بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه قم

دانشکده علوم پایه

پایان‌نامه دوره کارشناسی ارشد رشته ریاضی محض

عنوان:

منیفلدهای فینسلری با انحنای پرچمی نامثبت و $S-$انحنای ثابت

استاد راهنما:

دکتر اکبر طیبی

نگارنده:

صبا یگانه ترک

مهر ۱۳۹۳

تاییدیه هیات داوران

سپاس گزاری

سپاس بی کران پروردگار یکتا را که هستی مان بخشید و درهای علم را بر ما گشود و عمر و فرصتی عطا فرمود تا بدان بنده ضعیف خویش را در طریق علم و معرفت بیازماید. بدون شک جایگاه و منزلت معلم، اجل از آن است که در مقام قدردانی از زحمات بی شائبه ی او، با زبان قاصر و دست ناتوان، چیزی بنگارم. اما از آنجایی که تجلیل از معلم، سپاس از انسانی است که هدف و غایت آفرینش را تأمین می کند در آغاز وظیفه خود می دانم سپاس و تقدیر بی پایان خود را تقدیم استاد راهنمای ارجمندم آقای دکتر طیبی نمایم و از زحمات بی دریغ ایشان صمیمانه قدردانی کنم که قطعاً بدون راهنمایی های ارزنده ایشان، این رساله به انجام نمی رسید. همچنین قدردانی خود را به استاد محترم خانم دکتر صادق زاده که قبول زحمت نموده و پایان نامه ام را مورد مطالعه و داوری قرار داده تقدیم می نمایم. در پایان، بوسه می زنم بر دستان خداوندگاران محبت و عشق، پدر و مادر عزیزم که گاه روییدنم باران مهربانی بودند و گاه پروریدنم آغوشی گرم که بالنده ام ساخت و گرمای امید بخش وجودشان، در همه حال بهترین پشتیبان من بود. و بعد از خدا وجود مقدس شان را ستایش می کنم و نیز از خواهرم که وجودش شادی بخش و صفایش مایه آرامش من می باشد و در آخر بر خود لازم می دانم از جناب آقای علی پور و دوست گرامی خود خانم حاج ابراهیمی به خاطر تمام زحماتشان تشکر نمایم.

چکیده

انحنای پرچمی یک تعمیم طبیعی از انحنای برشی در هندسه ریمانی می باشد، و $S-$انحنا یک کمیت غیر ریمانی است که برای مترهای ریمانی صفر می شود. مترهای فینسلری غیرریمانی (نا کامل) روی زیرمجموعه بازی از R^n با انحنای پرچمی منفی و $S-$انحنای ثابت وجود دارند. در این پایان نامه، می خواهیم نشان دهیم که هر متر فینسلری با انحنای پرچمی منفی و $S-$انحنای ثابت، ریمانی است اگر که فشرده باشد. هم چنین حالت انحنای پرچمی نامثبت را بررسی خواهیم کرد. لازم به ذکر است مطالب این پایان نامه، برگرفته از مقاله [۲۱] می باشد.

کلمات کلیدی:

انحنای پرچمی، انحنای پرچمی منفی، انحنای پرچمی نامثبت، $S-$انحنا.

فهرست مطالب

لیست نمادها

کلاف مماسی .... TM

کلاف مماسی سفته .... $TM_\circ$

مجموعه میدانهای برداری روی M .... $\chi(M)$

اسپری .... G

ضرایب اسپری .... G^i

ضرایب الصاق خطی .... ${\Gamma^i}_{jk}$

تانسور کارتان C

ضرایب الصاق غیر خطی .... N^i_j

تانسور میانگین کارتان I

تانسور لندسبرگ L

تانسور بروالد .... B

تانسور میانگین بروالد .... E

انحنای ریمان .... ${R^i}_{jkl}$

انحنای ریچی .... R_{ij}

انحنای پرچمی .... K

$S-$انحنا .... S

فصل ۱

مفاهیم و تعاریف مقدماتی

۱.۱ مقدماتی از هندسه ریمانی

۱.۱.۱ منیفلد توپولوژیک

تعریف ۱.۱.۱ (منیفلد توپولوژیک[۱]). فرض کنید M یک فضای توپولوژیک باشد. M را یک منیفلد توپولوژیک به بعد n گویند هرگاه در شرایط زیر صدق کند:

۱. M یک فضای هاسدورف[۲] باشد.

۲. M شمارای نوع دوم باشد.

۳. M موضعاً اقلیدسی $n-$ بعدی باشد. (هر نقطه یک همسایگی همئومورف با یک زیرمجموعه باز از $\mathbf{R}^n$ داشته باشد).

تعریف ۲.۱.۱. زوج مرتب (U, φ) را که در آن U مجموعه ای باز در M و $\varphi : U \to \tilde{U}$ یک همئومورفیسم[۳] از U به زیر مجموعه باز $\tilde{U}$ از $\mathbf{R}^n$ می باشد، یک کارت مختصاتی روی منیفلد

[۱] topological manifold

[۲] Hausdorff

[۳] homeomorphism

M گویند.

تعریف ۳.۱.۱. کارت [۴] های (U, φ) و (V, ψ) از منیفلد توپولوژیک $n-$ بعدی M، را $C^\infty-$ مرتبط نامیم، هرگاه نگاشت [۵] زیر که آن را نگاشت تغییر کارت می نامیم

$$\psi \circ \varphi^{-۱} : \varphi(U \cap V) \to \psi(U \cap V)$$

دیفئومورفیسم [۶] باشد.

تعریف ۴.۱.۱. یک اطلس [۷] عبارت است از گردایه ای از کارت های مختصاتی منیفلد توپولوژیک M که حوزه تعریف آنها M را بپوشاند. یک اطلس را اطلس هموار نامند هرگاه هردو کارت از آن با هم $C^\infty-$ مرتبط باشند. یک اطلس هموار روی M را یک ساختار هموار گویند هرگاه زیر مجموعه ای سره از یک اطلس هموار بزرگ تر نباشد.

تعریف ۵.۱.۱. منیفلد هموار $n-$ بعدی عبارت است از زوج (M, A) که در آن M یک منیفلد توپولوژیک $n-$ بعدی و A یک ساختار هموار روی M می باشد.

تعریف ۶.۱.۱. فضای توپولوژی M را در صورتی موضعاً $\mathbf{H}^n$ گوییم که به ازای هر نقطه $p \in M$، یک همسایگی باز U از p وجود داشته باشد که با زیر مجموعه ای باز از $\mathbf{H}^n$ همئومورف باشد که در آن

$$\mathbf{H}^n = \{(x^۱, \cdots, x^n) \in \mathbb{R}^n | x^n \geq ۰\}.$$

تعریف ۷.۱.۱ (منیفلد توپولوژی مرزدار [۸]). منیفلد توپولوژی مرزدار n بعدی M، عبارت است از یک فضای توپولوژی شمارای نوع دوم، هاسدورف و موضعاً $\mathbf{H}^n$.

---

[۴] chart

[۵] mapping

[۶] diffeomorphism

[۷] atlas

[۸] with boundary

تعریف ۸.۱.۱ (منیفلد مرزدار هموار). منیفلد مرزدار هموار، عبارت است از یک منیفلد توپولوژی مرزدار به همراه یک اطلس هموار ماکسیمال.

۲.۱.۱ ضرب داخلی

تعریف ۹.۱.۱. فرض کنیم V یک فضای برداری $n-$بعدی روی میدان F باشد. یک ضرب داخلی روی V، یک تابع دوخطی به صورت زیر است

$$\phi : V \times V \longrightarrow F$$

که در شرایط زیر صدق می کند:

۱. ϕ متقارن است:

$$\phi(x,y) = \phi(y,x), \qquad \forall x,y \in V$$

۲. ϕ مثبت$-$معین است:

$$\phi(x,x) > 0, \qquad \forall x \neq 0 \in V$$

برای نمایش ضرب داخلی روی V، یک پایه دلخواه روی V در نظر می گیریم:

$$B = \{e_1, \cdots, e_n\}$$

در این صورت بردارهای دلخواه x و y در V را می توان به صورت منحصر به فرد با ترکیب خطی

اعضای B به صورت زیر نمایش داد:

$$x = \sum_{i=۱}^{n} x_i e_i, \qquad y = \sum_{i=۱}^{n} y_i e_i$$

که در آن x_i و y_i اعداد حقیقی هستند. تابع ϕ را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$\phi : V \times V \longrightarrow F$$
$$\phi(x, y) = \Sigma x_i y_i$$

واضح است که ϕ یک تابع دوخطی است و در شرایط (۱) و (۲) صدق می کند. بنابراین ϕ یک ضرب داخلی روی V است. ضرب داخلی ϕ روی V را می توان ضرب داخلی کانونی اعضای پایه B روی V نامید.

مجموعه همه ضرب های داخلی روی V را با $g(V)$ نمایش می دهیم. در این صورت $g(V)$ یک زیرمجموعه ناتهی از فضای خطی $\mathscr{L}^۲(V)$، مجموعه همه توابع دوخطی حقیقی مقدار روی $V \times V$ است. $g(V)$ زیرفضای خطی $\mathscr{L}^۲(V)$ نیست، زیرا تابع صفر روی $V \times V$ یک ضرب داخلی روی V نیست.

با توجه به ویژگی های ضرب داخلی لم زیر بدیهی است:

لم ۱.۱.۱.

۱. $g(V)$ تحت جمع بسته است؛ یعنی به ازای دو ضرب داخلی دلخواه ϕ و ψ روی V، تابع دوخطی $\phi + \psi$ یک ضرب داخلی روی V است.

۲. $g(V)$ تحت ضرب با اسکالرهای مثبت بسته است؛ یعنی به ازای هر ضرب داخلی ϕ روی V و هر عدد مثبت حقیقی a، تابع دوخطی $a\phi$ یک ضرب داخلی روی V است.

قضیه ۱.۱.۱. فرض کنیم $g(V)$ یک زیرمجموعه محدب از فضای خطی $\mathscr{L}^۲(V)$ باشد، یعنی به

ازای هر مجموعه متناهی از ضرب های داخلی

$$\{\phi_۱, \cdots, \phi_n\}$$

روی V و n عدد غیرمنفی حقیقی مقدار $a_۱, \cdots, a_n$ به صورت $\sum_{i=۱}^n a_i = ۱$ تابع دوخطی زیر

$$\phi = \sum_{i=۱}^k a_i \phi_i$$

یک ضرب داخلی روی V است.

فرض کنیم $B = \{e_۱, \cdots, e_n\}$ یک پایه دلخواه V باشد، در این صورت هر ضرب داخلی ϕ روی V یک ماتریس $n \times n$، M_ϕ می دهد که درایه های آن اعداد حقیقی به صورت $c_{ij} = \phi(e_i, e_j)$ است. با توجه به شرایط ضرب داخلی، ماتریس فوق متقارن و مثبت—معین است.

فرض می کنیم $B^* = \{e_۱^*, \cdots, e_n^*\}$، پایه فضای V^*، دوگان فضای V باشد. اعضای B^* دوگان اعضای B است. در این صورت قضیه زیر را داریم:

قضیه ۲.۱.۱. به ازای هر دو بردار x و y در V،

$$\phi(x, y) = \sum_{i,j=۱}^n c_{ij} e_i^*(x) e_j^*(y)$$

که در آن c_{ij} مولفه های ماتریس M_ϕ، سطر iام و ستون jام است.

فرض می کنیم $\phi : V \times V \longrightarrow \mathbf{R}$ یک ضرب داخلی دلخواه روی V باشد. در این صورت عدد حقیقی $\phi(x, y)$ را می توان با نماد $< x, y >$ نمایش داد و ضرب داخلی بردارهای x و y نامید.

با استفاده از ضرب داخلی، مفهوم طول بردار $x \in V$ را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$| x |^{۲} = < x, x >$$

بنابراین $| ۰ |= ۰$ است و به ازای $x \neq ۰$، $| x |> ۰$ خواهد بود. دو بردار x و y عمود گفته می شوند هرگاه $< x, y >= ۰$.
از دوخطی بودن ضرب داخلی، می توان نتیجه گرفت بردار صفر، بر هر بردار در V عمود است. به ازای هر ضرب داخلی g روی V، یک نرم را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$v : V \longrightarrow \mathbf{R}$$
$$x \longmapsto | x |$$

قضیه ۳.۱.۱. به ازای هر $v, w \in V$، خواص اصلی نرم به صورت زیر است:

۱. $| av |= |a| \mid v \mid$ که در آن $a \in \mathbf{R}$.

۲. $| v + w |\leq | v | + | w |$.

۳.۱.۱ منیفلد ریمانی

تعریف ۱۰.۱.۱ (متریک ریمانی). یک متر ریمانی روی یک منیفلد دیفرانسیل پذیر M عبارت است از یک تانسور $\binom{۰}{۲}$ به صورت $g : \chi(M) \times \chi(M) \longrightarrow C^{\infty}(M)$ که به ازای هر نقطه $p \in M$، $g_p : T_pM \times T_pM \longrightarrow \mathbf{R}$ دارای شرایط زیر باشد:

۱. g_p متقارن باشد:

$$\forall x, y \in T_pM \qquad g_p(x, y) = g_p(y, x)$$

۲. g_p مثبت—معین باشد:

$$\forall x \neq \circ \qquad g_p(x,x) > \circ$$

یا به عبارتی: $g_p(x,x) = \circ \iff x = \circ$.

تعریف ۱۱.۱.۱ (منیفلد ریمانی). منیفلد دیفرانسیل پذیر M را به همراه متریک ریمانی g، منیفلد ریمانی نامیده و آن را با نماد (M,g) نمایش می دهیم.

تعریف ۱۲.۱.۱. فرض می کنیم (M,g) و $(\bar{M},\bar{g})$ دو منیفلد ریمانی و $f : M \longrightarrow \bar{M}$ یک دیفئومورفیسم بین دو منیفلد M و $\bar{M}$ باشد. f را یک ایزومتری می نامیم هرگاه

$$\forall p \in M, \forall x,y \in T_pM \qquad g_p(x,y) = \bar{g}_{f(p)}\big((f_*)_p x, (f_*)_p y\big)$$

که در آن

$$\bar{g}_{f(p)} : T_{f(p)}\bar{M} \times T_{f(p)}\bar{M} \longrightarrow \mathbf{R}, \qquad (f_*)_p : T_pM \longrightarrow T_{f(p)}\bar{M}$$

در صورتی که چنین ایزومتری بین دو منیفلد موجود باشد، دو منیفلد M و $\bar{M}$ را ایزومتر می نامیم.

قضیه ۴.۱.۱. روی هر منیفلد دیفرانسیل پذیر M، می توان یک متریک ریمانی تعریف نمود.

۴.۱.۱ الصاق

برای اینکه بتوان مفهوم شتاب را در فضای ریمانی تعمیم داد، لازم است نوع خاصی از مشتق گیری به نام مشتق گیری همورد را معرفی نمود که روی منیفلدها قابل تعریف بوده و مستقل از انتخاب کارت است.

تعریف ۱۳.۱.۱ (الصاق). فرض کنیم M یک منیفلد هموار باشد. نگاشت

$$\nabla : \chi(M) \times \chi(M) \longrightarrow \chi(M)$$

را با شرایط زیر، یک الصاق روی منیفلد M می نامیم:

۱. $\nabla_{fX+gY}Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z$

۲. $\nabla_Y fX = f\nabla_Y X + (Y \cdot f)X$

که در آن $\forall X, Y, Z \in \chi(M), f, g \in C^\infty(M)$

در واقع ∇ روی توابع همانی، مشتق سویی است. الصاق حالت کلی تری از مشتق سویی بوده و میزان تغییرات فرم ها را نیز می توان با استفاده از آن به دست آورد. ∇ را الصاق و ∇_X را مشتق کواریان نسبت به X می نامیم.

تعریف ۱۴.۱.۱ (مختصات موضعی $\nabla_X Y$). فرض کنیم (x, U) یک کارت مختصات روی منیفلد M همراه با الصاق خطی ∇ باشد. در این صورت $\nabla_X Y$ را در این مختصات می توان به صورت زیر نوشت:

$$\nabla_X Y = (X \cdot Y^i + \Gamma^i_{jk} X^j Y^k)\frac{\partial}{\partial x^i}$$

که در آن $\Gamma^k_{ij}\frac{\partial}{\partial x^k} := \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}}\frac{\partial}{\partial x^i}$ را ضرایب کریستوفل می نامند که توابعی حقیقی روی M می باشند.

تعریف ۱۵.۱.۱. فرض می کنیم M یک منیفلد و ∇ مشتق کواریان روی M باشد. آن گاه $T : \chi(M) \times \chi(M) \to \chi(M)$ را تاب الصاق می نامیم و آن را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$\forall X, Y \in \chi(M), \quad T(X, Y) := \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y]$$

الصاق ∇ را روی M، تاب$-$آزاد می نامیم هرگاه تاب آن (T) صفر باشد.

تعریف ۱۶.۱.۱. الصاق ∇ را سازگار با متریک می نامیم هرگاه:

$$X < Y, Z > = < \nabla_X Y, Z > + < Y, \nabla_X Z >, \qquad X, Y \in \chi(M)$$

تعریف ۱۷.۱.۱ (الصاق لوی$-$چی ویتا). فرض کنیم ∇ یک الصاق خطی روی منیفلد ریمانی (M, g) باشد که در شرایط سازگاری با متریک و تاب$-$آزادی صدق کند، در این صورت آن را الصاق لوی$-$چی ویتا می نامیم.

قضیه ۵.۱.۱ (قضیه اساسی هندسه ریمانی). روی هر منیفلد ریمانی (M, g) فقط یک الصاق ریمانی موجود است.

۲.۱ ژئودزی

با تسامح می توان گفت که کوتاهترین مسیر بین دو نقطه در فضای M (در همسایگی نرمال) را ژئودزی بین آن دو نقطه می نامیم. در فضای حقیقی $\mathbf{R}$ ژئودزی ها همان خطوط راست می باشند که معادله کلی آنها به صورت $C(t) = at + b$ می باشد. با توجه به معادله خط فوق، $C''(t) = ۰$ همواره برقرار می باشد. حال می خواهیم با استفاده از این رابطه، مفهوم ژئودزی را برای منیفلدهای دیفرانسیل پذیر تعمیم دهیم.

تعریف ۱.۲.۱ (ژئودزی). منحنی هموار $\gamma : I \to M$ را در نظر می گیریم. γ را یک ژئودزی در M می نامیم هرگاه $\nabla_{\gamma'}^{\gamma'} = ۰$. به عبارتی $\gamma' : TI \to TM$ در راستای مماسی نباید مولفه ای داشته باشد یا به عبارتی مولفه مماسی شتاب γ باید صفر باشد.

۳.۱ انحنا

۱.۳.۱ انحنای ریمان

می دانیم در فضای $\mathbf{R}^n$ برای یک تابع از کلاس $C^۲$، می توان ترتیب مشتق گیری دوم آن را عوض کنیم. در واقع برای استفاده از خاصیت صفر بودن مشتق دوم خط راست در $\mathbf{R}^n$، مشتق دوم را انتخاب می کنیم. اما در فضای ریمانی نمی توان ترتیب مشتق گیری را تعویض نمود. در واقع تفاوت در تعویض ترتیب مشتق گیری، میزان انحراف M را از مسطح بودن تعیین می کند و معیاری برای تفاوت بین یک منیفلد M با فضای اقلیدسی $\mathbf{R}^n$ است.

تعریف ۱.۳.۱ (انحنای ریمان). فرض کنید (M, g) یک منیفلد ریمانی و ∇ الصاق لوی−چی ویتا روی M باشد. نگاشت

$$R : \chi(M) \times \chi(M) \times \chi(M) \longrightarrow \chi(M)$$
$$R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z$$

را تانسور انحنای ریمان می نامیم.

تذکر ۱. به وضوح انحنای ریمان یک میدان تانسوری $\binom{۱}{۳}$ است.

تعریف ۲.۳.۱. فرض می کنیم (M, g) یک منیفلد ریمانی و W یک میدان برداری روی M باشد. حاصل ضرب داخلی W در تانسور انحنای ریمان را با R_m نمایش داده و آن را به صورت زیر نمایش می دهیم:

$$\forall X, Y, Z, W \in \chi(M), \quad R_m(X, Y, Z, W) =< R(X, Y)Z, W >$$

R_m را تانسور انحنای ریمان نوع دوم یا به صورت ساده تر، انحنای ریمان می گوییم.