بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه قم

دانشکده علوم پایه

پایان‌نامه کارشناسی ارشد رشته ریاضی محض

عنوان:

ساخت بردارهای موجک دوبه‌دومتعامد

استاد راهنما:

دکتر محمود پورغلامحسین

استاد مشاور:

دکتر مهدی احمدی‌نیا

نگارنده:

میثم نقی‌لو

تابستان ۱۳۹۲

بسمه تعالی

جمهوری اسلامی ایران
وزارت علوم، تحقیقات و فناوری
دانشگاه قم

تاریخ:
شماره:
پیوست:

صورت جلسه دفاع از پایان‌نامه کارشناسی ارشد

با تأییدات خداوند متعال و با استعانت از حضرت ولی عصر«*عجل الله تعالی فرجه الشریف*» جلسه دفاعیه پایان‌نامه کارشناسی‌ارشد آقای **میثم نقی لو** به شماره دانشجویی **۸۹۱۳۲۷۲۰۰۶** رشته **ریاضی** تحت عنوان «**ساخت بردارهای موجک دو به دو متعامد**» با حضور هیأت داوران در محل دانشگاه قم در تاریخ **۱۳۹۲/۰۷/۱۳** تشکیل گردید.

در این جلسه، پایان‌نامه با موفقیت مورد دفاع ○قرار نگرفت ☑قرار گرفت و نامبرده نمره با عدد ..۱۸/۵.. با حروف ...هجده و نیم............ با درجه: ○عالی ☑بسیار خوب ○خوب ○ قابل قبول دریافت نمود.

نام و نام‌خانوادگی	سمت	مرتبه علمی	امضاء
دکتر محمود پورغلامحسین	استاد راهنما	استادیار	محمود پورغلام
دکتر مهدی احمدی نیا	استاد مشاور	استادیار	
دکتر یعقوب فرجامی	استاد ناظر	استادیار	
دکتر سید علی موسوی	نماینده شورای تحصیلات تکمیلی	استادیار	

معاون آموزشی و تحصیلات تکمیلی
دانشکده علوم پایه
دکتر محمود محمودی

مدیر تحصیلات تکمیلی دانشگاه
دکتر حسین دبیر نیا

نشانی:
قم، جاده قدیم اصفهان،
دانشگاه قم
کدپستی: ۳۷۱۶۱۴۶۶۱۱
تلفن: ۲۸۵۳۳۱۱
دورنویس:
معاونت آموزشی ۲۸۵۵۶۸۴
معاونت اداری ۲۸۵۵۶۸۶
معاونت دانشجویی ۲۸۵۵۶۸۸

چکیده

ساخت همهٔ بردارهای موجک دوبه‌دومتعامدِ وابسته به یک بردار مقیاس دوبه‌دومتعامد، ممکن است مانند حالت تک‌ـموجک‌های دوبه‌دومتعامد، ساده نباشد. در این پایان‌نامه، چند قضیه دربارهٔ ساخت بردارهای موجک دوبه‌دومتعامد ارائه شده است که برای سادگی محاسبات، مربوط به ساخت پارامتری همهٔ بردارهای موجک دوبه‌دومتعامد که محمل آنها در $[-۱, ۱]$ است، می‌باشد. این روش هم‌چنین برای حالت تک‌ـموجک‌های متعامد با محمل فشرده نیز مناسب است. علاوه‌براین مثال‌هایی ارائه شده است که تمام بردارهای موجک دوبه‌دومتعامد وابسته به بردارهای مقیاس دوبه‌دومتعامدِ خوش‌تعریف، پارامتری شده است.

کلمات کلیدی: آنالیز چندریزگی با چندگانگی n، آنالیز چندریزگی دوبه‌دومتعامد با چندگانگی n، چندموجک، بردارهای موجک (چندموجک) دوبه‌دومتعامد.

فهرست مطالب

مقدمه

مقدمه‌ای دربارهٔ موضوع تحقیق

آنالیز موجک یکی از شاخه‌های به‌نسبت جدید در ریاضیات می‌باشد که حاصل سال‌ها تحقیق و پژوهش در شاخه‌های مختلف علوم از جمله آنالیز هارمونیک، مهندسی برق (مخابرات)، فیزیک نظری و ژئوفیزیک می‌باشد. کار اصلی این نظریه بسط توابع بر حسب توابعی خاص که موجک نامیده می‌شوند، است. درواقع کارکرد کلی آنالیز موجک، مشابه آنالیز فوریه می‌باشد. اما بر خلاف آنالیز فوریه که فقط با یک پایه سروکار داریم، در آنالیز موجک می‌توان برای هر کاری، پایه‌ای مناسب با آن کار را ساخت و به کار برد.

درواقع اصلی‌ترین دلیل ایجاد مفهوم موجک، محدودیت‌هایی بود که استفاده از آنالیز فوریه در بسیاری از مسائل مهم و کاربردی به‌وجود آورده بود. (که به برخی از آن‌ها در بخش تاریخچه اشاره خواهیم کرد).

با ورود آنالیز موجک به مباحث کاربردی، لازم شد که موجک‌هایی با خواص ویژه ساخته شوند؛ خواصی مانند پیوسته بودن، متعامد بودن، با محمل فشرده بودن، متقارن بودن و ... . به مرور زمان مشخص شد، که برقراری هم‌زمان خواص مطلوب برای موجک‌ها، بسیار محدود کننده و حتی گاهی اوقات غیر ممکن است (که در این رابطه در انتهای فصل اول و ابتدای فصل دوم توضیحاتی ارائه خواهد شد). این محدودیت‌ها باعث گذار از مفهوم موجک به مفهوم چندموجک شد.

نکتهٔ مهم این است که علی‌رغم این‌که آنالیز موجک از نظر تئوری بسیار پیشرفت کرده است، اما در مباحث تئوری همیشه نقطهٔ شروع، فرض وجود یک پایهٔ موجک با

خواص مطلوب است. و با فرض وجود چنین پایه‌ای نحوهٔ کار با آن و بررسی مفاهیم مختلف آنالیزی با استفاده از آن، شرح و بسط داده می‌شود. اما همان‌طور که اشاره شد در آنالیز موجک می‌توان برای هر کاری، پایهٔ مخصوص آن کار را ساخت، بنابراین در این نظریه، یک سؤال اساسی این است که پایهٔ مطلوب خود را چگونه بسازیم؟

روش‌ها و ترفندهای مختلفی برای ساخت یک پایهٔ موجک وجود دارد؛ مانند استفاده از اسپلاین‌ها، روش توابع فرکتال، استفاده از آنالیزهای چندریزگی و ... . در این میان استفاده از مفهوم آنالیز چندریزگی، یکی از متداول‌ترین و در عین‌حال شهودی‌ترین روش‌ها است.

با داشتن یک آنالیز چندریزگی که توسط یک تابع مقیاس مانند φ تولید می‌شود، می‌توان تابع ψ را چنان ساخت که ψ یک موجک مادر باشد (این کار با استفاده از قضیهٔ مالات قابل انجام است که صورت ساده‌ای از آن را می‌توان در قضیهٔ ۵.۳۵ از منبع [۱] مشاهده کرد.) اما برخلاف این حالت، وقتی با یک آنالیز چندریزگی با چندگانگی n (که $n > ۱$) سروکار داریم ـ یعنی وقتی آنالیز چندریزگی توسط n تابع مقیاس، تولید می‌شود ـ ، ممکن است یافتن (یا ساختن) n تابع موجک که وابسته به این آنالیز چندریزگی هستند، کار چندان ساده‌ای نباشد. درواقع در این حالت از یک طرف لزومی ندارد که همواره $\psi_۱, \ldots, \psi_n$ موجود باشند و از طرف دیگر $\psi_۱, \ldots, \psi_n$ در صورت وجود، لزوما یکتا نیستند.

بنابراین هنگام مطالعهٔ آنالیزهای چندریزگی با چندگانگی $n > ۱$، با دو سؤال اساسی روبه‌رو هستیم:

۱. شرایط لازم و کافی برای وجود حداقل یک دسته از توابع موجک مانند $\psi_۱, \ldots, \psi_n$ وابسته به توابع مقیاس $\varphi_۱, \ldots, \varphi_n$ چیست؟

۲. درصورت برقراری شرایط فوق، چگونه می‌توان تمامی گزینه‌های پیش رو برای $\psi_۱, \ldots, \psi_n$ را تولید کرد؟

در این تحقیق به این دو سؤال در حالتی که با آنالیزهای چندریزگی دوبه‌دومتعامد با چندگانگی n و چندموجک‌های دوبه‌دومتعامدی سروکار داریم که محمل توابع مقیاس و توابع موجک به‌صورت مینیمال در بازهٔ $[-۱, ۱]$ قرار دارد، پاسخ داده می‌شود.

بنابراین اهمیت این تحقیق از این جهت است که ضمن تضمین وجود یا عدم‌وجود توابع موجک وابسته به یک آنالیز چندریزگی، در صورت وجود، روش به‌دست آوردن توابع موجک مذکور را نیز در اختیار ما قرار می‌دهد. علاوه‌براین اهمیت دیگر این تحقیق در این است که بحث ساختن موجک اگرچه به‌خودی‌خود یک بحث نظری می‌باشد، اما حلقهٔ واسط بین نظریهٔ موجک و کاربرد آن در دنیای واقعی است. بدین معنی که همواره یکی از مزایای نظریه موجک این‌گونه بیان می‌شود که در نظریهٔ موجک برای هر کاری می‌توانیم پایهٔ مناسب آن کار را درنظر بگیریم. اما در بیشتر کتاب‌ها و منابع، با فرض نانوشتهٔ این‌که پایهٔ موجک مناسب در دست ماست، به خصوصیات و کارکردهای آن پایه پرداخته می‌شود. در حالی که در مسائل کاربردی مهم، اولین مرحله ساخت یا پیدا کردن پایهٔ موجک مناسب است و قطعاً برای حل این مسئله بررسی شرایط وجود پایه موجک و روش‌های ساخت آن، از اهمیت به‌سزایی برخوردار است.

تاریخچه

ایدهٔ نمایش یک تابع بر حسب مجموعه‌ای از توابع مثلثاتی توسط ریاضی‌دانان بزرگی مانند اویلر، دانیل برنولی، لاگرانژ و دیگران شناخته شده بود ولی برای اولین بار توسط ژوزف فوریه، ریاضی ـ فیزیک‌دان فرانسوی در سال ۱۸۲۲ میلادی در رساله‌ای با عنوان «نظریهٔ تحلیلی گرما» به طور مبسوط به‌کار گرفته شد. در واقع این موضوع، روشی برای نمایش تابع $f(x)$ به شیوه‌ای ساده و فشرده می‌باشد. فوریه نشان داد که یک تابع 2πـ متناوب مانند $f(x)$ را می‌توان به صورت حاصل جمع بی‌نهایت تابع مثلثاتی به شکل $\sin(nx)$ و $\cos(nx)$ (به‌ازای $n \in \mathbb{N}$) که هر کدام در ضریبی نیز ضرب شده باشد، نمایش داد.

پایهٔ فوریه به صورت ابزاری اساسی، با کاربردهای فراوان در علوم در آمده است؛ زیرا برای نمایش انواع متعددی از توابع و در نتیجه کمیت‌های فیزیکی فراوانی به کار می‌رود. با گذشت زمان ضعف پایهٔ فوریه نمایان شد و دانشمندان متوجه شدند سری فوریه فقط برای توابع متناوب مفید است و برای توابع غیر متناوب کارآمد نیست. در

سال ۱۹۰۹، هار[1] اولین کسی بود که به آن‌چه امروز موجک نامیده می‌شود، اشاره کرد. در سال‌های دهۀ ۱۹۳۰ ریاضی‌دانان به قصد تحلیل ساختارهای پیچیده‌تر، به فکر اصلاح پایۀ فوریه افتادند؛ در سال ۱۹۷۰ یک ژئوفیزیک‌دان فرانسوی به نام ژان مورلت[2] متوجه شد که پایۀ فوریه ابزار مناسبی برای تحلیل امواج زمین‌لرزه نیست؛ تلاش برای حل این موضوع، منجر به کشف موجک‌ها گردید. در سال ۱۹۸۰ ایو می‌یر،[3] ریاضی‌دان فرانسوی، نخستین پایه‌های موجکی متعامد را کشف کرد. در همین سال‌ها، مورله مفهوم موجک و تبدیل موجک را به‌عنوان یک ابزار برای تحلیل سیگنال زمین‌لرزه وارد کرد و گراسمان،[4] فیزیک‌دان نظری فرانسوی نیز فرمول تبدیل معکوس موجک را به‌دست آورد.

بین سال‌های ۱۹۷۶ و ۱۹۸۵ تحقیقات زیادی برای ساختن موجک‌ها با ویژگی‌های خاص به منظور به‌کار بردن در مسائل خاص به‌وجود آمد. این تحقیقات توسط می‌یر شروع شد. وی تصور می‌کرد که موجک‌ها نمی‌توانند نامتناهی بار مشتق‌پذیر باشند؛ اما در طی تلاش برای اثبات ادعایش، فهمید که تصورش اشتباه بوده است.

یک مهندس جوان به نام استفان مالات[5] و می‌یر حدود سال ۱۹۸۷، مجموعه شرایطی که منجر به ساختن موجک‌ها می‌شوند را به‌دست آوردند. در حقیقت ایشان آنالیز چندریزگی یا چندمقیاسی و ارتباط آن با موجک‌ها را بیان نمودند. (در فصل ۱، این ارتباط را با جزئیات بیشتری مورد بررسی قرار می‌دهیم.) آنالیز چندریزگی به سرعت به یک ابزار استاندارد در مهندسی و پردازش تصاویر تبدیل شد.

در سال ۱۹۹۰ اینگرید دابیشی،[6] گامی بزرگ در پیش‌برد این نظریه برداشت و راه‌هایی برای ایجاد موجک‌هایی با محمل فشرده از طریق آنالیز چندریزگی پیدا کرد. برای هر عدد طبیعی، Nـ امین موجک دابیشی بیرون از بازه $[۰, ۲N - ۱]$ برابر صفر

[1]. Haar.

[2]. Morlet.

[3]. Y. Meyer.

[4]. Grossmann.

[5]. S. Mallat.

[6]. I. Daubechies

است و دارای خاصیت‌های قبلی که دیگر ریاضی‌دانان به‌دست آورده بودند نیز می‌باشد. دابیشی کتابی منتشر کرده است که شامل ده فصل می‌باشد. (منبع [٤]) او در اولین کنفرانس بین‌المللی موجک در سال ۱۹۹۲ مطالب این کتاب را به‌صورت ده سخنرانی ارائه داد. امروزه مرجع‌های زیادی از کتاب‌های موجک موجود است اما کتاب دابیشی هنوز یکی از مراجع مهم این موضوع می‌باشد.

در سال ۱۹۹۰ مورنزی همراه با آنتوان، موجک‌ها را به دو بعد و سپس به فضاهایی با ابعاد بالاتر گسترش دادند و بدین ترتیب بود که آنالیز موجک پایه‌گذاری گردید. آنالیز موجک یکی از دستاوردهای نسبتا جدید و شگفت‌انگیز ریاضیات محض مبتنی بر چندین دهه پژوهش در آنالیز هارمونیک است.

آنالیز موجک امروزه کاربردهای مهمی در بسیاری از رشته‌های علوم و مهندسی یافته و امکانات جدیدی برای درک جنبه‌های ریاضی آن و نیز افزایش کاربردهایش فراهم شده است. در آنالیز موجک مانند آنالیز فوریه با بسط توابع سروکار داریم ولی این بسط بر حسب «موجک‌ها» انجام می‌شود. موجک، تابع مشخص مفروضی است که بسط تابع دلخواه $f(x)$ بر حسب انتقال‌ها و اتساع‌های این تابع انجام می‌گیرد. برخلاف چندجمله‌ای‌های مثلثاتی، موجک‌ها به‌صورت موضعی بررسی می‌شوند و به این ترتیب ارتباط نزدیک‌تری بین بعضی توابع و ضرایب آن‌ها امکان‌پذیر می‌شود و محاسبات عددی در بسط موجکی و بازسازی آن ساده‌تر می‌گردد. بسیاری از کاربردهایی که مبتنی بر تبدیل فوریه یا سری فوریه هستند را می‌توان با استفاده از موجک‌ها فرمول‌بندی کرد و اطلاعات موضعی بیشتری به‌دست آورد.

آنالیز موجک حاصل پنجاه سال کار ریاضی‌دانان است که طی آن، با توجه به مشکلاتی که در پاسخ دادن به ساده‌ترین پرسش‌های مربوط به پایه و تبدیل فوریه وجود داشت، با استفاده از آنالیز هارمونیک جانشین‌های انعطاف‌پذیر ساده‌تری برای این پایه و تبدیل ارائه شد. مستقل از این نظریه که درون ریاضیات محض جای دارد، صورت‌های مختلفی از این رهیافت چندمقیاسی طی دهه‌های گذشته در پردازش تصویر، آکوستیک، کدگذاری و کشف نفت ایجاد شده است.[1]

[1]. بیشتر مطالب این قسمت از منبع [١٦] اقتباس شده است.

در اینجا لازم است به جزئیات کارهای انجام شده در زمینه موضوع تحقیق نیز اشاره‌ای گذرا شود:

بیشتر موجک‌های متعامد را می‌توان طبق قضیه مالات (قضیه ۱۲.۲.۱) و روشی که در برهان این قضیه شرح داده شده، از یک آنالیز چندریزگی مناسب تولید کرد. آنالیز چندریزگی توسط یک تابع مقیاس مانند ϕ تولید می‌شود. در بسیاری از کاربردها به دلایل فنی، این تمایل وجود دارد که تابع مقیاس، و درواقع تابع موجک ساخته شده از روی تابع مقیاس، با محمل فشرده باشد. دابیشی در منبع [٤] مجموعه‌ای از توابع مقیاس و توابع موجک که محمل آنها فشرده است راس معرفی نموده است. اما معمولاً خواص بیشتری برای تابع موجک، مطلوب است. در این میان مشکلی که وجود دارد این است که برقراری هم‌زمان خواص گوناگون برای تابع موجک ممکن است بسیار محدود کننده باشد. تا جایی که ثابت می‌شود هیچ تابع موجک پیوسته و متقارن با محمل فشرده که پایهٔ تولید شده توسط آن متعامد باشد، وجود ندارد. ریاضی‌دانان برای حل این مشکل دو رویکرد در پیش گرفتند، یکی این‌که به‌جای ساخت پایه‌ای که از انتقال‌ها و اتساع‌های یک تابع تشکیل می‌شود، پایه‌ای بسازند که از انتقال‌ها و اتساع‌های دو یا چند تابع مشخص، تشکیل می‌شود؛ این رویکرد منجر به ایجاد مفهومی به نام چندموجک[١] شد. رویکرد دیگر، رویکردی بود که در آن به‌جای استفاده از یک پایه، از دو پایه که به شکلی خاص درهم تنیده[٢] شده‌اند استفاده شود و خواص مطلوب را نه صرفاً در یکی از این پایه‌ها، بلکه در مجموع این پایه‌ها در کنار هم جستجو کنند. این رویکرد منجر به ایجاد مفهومی به نام موجک‌های دوبه‌دو متعامد[٣] شد.

مفهوم آنالیز چندریزگی با چندگانگی n و آنالیزچندریزگی دوبه‌دومتعامد به‌ترتیب دوگان‌های چندموجک و موجک‌های دوبه‌دومتعامد محسوب می‌شوند. در ادامه با ترکیب این دو مفهوم، مفهوم چندموجک‌های دوبه‌دو متعامد[٤] یا همان بردارهای موجک

---

١. Multiwavelet.

٢. Intertwining.

٣. Biorthogonal wavelets.

٤. Biorthogonal Multiwavelets.

دوبه‌دومتعامد ایجاد شد. در این میان می‌توان به تلاش‌های افرادی چون هاردین،[۱] ماراسویچ،[۲] یانگ[۳] و ... اشاره کرد که نمونه‌هایی از کارهای آنها در منابع [۸]، [۹] و [۱۰] مشاهده می‌شود.

با توجه به این‌که مفاهیم موجک‌های دوبه‌دومتعامد و آنالیزهای چندریزگی دوبه‌دومتعامد، دوگان هم هستند، یک روش ساخت موجک‌های دوبه‌دومتعامد، ساخت آنالیزهای چندریزگی دوبه‌دومتعامد است. کوهن،[٤] دابیشی و فیاویا[٥] در منبع [٥] روشی را ارائه داده‌اند که با استفاده از آن با داشتن تابع مقیاس ϕ می‌توان تابع مقیاس $\tilde{\phi}$ را چنان ساخت که با ϕ دوبه‌دومتعامد باشد.

در منابع [٦] و [۷]، هاردین و همکارانش روش‌هایی برای ساخت چند موجک (بردار موجک) از روی آنالیز چندریزگی با چندگانگی ۲، ارائه داده‌اند. در منبع [۸]، هاردین، دوناوان[٦] و گرونیمو[۷] روش مبسوط و به نسبت کاملی برای ساخت بردارهای مقیاس که محمل آنها در $[-۱,۱]$ است، ارائه داده‌اند.

در منبع [۹]، هاردین و ماراسویچ، روشی ارائه داده‌اند که با استفاده از آن برخی از بردارهای موجک دوبه‌دومتعامد وابسته به یک آنالیز چندریزگی دوبه‌دومتعامد با چندگانگی n که محمل آنها در $[-۱,۱]$ است، به‌دست می‌آید.

و درنهایت در منبع [۱۰]، یانگ[۸] و همکارانش روش ساده‌تری برای ساخت یک بردار موجک دوبه‌دومتعامد وابسته به یک آنالیز چندریزگی دوبه‌دومتعامد با چندگانگی n که محمل آنها در $[-۱,۱]$ است، ارائه می‌دهند. این روش اگرچه از به نسبت ساده است اما نمی‌تواند کلیه بردارهای موجک وابسته به یک آنالیز چندریزگی دوبه‌دومتعامد

---

[۱]. D. P. Hardin

[۲]. J. A. Marasovich

[۳]. S. Yang

[٤]. A. Cohen.

[٥]. J. Feauveau.

[٦]. G. C. Donovan.

[۷]. J. S. Geronimo.

[۸]. S. Yang.

را مشخص کند.

درواقع در این تحقیق، روشهای فوق بویژه روش ارائه شده در [۹]، به‌گونه‌ای گسترش پیدا کرده که کلیه بردارهای موجک دوبه‌دومتعامد وابسته به یک آنالیز چندریزگی دوبه‌دومتعامد را به‌صورت پارامتری مشخص نماید.

کاربرد و اهمیت

تحلیل سیگنال‌های مختلف الکتریکی، مکانیکی و ...

آنالیز موجک همراه با آنالیز فوریه در تحلیل سیگنال‌های گذرایی که سریعا تغییر می‌کنند، سیگنال‌های صوتی، جریان‌های الکتریکی در مغز و تشخیص مواد شیمیایی در یک جسم و در بسیاری جاهای دیگر به‌کار رفته است.

به‌ویژه از این ابزار مفید در مباحث مهمی مانند پردازش تصویر، تحلیل صوت، داده‌کاوی، تصویربرداری پزشکی، اکتشاف معادن و ... استفاده می‌شود.

فشرده‌سازی، ذخیره و انتقال اطلاعات

همان‌طور که در قسمت‌های بعدی توضیح داده خواهد شد، یکی از مزایای اصلی آنالیز موجک، خاصیت موضعی توابع پایه است. این امر باعث می‌شود، حجم اطلاعات مربوط به یک پدیده ـ مثلا اطلاعات موجود در یک قطعه فیلم ـ تا حد زیادی کاهش یابد و ذخیرهٔ این اطلاعات در حجم بسیار کم‌تری امکان‌پذیر باشد و انتقال آن‌ها نیز با سرعت بیشتری انجام شود.

یکی از معروف‌ترین کاربردهای موجک در این زمینه، معروف به «موجک اثر انگشت» می‌باشد که مربوط به مشکلی است که پلیس فدرال ایالات متحده با آن روبرو شد. (برای کسب اطلاعات بیشتر دربارهٔ این جریان به صفحات ٤–١ منبع [١] مراجعه فرمایید.)

آنالیز عددی

آنالیز موجک به‌عنوان یک ابزار عددی می‌تواند مانند آنالیز فوریه تا حد زیادی از پیچیدگی محاسبات با حجم بالا بکاهد. به‌عبارت دیگر، با استفاده از موجک می‌توان همانند آنالیز فوریه، سرعت محاسبات را تا حد زیادی افزایش داد (هر دوی این ابزار، مرتبهٔ محاسبات را از N^2 به $N \log N$ کاهش می‌دهند.) علاوه بر این، و برخلاف آنالیز فوریه، سرعت همگرایی نیز هنگام استفاده از موجکِ مناسب، به‌شدت افزایش می‌یابد؛ همین امر باعث شده که حل عددی معادلات دیفرانسیل ـ به‌ویژه معادلات دیفرانسیل آشفته ـ و معادلات انتگرال با استفاده از موجک‌ها، در بسیاری از مسائل کاربردی، جای روش‌های قبلی را بگیرد. (برای مثال منابع [۱۷] و [۱٦] را مشاهده فرمایید.)

محاسبات نرم و شبکه‌های عصبی مصنوعی

سالهاست که بشر به‌دنبال توسعه ماشین‌های هوشمندی است که بتوانند رفتارهای انسانی را درک کرده و هم‌چون انسان واکنش نشان دهند. در این مسیر، تاکنون پیشرفت‌های قابل ملاحظه‌ای انجام شده است و از آن جمله می‌توان به رویکردهایی اشاره کرد که در انجام محاسبات، منعطف بوده و نادقیقی و تقریب در داده‌ها را تحمل می‌کنند. دکتر لطفی عسکرزاده معتقد است: «مبنای دانش و حرکت در ماشین‌ها، سنجش است اما تحرک انسانی ناشی از درک و فهم اوست. برای این‌که یک ماشین قادر باشد توانایی‌های فوق‌العاده بالای بشری را تقلید کرده و هم‌چون انسان و برپایه اطلاعات مبتنی بر درک و فهم به فعالیت‌های متنوع فکری و فیزیکی انسان دست بزند، لازم است به‌گونه‌ای بتواند سنجش را به فهم تبدیل کند.»

تحقیقات نشان داده است که برای نیل به این مقصود باید تغییرات زیادی در تعاملات درونی ماشین‌ها صورت گیرد. یکی از مهم‌ترین این تغییرات، سیستم محاسباتی است و پیشنهادی که در این زمینه وجود دارد، محاسبات نرم است. طبق تعریف، محاسبات نرم مجموعه‌ای از رویکردهای محاسباتی هستند که بتوانند توانایی بالای ذهن انسان در استدلال و یادگیری را در محیطی با مشخصه‌های غیرقطعی و نادقیق و با گزاره‌های نسبتا درست به‌طور موازی به‌کار گیرند.

می‌توان گفت، مشخصهٔ اصلی محاسبات نرم، تقریب و نادقیقی آن است که این مشخصه دقیقا در مقابل مشخصهٔ اصلی محاسبات سخت (یا همان ریاضیات سنتی) که دقت و وضوح است، می‌باشد. ابزار اصلی محاسبات نرم برای نیل به اهدافش عبارت است از: منطق فازی، شبکه‌های عصبی مصنوعی، محاسبات تکاملی (الگوریتم ژنتیک)، نظریهٔ مجموعه‌های راف و ...؛ این در حالی است که ابزار اصلی محاسبات سخت عبارت است از: منطق دودویی، نرم‌افزارهای قطعی، تخمین عددی، مجموعه‌های قطعی و... .

این‌که چرا به محاسبات نرم نیاز داریم، به مشکلات روش‌های سخت برمی‌گردد. برخی از مشکلات عمده مدل‌های ریاضی سخت عبارتند از: ۱. عدم پوشش ابهام، گنگی و عدم قطعیت؛ ۲. بالا بودن مرتبهٔ زمانی محاسبات؛ ۳. حساس بودن نسبت به اغتشاش داده‌ها.

بدون شک موجک‌ها در دسته‌بندی فوق جزء ابزارهای محاسبات سخت به‌حساب می‌آیند اما با مقایسهٔ مشکلات مطرح شده در فوق با خواص اساسی موجک‌ها که در ادامه بررسی می‌شوند، مشاهده می‌شود که بجز مشکل اول (عدم پوشش ابهام، گنگی و عدم قطعیت) که هم‌چنان باقی است، دو مشکل اساسی دیگر با استفاده از موجک‌ها تا حد بسیار خوبی مرتفع می‌شود؛ این هم یکی دیگر از ویژگی‌های جالب موجک‌هاست: بدون وارد شدن به دنیای محاسبات نرم، بسیاری از مشکلات محاسبات سخت را دور زده‌ایم!!

شاید همین مسئله باعث شده باشد که دانشمندان به‌فکر این بیفتند که موجک‌ها را با ابزار محاسبات نرم ترکیب کنند و از دل این ترکیب، ابزارهایی مانند شبکه‌های عصبی مصنوعی موجکی، موجک فازی و ... حاصل شود.

برای مثال، یکی از دستاوردهای بشر در اواخر قرن بیستم طراحی و ساخت شبکه‌های عصبی مصنوعی است. در این دستاورد با الهام‌گیری از روش تفکر انسان سعی شده است سیستمی طراحی شود که مانند انسان فکر کند و مانند انسان بتواند اشتباهات خود را تشخیص دهد و به مرور زمان آن‌ها را رفع کند. اما از همان ابتدای کار، این شبکه‌ها یک مشکل اساسی داشتند و آن این است که این شبکه‌ها مسئله‌ها را حل می‌کنند ولی نمی‌توانند دربارهٔ نحوهٔ رسیدن به پاسخ توضیح بدهند و نحوهٔ رسیدن به پاسخ در

آن‌ها مانند جعبهٔ سیاه، غیرقابل دسترسی است. به‌همین دلیل از ابتدا دانش‌مندان این عرصه تلاش داشتند که شبکه‌های عصبی‌ای بسازند که بتوانند دربارهٔ عملکرد خودشان توضیح دهند و اصطلاحا مبتنی بر قاعده باشند (ویا بتوانند فرمول نتیجه‌گیری خود را ارائه دهند) اما این تلاش‌ها تا به امروز نتیجهٔ چندانی در بر نداشته است؛ اما با ورود موجک به شبکه‌های عصبی این امید دوباره زنده شده است که بتوان چنین شبکه‌های عصبی‌ای طراحی کرد و عده‌ای مشغول تحقیق روی این موضوع هستند. ضمن این‌که از موجک‌ها در مدل‌های سنتی شبکه‌های عصبی هم استفاده شده است. این امر باعث تولید شبکه‌های عصبی با قابلیت‌های ویژه‌ای شده است که به نام «شبکه‌های عصبی مصنوعی موجکی» معروف شده‌اند. (منبع [۱۹] را ببینید.)

فصل ۱

آشنایی با نظریهٔ موجک‌ها

با توجه به این‌که برای درک مفهوم چندموجک و آنالیز چندریزگی با چندگانگی n نیاز به آشنایی با مفهوم موجک (یا تک – موجک) و آنالیز چندریزگی داریم، در این فصل به معرفی اجمالی این مفاهیم خواهیم پرداخت.

۱.۱ موجک روی $\mathbb{Z}_N$ و $\mathbb{Z}$

۱.۱.۱ مقدمه

در این بخش ابتدا به بررسی تعریف و خواص موجک روی $\mathbb{Z}_N$ می‌پردازیم. موجک روی $\mathbb{Z}_N$ از دو جهت برای ما مهم است: اول این‌که، به دلیل این‌که این فضا متناهی‌البعد است، درک و شهود مطالبی که مطرح می‌شود بسیار ساده‌تر می‌باشد و بررسی مفهوم موجک در این فضا ما را در درک بهتر موجک روی $\mathbb{Z}$ و $\mathbb{R}$ یاری می‌کند. دوم این‌که، موجک روی $\mathbb{Z}_N$ به‌خودی خود نیز کاربردهای فراوانی در علوم مختلف دارد.

در ادامه به مطالعه موجک روی $\mathbb{Z}$ می‌پردازیم. اهمیت این فضا نیز در بحث ما از دو جهت است: اول این‌که موجک روی $\mathbb{Z}$ از یک طرف تعمیمی طبیعی از موجک روی $\mathbb{Z}_N$ است و بنابراین مانند آن قابل شهود است؛ و از طرف دیگر علی‌رغم این که فضای $l^۲(\mathbb{Z})$ مانند فضای $l^۲(\mathbb{Z}_N)$ گسسته است، اما مانند $L^۲(\mathbb{R})$ نامتناهی‌البعد است و به ما کمک می‌کند که از فضای متناهی‌البعد $l^۲(\mathbb{Z}_N)$ به فضای نامتناهی‌البعد $L^۲(\mathbb{R})$ گذار کنیم.

دوم این‌که در فرایند ساخت موجک روی $\mathbb{R}$، مسئله با روشی خاص به ساخت موجک روی $\mathbb{Z}$ تحویل می‌یابد، و با ساخت موجک خاصی روی $\mathbb{Z}$ و بازگشت به $\mathbb{R}$،

موجک مورد نظر روی $\mathbb{R}$ ساخته می‌شود.

۲.۱.۱ معرفی فضای $l^2(\mathbb{Z}_N)$ و پایهٔ فوریه روی آن

تعریف ۱.۱.۱. فرض کنیم N یک عدد طبیعی دلخواه باشد. در این صورت قرار می‌دهیم:

$$l^2(\mathbb{Z}_N) := \{z = (z(0), z(1), \cdots, z(N-1)) : z(j) \in \mathbb{C} \;\;,\;\; 0 \leq j \leq N-1\}$$

همان‌طور که از تعریف فوق واضح است $l^2(\mathbb{Z}_N)$ چیزی به‌جز فضای $\mathbb{C}^N$ نیست؛ اما به‌دلیل یکسان‌سازی نمادها، آن را با این نماد جدید نمایش داده‌ایم.

تعریف ۲.۱.۱. ضرب داخلی روی $l^2(\mathbb{Z}_N)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\langle z, w\rangle = \sum_{k=0}^{N-1} z(k)\overline{w(k)}$$

تعریف ۳.۱.۱. برای هر $0 \leq m \leq N-1$، عنصر F_m از $l^2(\mathbb{Z}_N)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$F_m(n) = \frac{1}{N} e^{\frac{2\pi i m n}{N}} \qquad n = 0, 1, \cdots, N-1$$

در این صورت به مجموعهٔ $\mathcal{F} = \{F_0, F_1, \cdots, F_{N-1}\}$، پایهٔ فوریه برای $l^2(\mathbb{Z}_N)$ گفته می‌شود.

ثابت می‌شود که $\mathcal{F}$ یک مجموعهٔ متعامد یکه با N عضو است و بنابراین این مجموعه، به‌معنایی که در جبر خطی داشتیم، یک پایه برای فضای $l^2(\mathbb{Z}_N)$ است.

تعریف ۴.۱.۱. فرض کنیم $z = (z(0), z(1), \cdots, z(N-1))$ عضوی از $l^2(\mathbb{Z}_N)$ باشد، در این صورت برای هر $0 \leq m \leq N-1$ قرار می‌دهیم:

$$\hat{z}(m) = \sum_{n=0}^{N-1} z(n) e^{\frac{-2\pi i m n}{N}}$$

هم‌چنین قرار می‌دهیم:

$$\hat{z} = (\hat{z}(0), \hat{z}(1), \cdots, \hat{z}(N-1))$$

به $\hat{z}$ تبدیل فوریهٔ z می‌گویند. (واضح است که داریم: $\hat{z} \in l^2(\mathbb{Z}_N)$.)

چند خاصیت مهم پایهٔ فوریه در قضیهٔ زیر ارائه شده است: