیس کمیته داوران): ....استادیار

دکتر محمد باقر مقیمی(استادمشاور)..................................استادیار

دکتر جعفر اعظمی (استاد مشاور)....................................استادیار

دکتر سید احمد موسوی(داورخارجی)..................................دانشیار

دکتر احمد خوجالی(داورداخلی).......................................استادیار

مهر ۱۳۸۹

تقدیم به

ارزشمندترین سرمایه‌های زندگیم

پدر مهربان

و

مادر عزیزم

قدردانی

مهربان خدای بی‌همتا را سپاس که به من آرامش داد تا بپذیرم آنچه را که نمی‌توانم تغییر دهم، قدرت داد تا تغییر دهم آنچه را که می‌توانم تغییر دهم، بینش داد تا تفاوت این دو را بدانم و مرا فهم داد تا متوقع نباشم دنیا و مردم آن مطابق میل من رفتار کنند. حال که به یاری آن ذات یگانه موفق به طی مرحله دیگری از علم شده‌ام ارادت خود را به محضر عزیزانی که در این راه مرا یاری کردند اعلام می‌نمایم. در ابتدا از دو گوهر گرانبهای زندگیم پدر و مادر عزیزم که همه داشته‌هایم تلالوی زیبای محبت‌های بی‌دریغشان است صمیمانه قدردانی می‌کنم. تشکر ویژه خود را به استاد ارجمندم جناب آقای دکتر زمانی به خاطر راهنمایی‌ها و تشویق‌های ارزنده‌شان ابراز می‌دارم و برای ایشان عزت و سربلندی آرزو می‌کنم. از اساتید مشاورم جناب آقای دکتر مقیمی و جناب آقای دکتر اعظمی نیز کمال تشکر را دارم. همچنین از داور خارجی جناب آقای دکتر موسوی از دانشگاه تربیت مدرس تهران و داور داخلی جناب آقای دکتر خوجالی که با دقت و حوصله این پایان‌نامه را مطالعه و داوری کردند سپاسگزارم. از همه اعضای خانواده بویژه برادران عزیزم که همواره مشوق و پشتیبان من بودند تشکر می‌کنم. در نهایت از همه دوستان خوبم بویژه خانمها بی‌نیاز، بیگدلی و حسینی که لحظات شیرین و فراموش‌نشدنی در کنارشان داشتم قدردانی می‌نمایم. امیدوارم که خداوند تبارک و تعالی توفیق بودن دوباره در محیط مقدس علم را نصیبم گرداند.

زینب حکیمی

پاییز ۱۳۸۹

نام خانوادگی دانشجو : **حکیمی** نام: زینب

عنوان پایان نامه:

زیرمدول‌های اول، مدول‌های ضربی و فرمول رادیکالی

استاد راهنما: **دکتر ناصر زمانی**

اساتید مشاور: **دکتر محمد باقر مقیمی و دکتر جعفر اعظمی**

مقطع تحصیلی: **کارشناسی ارشد** رشته: **ریاضی محض** گرایش: **جبر**

دانشگاه: **محقق اردبیلی** دانشکده: **علوم**

تاریخ فارغ التحصیلی: **۸۹/۷/۳** تعداد صفحه: **۱۰۰**

کلید واژه‌ها :

زیرمدول‌های اول، مدول‌های ضربی، مدول‌های قابل‌نمایش، مدول‌های مک‌کاسلند، فرمول رادیکال.

چکیده:

فرض کنیم R یک حلقه جابجایی یکدار و M یک Rـمدول یکانی باشد. در این پایان‌نامه نشان می‌دهیم مدول‌های ضربی آرتینی، دوری هستند و ثابت می‌کنیم که اگر N زیرمدولی سره از Rـمدول ضربی M و $\underline{a} = Ann_R(M/N)$، آنگاه $rad_M(N) = (\sqrt{\underline{a}})M$. همچنین شرایطی را که تحت آن‌ها یک مدول قابل‌نمایش در فرمول رادیکال صدق می‌کند، بررسی می‌کنیم. بعلاوه نشان می‌دهیم هر حلقه حسابی R با $dimR \leq ۱$ در فرمول رادیکال صدق می‌کند. همچنین ثابت می‌کنیم اگر $R/radR$ نیم‌ساده باشد، آنگاه R در فرمول رادیکال صدق می‌کند. در نهایت شرایط لازم و کافی را برای برقراری تساوی در رابطه

$$\sqrt{N :_R M}M \subseteq RE_M(N) \subseteq rad_M(N)$$

تعیین می‌کنیم.

فهرست مندرجات

مقدمه

این پایان‌نامه عمدتاً مبتنی بر مقالات [۱]،[۲],[۱۸] می‌باشد. از سایر مقالات و کتب نیز جهت توضیح هرچه بیشتر استفاده می‌شود. محتوای این پایان‌نامه در چهار فصل به شرح زیر تنظیم شده است.

فصل اول شامل تعاریف و مقدماتی است که در فصل‌های بعد مورد نیاز است.

در فصل دوم زیرمدول‌های اول را مطالعه می‌کنیم. این زیرمدول‌ها عمدتاً توسط افرادی مانند لو[۱]، اسمیت[۲]، مک‌کاسلند[۳]، مور[۴] و غیره مطالعه شده و منجر به نتایج جالبی در مورد شناسایی ساختار مدول‌ها شده‌اند.

در فصل سوم مدول‌های ضربی را معرفی می‌کنیم. در سال (۱۹۲۶) کرول[۵] حلقه‌های ضربی را به عنوان تعمیمی از حلقه‌های ددکیند[۶] معرفی کرد. ارتباط این نوع حلقه‌ها با سایر حلقه‌های شناخته شده، از جمله حلقه‌های پروفر[۷] و ZP-حلقه‌ها در متون جبر جابجایی به تفصیل آمده است. مدول‌های ضربی به عنوان تعمیمی از حلقه‌های ضربی اولین بار توسط

[۱] Lu

[۲] $Smith$

[۳] $McCasland$

[۴] $Moore$

[۵] $Krull$

[۶] $Dedekind$

[۷] $Prufer$

بارنارد [8] در [۴] معرفی شد و بعد از آن توسط افرادی مانند نائوم [9]، عبدالباسط[10]، اردوغدو[11]، اسمیت و دیگران مورد بررسی قرار گرفته‌اند. در این فصل نشان می‌دهیم مدول‌های ضربی آرتینی، دوری هستند. همچنین ثابت می‌کنیم اگر N زیرمدولی سره از Rـمدول ضربی M و $\underline{a} = Ann_R(M/N)$، آنگاه $rad_M(N) = (\sqrt{\underline{a}})M$.

در فصل چهارم فرمول رادیکال را بررسی می‌کنیم. فرمول رادیکال برای اولین بار توسط مک‌کاسلند ارائه شد. ثابت شده است که مجموعه همه اعضای پوچ‌توان یک حلقه جابجایی یک ایده‌آل از آن است و مساوی است با مقطع تمام ایده‌آل‌های اول حلقه. این مطلب توسط مک‌کاسلند به مدول‌ها تعمیم داده شد؛ یعنی رادیکال یک زیرمدول N از مدول M به صورت مقطع همه زیرمدول‌های اول M که شامل N هستند تعریف شد. در این فصل ضمن ارائه قضایایی پایه‌ای در مورد فرمول رادیکال، مدول‌های صادق در فرمول رادیکال را بررسی می‌کنیم. مک‌کاسلند و مور در سال (۱۹۹۱) برای اولین بار مدول‌های صادق در فرمول رادیکال را معرفی کردند و نشان دادند که اگر R یک حوزه ایده‌آل اصلی باشد آنگاه هر Rـمدول متناهی مولد در فرمول رادیکال صدق می‌کند. در سال (۱۹۹۲) ینکینس [12] و اسمیت بررسی کردند که هر دامنه ددکیند به عنوان حلقه در فرمول رادیکال صدق می‌کند. لیونگ[13] و من[14] در سال (۱۹۹۷) ثابت کردند اگر R یک حوزه صحیح جابجایی نوتری باشد، آنگاه Rـمدول $R \oplus R$ در فرمول رادیکال صدق می‌کند. همچنین نشان دادند به ازای هر حلقه نوتری R، هر Rـمدول در فرمول رادیکال صدق می‌کند اگر و فقط اگر Rـمدول $R \oplus R$ در فرمول رادیکال صدق کند. بعلاوه آن‌ها بررسی کردند که اگر R یک حوزه صحیح نوتری باشد، آنگاه Rـمدول $R \oplus R$ در فرمول رادیکال صدق می‌کند اگر و فقط اگر R یک

[8] $Barnard$

[9] $Naoum$

[10] $Abd\ El-Bast$

[11] $Erdoghdu$

[12] $Jenkins$

[13] $Leung$

[14] Man

حوزه صحیح ددکیند باشد. لیونگ و من در نهایت ثابت کردند که هر حلقه آرتینی در فرمول رادیکال صدق می‌کند. در سال (۲۰۰۲) اسمیت و یلماز [۱۵] نشان دادند که هر Rـمدول دوری در فرمول رادیکال صدق می‌کند. آنها همچنین ثابت کردند که هر Rـمدول نیم‌آرتینی خاص است. از طرفی هر Rـمدول خاص در فرمول رادیکال صدق می‌کند. پس هر مدول نیم‌آرتینی در فرمول رادیکال صدق می‌کند. رده مدول‌های قابل‌نمایش در حالت کلی وسیعتر از رده مدول‌های آرتینی است. در این فصل شرایطی را بررسی می‌کنیم که تحت آن‌ها یک مدول قابل‌نمایش در فرمول رادیکال صدق می‌کند. بعلاوه فرمول رادیکال درجه n را معرفی می‌کنیم و نشان می‌دهیم اگر R یک حلقه حسابی با بعد کرول متناهی n باشد، آنگاه در فرمول رادیکال درجه n صدق می‌کند. در نتیجه هر حلقه حسابی با $\dim R \leq ۱$ در فرمول رادیکال صدق می‌کند. در نهایت رادیکال‌ها و پوشش‌ها را برای رده خاصی از زیرمدول‌ها بررسی کرده و نشان می‌دهیم اگر $R/radR$ نیم‌ساده باشد، آنگاه R در فرمول رادیکال صدق می‌کند. همچنین شرایط لازم و کافی را برای برقراری تساوی در رابطه

$$\sqrt{N :_R M}M \subseteq RE_M(N) \subseteq rad_M(N)$$

تعیین می‌کنیم.

[۱۵] $Yilmaz$

فصل ۱

تعاریف و مقدمات

۱.۱ مفاهیم اولیه

در سراسر این پایان‌نامه A یک حلقه و X یک Aـمدول است. همچنین R حلقه‌ای جابجایی و یکدار و M یک Rـمدول یکانی می‌باشد. اعداد طبیعی را با $\mathbb{N}$ و اعداد صحیح را با $\mathbb{Z}$ نشان خواهیم داد. در این فصل مقدماتی ارائه می‌شود که در فصل‌های بعد مورد استفاده قرار می‌گیرند.

زیرمدول N از M را اول می‌نامیم هرگاه $N \neq M$ و به ازای هر $r \in R$ و $m \in M$، اگر $rm \in N$، آنگاه داشته باشیم $m \in N$ یا $r \in (N :_R M)$. در این حالت $p = (N :_R M)$ ایده‌آل اول R است و N را pـاول [1] می‌نامیم.

زیرمدول سره B از Aـمدول X را ماکزیمال می‌نامیم هرگاه هیچ زیرمدولی بین B و X نباشد؛ یعنی اگر L زیرمدول X باشد بطوریکه $B \subseteq L \subseteq X$، آنگاه $B = L$ یا $L = X$.

Aـمدول X را نوتری ضعیف [2] می‌نامیم هرگاه به ازای هر $a \in A$ و $x \in X$، زیرمدول $AaAx$ متناهی مولد باشد. اگر A یک حلقه جابجایی باشد، آنگاه هر Aـمدول، نوتری ضعیف است.

Aـمدول غیرصفر X را ساده [3] می‌نامیم هرگاه صفر و X تنها زیرمدول‌های آن باشند. اگر p عددی اول باشد آنگاه $\mathbb{Z}_p$ یک $\mathbb{Z}$ـمدول ساده است.

بدیهی است که هر مدول ساده دوری است ولی یک مدول دوری لزوماً ساده نیست.

[1] $p - prime$

[2] $Weakly\ noetherian$

[3] $Simple$

حلقه A را ساده می‌نامیم هرگاه

۱) $A^2 \neq 0$؛ به عبارت دیگر $a, b \in A$ وجود داشته باشند بطوریکه $ab \neq 0$.

۲) A دارای ایده‌آل غیربدیهی نباشد.

Aـمدول X را نیم‌ساده [۴] می‌نامیم هرگاه به ازای هر زیرمدول از X مثل K، زیرمدولی از X مثل P موجود باشد بطوریکه $X = K \oplus P$.

توجه می‌کنیم که هر مدول ساده، نیم‌ساده است. همچنین مدول صفر که ساده نیست، نیم‌ساده است. فضاهای برداری متناهی بعد نیز به عنوان مدول روی میدان، نیم‌ساده هستند.

حلقه A را نیم‌ساده می‌نامیم هرگاه به عنوان Aـمدول نیم‌ساده باشد.

حلقه R را شبه موضعی [۵] می‌نامیم هرگاه دارای ایده‌آل ماکزیمال منحصربفرد $\mathbf{m}$ باشد. حلقه شبه‌موضعی R را همراه با ایده‌آل ماکزیمال $\mathbf{m}$ با نماد $(R, \mathbf{m})$ نشان می‌دهیم.

قضیه زیر شناخته شده است.

قضیه ۱.۱.۱. فرض کنیم X، Aـمدولی نیم‌ساده باشد. در این صورت هر زیرمدول از X و هر مدول خارج‌قسمتی از X نیز نیم‌ساده هستند.

اثبات: به منبع [۱۰] مراجعه شود. $\square$

قضیه ۲.۱.۱. فرض کنیم X، Aـمدولی نیم‌ساده و غیرصفر باشد. در این صورت X شامل زیرمدولی ساده است.

اثبات: فرض کنیم $0 \neq x \in X$. چون Ax زیرمدول غیرصفر متناهی مولد (دوری) از X است پس شامل یک زیرمدول ماکزیمال مثل N است. چون X نیم‌ساده است و Ax

[۴] $Semisimple$

[۵] $Quasi\ local$

زیرمدولی از آن است بنا به قضیه قبل Ax نیز نیم‌ساده است. اما N زیرمدولی از Ax است پس زیرمدولی از Ax مثل N' موجود است که $Ax = N \oplus N'$. حال توجه می‌کنیم که $N' \cong Ax/N$ و چون N زیرمدول ماکزیمال Ax است پس N' ساده است. لذا X شامل زیرمدول ساده N' است. □

قضیه ۳.۱.۱. برای حلقه مفروض A شرایط زیر معادلند.

۱) A حلقه‌ای نیم‌ساده است.

۲) هر Aـمدول نیم‌ساده است.

۳) هر دنباله دقیق کوتاه از Aـمدول‌ها و Aـهمریختی‌ها شکافته می‌شود.

۴) هر Aـمدول پروژکتیو است.

اثبات: به منبع [۱۰] مراجعه شود. □

مجموعه همه ایده‌آل‌های اول حلقه R را طیف R [۶] می‌گوییم و با نماد $\mathrm{Spec}(R)$ نمایش می‌دهیم. بعد (بعد کرول) حلقه R عبارت است از سوپریمم طول زنجیرهایی از عناصر $\mathrm{Spec}(R)$. بعد R را با $\dim R$ نشان می‌دهیم. اگر این سوپریمم موجود نباشد قرار می‌دهیم $\dim R = +\infty$.

تعریف ۴.۱.۱. فرض کنیم M، Rـمدول و N یک زیرمدول سره M باشد. رادیکال N در M را با $rad_M(N)$ نشان می‌دهیم و عبارت است از مقطع همه زیرمدول‌های اول M که شامل N باشند. اگر N مشمول در هیچ زیرمدول اول M نباشد، قرار می‌دهیم $rad_M(N) = M$. همچنین رادیکال حلقه R $(radR)$ عبارت است از مقطع همه ایده‌آل‌های اول R. بعلاوه زیرمدول N را زیرمدول رادیکال می‌نامیم هرگاه $rad_M(N) = N$.

[۶] $Spectrum$

تعریف ۵.۱.۱. فرض کنیم M یک Rـمدول و N زیرمدول M باشد. زیرمجموعه $E_M(N)$ از M را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$E_M(N) = \{x \in M \mid \exists r \in R, \exists m \in M, \exists n \in \mathbb{N} \; ; x = rm, r^n m \in N\}$$

بدیهی است که $0 \in E_M(N)$ ولی در حالت کلی $E_M(N)$ زیرمدولی از M نیست. به مثال زیر توجه شود.

مثال ۱ : $\mathbb{Z}$ـمدول $M = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ و زیرمدول $N = 4\mathbb{Z} \oplus 3\mathbb{Z}$ از M را در نظر می‌گیریم. آنگاه $E_M(N)$ زیرمدول M نمی‌باشد.

اثبات: $x = (2, 0) \in E_M(N)$. از طرفی $y = (0, 3) \in E_M(N)$، اما

$$x + y = (2, 3) \notin E_M(N).$$

□

تعریف ۶.۱.۱. زیرمدول تولید شده توسط $E_M(N)$ را پوشش N در M می‌نامیم و با نماد $RE_M(N)$ نشان می‌دهیم.

اگر $g \in E_M(N)$، آنگاه $r_1 \in R$، $m \in M$ و $n \in \mathbb{N}$ وجود دارند که $g = r_1 m$ و $r_1^n m \in N$. پس به ازای هر $r \in R$، $r^n r_1^n m \in N$؛ یعنی $(rr_1)^n m \in N$. در نتیجه $rg = rr_1 m \in E_M(N)$. بنابراین

$$RE_M(N) = \{\sum_{i=1}^{m} g_i \mid \forall i, \exists r_i \in R, \exists m_i \in M, \exists n_i \in \mathbb{N} \; ; g_i = r_i m_i, r_i^{n_i} m_i \in N\}.$$

قضیه ۷.۱.۱. فرض کنیم M یک Rـمدول و N زیرمدول M باشد. در این صورت

$$N \subseteq RE_M(N) \subseteq rad_M(N).$$

اثبات: به ازای هر $x \in N$، $1_R \cdot x = x \in N$. لذا $x \in E_M(N) \subseteq RE_M(N)$. بنابراین $N \subseteq RE_M(N)$. حال فرض کنیم $x \in E_M(N)$ دلخواه باشد. در این صورت عدد صحیح

مثبت n و عناصر $r \in R$ و $m \in M$ موجودند بطوریکه $x = rm$ و $r^n m \in N$. فرض کنیم P یک زیرمدول اول دلخواه از M باشد بطوریکه $N \subseteq P$. در این صورت $r^n m \in P$. اگر $m \in P$، آنگاه $x = rm \in P$. در غیر این صورت $n \in \mathbb{N}$ موجود است بطوریکه $r^n M \subseteq P$. بنابراین $r^n \in (P :_R M)$ و چون $(P :_R M)$ یک ایده‌آل اول R است لذا $r \in (P :_R M)$. پس $rM \subseteq P$. یعنی $x = rm \in rM \subseteq P$. در نتیجه $x \in \cap P = rad_M(N)$. یعنی $E_M(N) \subseteq rad_M(N)$. پس $RE_M(N) \subseteq rad_M(N)$. □

توجه می‌کنیم که اگر M و M' دو Rـمدول و $f : M \longrightarrow M'$ یک Rـهمریختی پوشا و N زیرمدولی از M باشد بطوریکه $N \supseteq kerf = K$، آنگاه یک تناظر یک‌به‌یک و حافظ ترتیب بین زیرمدول‌های سره M که شامل N هستند و زیرمدول‌های سره M' که شامل $f(N)$ هستند وجود دارد.

با توجه به مطلب فوق داریم

۱) اگر P زیرمدولی اول از M شامل N باشد، آنگاه $f(P)$ زیرمدولی اول از M' شامل $f(N)$ است.

۲) اگر P' زیرمدولی اول از M' شامل $f(N)$ باشد، آنگاه $f^{-1}(P')$ زیرمدولی اول از M شامل N است.

نتیجه ۱.۱.۸. فرض کنیم M و M' دو Rـمدول، $f : M \longrightarrow M'$ یک Rـهمریختی پوشا و N زیرمدولی از M باشد بطوریکه $N \supseteq kerf = K$. در این صورت

۱) $f(rad_M(N)) = rad_{M'}(f(N))$.

۲) اگر N' زیرمدول M' باشد، آنگاه $f^{-1}(rad_{M'}(N')) = rad_M(f^{-1}(N'))$.

اثبات: ۱) اگر $rad_M(N) = M$ و P' زیرمدولی اول از M' شامل $f(N)$ باشد، آنگاه $f^{-1}(P')$ زیرمدولی اول از M شامل N است که با $rad_M(N) = M$ در تناقض است. پس باید داشته باشیم $rad_{M'}(f(N)) = M'$؛ یعنی $rad_{M'}(f(N)) = M' = f(M) = f(rad_M(N))$.
پس فرض می‌کنیم $y = f(x) \in rad_{M'}(f(N))$ و P زیرمدولی اول از M شامل N باشد. در این صورت $f(P)$ زیرمدولی اول از M' شامل $rad_{M'}(f(N))$ است. پس $f(x) \in f(P)$.
حال فرض کنیم $z \in P$ چنان باشد که $f(x) = f(z)$؛ یعنی $x - z \in kerf \subseteq P$. پس $x \in P$ و لذا $x \in rad_M(N)$. بنابراین $y = f(x) \in f(rad_M(N))$. در نتیجه $rad_{M'}(f(N)) \subseteq f(rad_M(N))$.
برعکس اگر $rad_{M'}(f(N)) = M'$، آنگاه $f(rad_M(N)) = M'$. در غیر این صورت فرض کنیم $y = f(x) \in f(rad_M(N))$ که $x \in rad_M(N)$. اگر P' زیرمدولی اول از M' شامل $f(N)$ باشد، آنگاه $f^{-1}(P')$ زیرمدولی اول از M شامل N است. پس $x \in f^{-1}(P')$؛ یعنی $y \in P'$. لذا $y \in rad_{M'}(f(N))$ که نتیجه می‌دهد $f(rad_M(N)) \subseteq rad_{M'}(f(N))$. بنابراین $f(rad_M(N)) = rad_{M'}(f(N))$.
۲) اثبات این قسمت مشابه قسمت (۱) است. □

لم ۹.۱.۱. تحت شرایط نتیجه ۸.۱.۱ داریم

۱) $f(E_M(N)) = E_{M'}(f(N))$.

۲) $Rf^{-1}(E_{M'}(N')) = RE_M(f^{-1}(N'))$.

اثبات: ۱) اگر $y \in f(E_M(N))$، آنگاه $y = f(x)$ و $x = rm$ که $r \in R$، $m \in M$ و به ازای $n \in \mathbb{N}$، $r^n m \in N$. بنابراین $r^n f(m) = f(r^n m) \in f(N)$. در نتیجه $y \in E_{M'}(f(N))$ و لذا $f(E_M(N)) \subseteq E_{M'}(f(N))$.
برعکس اگر $y \in E_{M'}(f(N))$، آنگاه $y = rx$ که $r \in R$، $x = f(t) \in M'$، $t \in M$ و به ازای $n \in \mathbb{N}$، $r^n x \in f(N)$. لذا به ازای $l \in N$، $f(r^n t) = f(l)$. پس $r^n t - l \in kerf \subseteq N$، که

ایجاب می‌کند $r^n t \in N$. یعنی $rt \in E_M(N)$. بنابراین $y = f(rt) \in f(E_M(N))$. در نتیجه $E_{M'}(f(N)) \subseteq f(E_M(N))$.

۲) فرض کنیم $rm \in E_M(f^{-1}(N'))$ بطوریکه $r^n m \in f^{-1}(N')$. در این صورت $r^n f(m) \in N'$. بنابراین $f(rm) \in E_{M'}(N')$ و لذا $rm \in f^{-1}(E_{M'}(N'))$. حال فرض می‌کنیم $x \in f^{-1}(E_{M'}(N'))$. چون $f(x) \in E_{M'}(N')$، لذا $r \in R$، $m' \in M'$ و $n \in \mathbb{N}$ وجود دارند بطوریکه $f(x) = rm'$ و $r^n m' \in N'$. همچنین $y \in M$ وجود دارد بطوریکه $f(y) = m'$. پس $f(r^n y) \in N'$. در نتیجه $ry \in E_M(f^{-1}(N'))$. چون $x - ry \in kerf \subseteq RE_M(f^{-1}(N'))$. لذا $x \in RE_M(f^{-1}(N'))$. □

تعریف ۱۰.۱.۱. فرض کنیم R یک حوزه صحیح و M یک Rـمدول باشد. در این صورت زیرمجموعه

$$T(M) = \{m \in M | \ \exists 0 \neq r \in R; rm = 0\}$$

از M یک زیرمدول آن می‌باشد. $T(M)$ را زیرمدول تابدار می‌نامیم.
همچنین اگر $T(M) = M$، M را تابدار [۷] و اگر $T(M) = 0$، آنگاه M را فارغ از تاب [۸] می‌نامیم.

تعریف ۱۱.۱.۱. فرض کنیم R یک حوزه صحیح باشد. Rـمدول M را بخش‌پذیر [۹] می‌نامیم هرگاه به ازای هر $0 \neq c \in R$، $M = cM$.

---

[۷] $Torsion$

[۸] $Torsion - free$

[۹] $Divisible$

تعریف ۱.۱.۱۲. R-مدول M را بخش‌پذیر تابدار تعمیم‌یافته [۱۰] می‌نامیم اگر $M = \sum_{i\in I} M_i$، بطوریکه به ازای هر $i \in I$، ایده‌آل اول p_i در R موجود باشد بطوریکه $p_iM_i = 0$ و M_i یک R/p_i-مدول بخش‌پذیر تابدار باشد.

بدیهی است که اگر R یک حوزه صحیح و p یک ایده‌آل اول غیرصفر R باشد، آنگاه هر R/p-مدول بخش‌پذیر تابدار غیرصفر M، R-مدول بخش‌پذیر نیست. زیرا $pM = 0$.

لم ۱.۱.۱۳. فرض کنیم L زیرمدول M باشد بطوریکه ایده‌آل اول p از R وجود دارد که $pL = 0$ و L یک R/p-مدول بخش‌پذیر تابدار باشد. در این صورت $L = E_L(0)$.

اثبات: فرض کنیم $x \in L$. چون L تابدار است $c \in R \setminus p$ وجود دارد بطوریکه $cx = (c + p)x = 0$. بعلاوه چون L بخش‌پذیر است $y \in L$ وجود دارد بطوریکه $x = (c + p)y = cy$. بنابراین $x = cy$ و $c^2y = cx = 0$. پس $x \in E_L(0)$. □

لم ۱.۱.۱۴. فرض کنیم N و L زیرمدول‌هایی از R-مدول M باشند بطوریکه L یک مدول بخش‌پذیر تابدار تعمیم‌یافته است. فرض کنیم $r \in R$ و $m \in M$ به ازای عدد صحیح مثبتی مثل n در رابطه $r^nm \in N + L$ صدق کنند. در این صورت $rm \in RE_M(N)$.

اثبات: زیرمدول‌های L_i $(i \in I)$ از L و ایده‌آل‌های اول p_i $(i \in I)$ از R وجود دارند بطوریکه $L = \sum_{i\in I} L_i$ و به ازای هر $i \in I$، $p_iL_i = 0$ و L_i یک R/p_i-مدول بخش‌پذیر تابدار است. زیرمجموعه متناهی $\{i_1, ..., i_k\}$ از I وجود دارد بطوریکه $r^nm \in N + L_{i_1} + ... + L_{i_k}$.
پس $x_0 \in N$ و $x_j \in L_{i_j}$ $(1 \leq j \leq k)$ وجود دارند بطوریکه $r^nm = x_0 + x_1 + ... + x_k$.
حال اثبات را با استقراء روی k ادامه می‌دهیم.
اگر $k = 0$، آنگاه چیزی برای اثبات باقی نمی‌ماند.
فرض کنیم $k \geq 1$. اگر $r \in p_{i_k}$، آنگاه $rx_k = 0$ و $r^{n+1}m = (rx_0) + (rx_1) + ... + (rx_{k-1})$.

[۱۰] *Generalized torsion divisible*